Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Бруй, Консервативные средние ортогональных рядов
и пространства $L^p[0; 1]$, $p \in (1; \infty)$, *Матем. заметки*, 2002,
том 71, выпуск 2, 182–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm338>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:44:34

УДК 517.518.366

КОНСЕРВАТИВНЫЕ СРЕДНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И ПРОСТРАНСТВА $L^p[0; 1]$, $p \in (1; \infty)$

И. Н. Бруй

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы ортогональный ряд являлся рядом Фурье функции из пространства $L^p[0; 1]$, $p \in (1; \infty)$. В частном случае регулярных методов суммирования имеем классические результаты Орлича и Ломницкого.

Библиография: 29 названий.

1. Цель работы. На вопрос “Когда ортогональный ряд является рядом Фурье функции из L^p ?” свои ответы Орлич и Ломницкий (см. [1, с. 11–15] или [2, с. 251–255, 257–259]) дали с использованием регулярных методов суммирования рядов.

Напомним, что

1) тригонометрический ряд

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\ln m} \sin mx$$

сходится в каждой точке x действительной прямой $\mathbb{R}$, однако он не является рядом Фурье ни своей суммы, ни другой функции (см. [3, с. 123], [4, с. 298] или [5, с. 148]);

2) метод суммирования рядов называется *регулярным*, если он сохраняет сумму любого сходящегося ряда;

3) метод суммирования рядов называется *консервативным*, если он сохраняет сходимость всех сходящихся рядов.

Очевидно, регулярные методы суть частный случай консервативных методов.

Цель настоящей работы – дать ответы на сформулированный выше вопрос с использованием консервативных методов суммирования рядов.

2. Обозначения. Пусть показатель $p \in [1; \infty]$. Через $L^p[0; 1]$ обозначим комплексное линейное пространство всех комплекснозначных функций f , которые на отрезке $[0; 1]$ действительной прямой $\mathbb{R}$ определены почти всюду, измеримы и в случае $p \in [1; \infty)$ интегрируемы по Лебегу в степени p , а в случае $p = \infty$ существенно ограничены, с обычными операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа. Полунормы задаются следующим образом:

$$\forall p \in [1; \infty) \quad \|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

В случае периодических функций употребляем обозначение $L^p(\mathbb{T})$.

Показатели $p \in [1; \infty]$ и p' называются *сопряженными*, если $1/p + 1/p' = 1$. Считаем $p' = \infty$ при $p = 1$ и $p' = 1$ при $p = \infty$. Очевидно, сопряженный показатель $p' = p/(p - 1) \in [1; \infty]$ и $p/p' = p - 1$.

Везде в настоящей работе M обозначает: во-первых, нижнюю треугольную матрицу $[\mu_m^{(n)}]$ комплексных чисел ($n \in \mathbb{Z}_0$ – номер строки, $m \in \mathbb{Z}_0$ – номер столбца; здесь и всюду в дальнейшем под $\mathbb{Z}_0$ понимается множество целых неотрицательных чисел); во-вторых, определяемый матрицей $[\mu_m^{(n)}]$ метод суммирования рядов.

3. Исходные понятия. Последовательность $\Phi := (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \dots)$ (иное обозначение $(\varphi_m(x))$, $m \in \mathbb{Z}_0$) комплекснозначных измеримых функций, определенных почти всюду на отрезке $[0; 1] \subset \mathbb{R}$, называется *ортонормированной системой* на $[0; 1]$, если

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0, \forall n \in \mathbb{Z}_0 \quad \int_0^1 \varphi_m(x) \overline{\varphi_n(x)} dx = \begin{cases} 1, & \text{когда } m = n, \\ 0, & \text{когда } m \neq n. \end{cases} \quad (1)$$

Условия (1) влекут: во-первых, принадлежность всех функций $\varphi_m(x)$ и их алгебраических сопряжений $\overline{\varphi_m(x)}$ пространству $L^2[0; 1]$; во-вторых, отличие всех функций $\varphi_m(x)$ от нуля почти всюду на $[0; 1]$, т.е. равенство $\varphi_m(x) = 0$ не может выполняться почти всюду на $[0; 1]$.

Две последовательности – ортонормированная система $(\varphi_m(x))$, $m \in \mathbb{Z}_0$, и последовательность $A := (a_0, a_1, \dots, a_m, \dots)$ комплексных чисел – порождают функциональный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x), \quad (2)$$

который называют *ортонормальным рядом*.

Число

$$c_m(f; \Phi) := \int_0^1 f(t) \overline{\varphi_m(t)} dt \quad (3)$$

называется *m -м коэффициентом Фурье* по системе Φ функции f . В отношении системы Φ прилагательное “ортонормированная” всегда подразумевается.

Напомним (см. [3, с. 656] или [4, с. 84 или с. 297, теорема 1.15]), что функция f может быть неинтегрируемой, а произведение $f \overline{\varphi_m}$ – интегрируемым. Очевидно, если $f \in L^p[0; 1]$, а $\varphi_m \in L^{p'}[0; 1]$, то произведение $f \overline{\varphi_m}$ заведомо интегрируемо на $[0; 1]$. Последнее обстоятельство объясняет наличие предположения 1) в формулировках теорем 1 и 2, лемм 1–3 и определении 2.

Ортонормальный ряд (2), коэффициенты которого определяются по формулам (3), отправляясь от функции f , называется *рядом Фурье* по системе Φ функции f :

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m(f; \Phi) \varphi_m(x). \quad (4)$$

Знак ‘ $\sim$ ’ в формуле (4) означает лишь, что каждый коэффициент c_m ряда связан с функцией f формулой (3).

Ортогональный ряд (2) не обязательно есть ряд Фурье (4) (см. п. 1).

Поэтому и возникает вопрос, сформулированный в начале статьи. Исторические справки см. в [1, с. 16] и [4, с. 591].

Для пространства $L^2[0; 1]$ ответ на упомянутый выше вопрос дает (см. [2, с. 11], [3, с. 74], [4, с. 207] или [6, с. 81–82]) знаменитая теорема Фридьеша Рисса: функция, задаваемая рядом (2), принадлежит $L^2[0; 1]$ тогда и только тогда, когда $(a_m) \in \ell^2(\mathbb{Z}_0)$.

Столь простого ответа, не зависящего от ортонормированной системы $(\varphi_m(x))$, $m \in \mathbb{Z}_0$, для пространств, не совпадающих с $L^2[0; 1]$, нет.

В следующем пункте формулируются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в случае $p \neq 2$ ортогональный ряд (2) являлся рядом Фурье по системе Φ функции f из пространства $L^p[0; 1]$, $p \in (1; \infty)$.

4. Основной результат. Функция

$$L_n(\Phi; M; x) := \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^n \mu_m^{(n)} \varphi_m(x) \overline{\varphi}_m(t) \right| dt \quad (5)$$

называется n -й M -функцией Лебега ортонормированной системы $(\varphi_m(x))$, $m \in \mathbb{Z}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть для любой функции $f \in L^p[0; 1]$, $p \in [1; \infty]$, конечны все ее коэффициенты Фурье (3) по системе Φ . Ортонормированная система Φ называется *полной* (vollständig) в пространстве $L^p[0; 1]$, $p \in [1; \infty]$, если равенство нулю всех коэффициентов Фурье (3) по системе Φ функции $f \in L^p[0; 1]$ влечет равенство нулю функции f почти всюду на отрезке $[0; 1]$.

Если ортонормированная система Φ полна в пространстве $L^p[0; 1]$, $p \in [1; \infty]$, то (см. [1, с. 8] или [3, с. 878]) все функции $\varphi_m(x)$ системы Φ принадлежат сопряженному пространству $L^{p'}[0; 1]$. Поэтому, во-первых, в следующей ниже теореме 1 предположение 5) влечет предположение 1); во-вторых, корректно используемое при доказательстве леммы 3 равенство $(L^p, L^p) = (L^{p'}, L^{p'})$, $p \in (1; \infty)$.

Функция

$$M_n(A; \Phi; x) := \sum_{m=0}^n \mu_m^{(n)} a_m \varphi_m(x) \quad (6)$$

называется n -м M -средним ортогонального ряда (2).

Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие предположения:

- 1) все функции $\varphi_m(x)$ ортонормированной системы Φ принадлежат $L^2[0; 1] \cap L^{p'}[0; 1]$;
- 2) матрица M определяет консервативный метод суммирования рядов, т.е. [7, с. 17] ее элементы, во-первых, таковы, что ограничены в совокупности их построчные изменения:

$$k_1(M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \sum_{m=0}^n |\mu_m^{(n)} - \mu_{m+1}^{(n)}| < \infty; \quad (7)$$

во-вторых, имеют конечные пределы по всем столбцам:

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{(n)} = \rho_m \in \mathbb{C}; \quad (8)$$

- 3) указанные выше ортонормированная система Φ и матрица M связаны условием

$$k_2(\Phi; M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|L_n(\Phi; M; \cdot)\|_\infty < \infty, \quad (9)$$

означающим равномерную ограниченность почти всюду на отрезке $[0; 1]$ всех M -функций Лебега (5) ортонормированной системы Φ ;

- 4) последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, постолбцовых пределов элементов матрицы M отделена от нуля:

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad |\rho_m| \geq k_3(M) > 0. \quad (10)$$

В случае нерегулярности консервативного метода M наложим дополнительное предположение:

- 5) ортонормированная система Φ полна в пространстве $L^r[0; 1]$, где показатель $r := \min(p, p')$.

Тогда для того чтобы ортогональный ряд (2) являлся рядом Фурье (4) по системе Φ функции из пространства $L^p[0; 1]$ с показателем $p \in (1; \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из трех следующих ниже условий:

- А) последовательность p -полунорм его M -средних (6) была ограничена:

$$k_4(A; \Phi; M) := \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \|M_n(A; \Phi; \cdot)\|_p < \infty; \quad (11)$$

- Б) последовательность его M -средних (6) была фундаментальна в пространстве $L^p[0; 1]$:

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|M_m(A; \Phi; \cdot) - M_n(A; \Phi; \cdot)\|_p = 0;$$

- В) для любой функции g из сопряженного пространства $L^{p'}[0; 1]$ числовой ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \bar{c}_m(g; \Phi)$$

суммировался методом M , т.е. чтобы для любой функции $g \in L^{p'}[0; 1]$ существовал конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n \mu_m^{(n)} a_m \bar{c}_m(g; \Phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся доказательством утверждения А):

$$\forall p \in (1; \infty) \quad (11) \iff \exists f \in L^p[0; 1] \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad a_m = c_m(f; \Phi).$$

Его справедливость вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1 (необходимость). Пусть выполнены следующие предположения:

- 1) все функции $\varphi_m(x)$ ортонормированной системы Φ принадлежат $L^2[0; 1] \cap L^{p'}[0; 1]$;
- 2) указанная выше ортонормированная система Φ и матрица M связаны условием (9).

Тогда если для показателя $p \in [1; \infty]$ функция $f \in L^p[0; 1]$, то последовательность p -полунорм M -средних ряда Фурье (4) по системе Φ функции f ограничена:

$$\forall p \in [1; \infty], \quad \forall f \in L^p[0; 1] \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{m=0}^n \mu_m^{(n)} c_m(f; \Phi) \varphi_m(\cdot) \right\|_p \leq k_2(\Phi; M) \|f\|_p.$$

Доказывается лемма 1 по известной схеме (см. [2, с. 252–253], [3, с. 34], [8, с. 22] или [9, с. 8–9]).

ЛЕММА 2 (достаточность). Пусть выполнены предположения 1)–5), как в теореме 1. Тогда если для показателя $p \in (1; \infty)$ последовательность p -полунорм M -средних (6) ортогонального ряда (2) ограничена, то ортогональный ряд (2) является рядом Фурье (4) по системе Φ функции f из пространства $L^p[0; 1]$:

$$\forall p \in (1; \infty) \quad (11) \implies \exists f \in L^p[0; 1] \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad a_m = c_m(f; \Phi).$$

Доказательство леммы 2 разделено на два пункта: 6 и 7.

5. Замечания к основному результату.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если матрица M определяет регулярный метод суммирования рядов, то [7, с. 20] ее элементы удовлетворяют условию (7) и имеют единичный предел по всем столбцам:

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_m^{(n)} = 1. \quad (12)$$

Очевидно, условие (12) влечет условия (8) и (10). Поэтому из теоремы 1 для показателей $p \in (1; \infty)$ имеем классические результаты Орлича и Ломницкого¹, а именно: из утверждения А) – теорему 1 в статье [1, с. 11–12] и теорему 6.4.1 в монографии [2, с. 251–252]; из утверждения Б) – теорему 2 в [1, с. 13] и теорему 6.4.3 в [2, с. 254]; из утверждения В) – теоремы 3 и 3' в [1, с. 14–15] и теорему 6.4.6 в [2, с. 257].

Для регулярного метода M утверждение А) имеет место и для предельного значения $p = \infty$ [2, с. 252, теорема 6.4.2], утверждение Б) – для $p = 1$, а утверждение В) – для обоих предельных значений $p = 1$ и $p = \infty$ (см. цитированные выше результаты Орлича и Ломницкого). По поводу предельных значений в нашем случае см. замечания 6 и 7 к теореме 2.

¹Отметим, что упомянутые классические результаты следуют из теоремы 1 только в случае, когда рассматриваются треугольные методы Теплица, а в указанных ниже теоремах из книги [2] рассматриваются произвольные конечнострочные методы Теплица (прим. ред.).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Автором доказано утверждение А) без условия (7) для рядов Фурье по двум системам: тригонометрической [10, с. 47] и Уолша–Пэли.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для показателей $p \in (1; \infty)$ автором доказано утверждение А) без условия (9), т.е. без условия ограниченности последовательности констант Лебега метода суммирования рядов, для рядов Фурье по двум системам: тригонометрической (см. [11, с. 26], [12, с. 679] или [10, с. 47]) и Уолша–Пэли.

Условие (9) необходимо для справедливости указанных в замечании 1 утверждений в предельных случаях $p = 1$ и $p = \infty$ (см. [2, с. 253(А), 255(Б)]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Метод суммирования рядов называется *порождающим сходимостью*, если он суммирует все ряды с ограниченными частичными суммами. Если матрица M определяет порождающий сходимость метод суммирования рядов, то [13, с. 72, теорема 8] ее элементы удовлетворяют условиям (7), (8) и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_m = 0. \quad (13)$$

Очевидно, множество регулярных методов и множество порождающих сходимость методов суть собственные подмножества множества консервативных методов. Более того, эти собственные подмножества не пересекаются [13, с. 73].

Так как условия (10) и (13) несовместимы, то предположению 4) условия теоремы 1 не удовлетворяют никакие порождающие сходимость методы суммирования рядов.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждение А) не распространяется на крайнее левое значение показателя $p = 1$ (см. [2, с. 253] или [3, с. 171]). Утверждение Б) не распространяется на крайнее правое значение показателя $p = \infty$ (см. [2, с. 254]).

6. О мультипликаторах рядов Фурье по ортонормированным системам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть все функции $\varphi_m(x)$ ортонормированной системы Φ принадлежат $L^2[0; 1] \cap L^{p'}[0; 1]$. Последовательность (λ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, комплексных чисел называется (L^p, L^p) -мультипликатором рядов Фурье по системе Φ (обозначение $(\lambda_m) \in (L^p, L^p)$), если для каждой функции $g \in L^p[0; 1]$, $p \in [1; \infty]$, ортогональный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_m(g; \Phi) \varphi_m(x)$$

является рядом Фурье по системе Φ функции $f \in L^p[0; 1]$.

Итак, согласно определению последовательность

$$(\lambda_m) \in (L^p, L^p) \iff \forall g \in L^p[0; 1] \exists f \in L^p[0; 1] \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \lambda_m c_m(g; \Phi) = c_m(f; \Phi).$$

В случае периодических функций употребляем обозначение $(L^p(\mathbb{T}), L^p(\mathbb{T}))$.

Понятие мультипликаторной последовательности впервые ввел Фекете [14, с. 149] применительно к рядам Фурье по тригонометрической системе. Для рядов Фурье по ортонормированным системам вопрос о мультипликаторах поставил Марсель Рисс [15]. Исторические справки см. в [4, с. 592] и [16, с. 276–277].

Обозначим через $\ell^\infty(\mathbb{Z}_0)$ множество всех ограниченных последовательностей комплексных чисел. Из теоремы Фридьеша Рисса (см. п. 3) вытекает равенство

$$(L^2, L^2) = \ell^\infty(\mathbb{Z}_0).$$

В случае $p \neq 2$ нет столь простого описания (L^p, L^p) -мультипликаторов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения 1)–3) теоремы 1. Тогда последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, столбцовых пределов элементов матрицы M для всех показателей $p \in (1; \infty]$ является (L^p, L^p) -мультипликатором рядов Фурье по ортонормированной системе Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из условий консерватизма (7) и (8) стандартной процедурой [12, с. 680] получаем, что последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, имеет конечное изменение: $(\rho_m) \in BV(\mathbb{Z}_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В случае $p = \infty$ произвольная последовательность $(\lambda_m) \in BV(\mathbb{Z}_0)$ может и не быть (L^∞, L^∞) -мультипликатором. Из теоремы (1.14) монографии [4, с. 297] (см. [1, с. 22–23, теорема II] или [17, с. 309]) в силу равенства $(L^\infty(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T})) = (L^1(\mathbb{T}), L^1(\mathbb{T}))$ следует, что последовательность $(1/\ln m)$, $m \in \mathbb{Z}_2$, с конечным изменением не является $(L^\infty(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ -мультипликатором рядов Фурье по тригонометрической системе. В работах [18, с. 502] и [19, с. 236] указаны дополнительные условия на последовательность $(\lambda_m) \in BV(\mathbb{Z}_0)$, влекущие принадлежность $(\lambda_m) \in (L^\infty(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В случае $p \in (1; \infty)$ последовательности с бесконечным изменением, т.е. $(\lambda_m) \notin BV(\mathbb{Z}_0)$, как известно, могут быть (L^p, L^p) -мультипликаторами рядов Фурье по двум системам: тригонометрической (см. [20, с. 346–347] или [21, с. 67]) и Уолша–Пэли. Пример такой последовательности: $\lambda_{2l} := 1$, $\lambda_{2l+1} := (l+3)/(l+2)$, где $l \in \mathbb{Z}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть g – произвольная функция из пространства $L^p[0; 1]$, где показатель $p \in (1; \infty]$. Тогда на основании леммы 1 получаем

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_0} \left\| \sum_{m=0}^n \mu_m^{(n)} c_m(g; \Phi) \varphi_m(\cdot) \right\|_p \leq k_2(\Phi; M) \|g\|_p < \infty.$$

Отсюда согласно теореме о *-слабой сходимости в $L^p[0; 1]$ вытекает (см. [2, с. 40–41, теорема 1.6.6], [16, с. 23, суждение 0.8.12], [17, с. 74, теорема 12.3.10(2)] и с. 141, упражнение 12.14], [21, с. 38, теорема 1.3.11]) существование подпоследовательности (n_ν) , $\nu \in \mathbb{Z}_0$, последовательности $\mathbb{Z}_0$ целых чисел ≥ 0 и функции $h \in L^p[0; 1]$ таких, что для любых функций $u \in L^p[0; 1]$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^1 u(t) \sum_{m=0}^{n_\nu} \mu_m^{(n_\nu)} c_m(g; \Phi) \varphi_m(t) dt = \int_0^1 u(t) h(t) dt. \quad (14)$$

При этом p -полунорма $\|h\|_p \leq k_2(\Phi; M) \|g\|_p$. Беря в качестве $u(t)$ функцию $\overline{\varphi}_l(t)$, где $l \in \mathbb{Z}_0$, из предельного равенства (14) с учетом свойства ортонормированности (1) и определения (3) коэффициентов Фурье по системе Φ получаем

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_l^{n_\nu} c_l(g; \Phi) = c_l(h; \Phi).$$

Отсюда по свойству (8) имеем

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad \rho_l c_l(g; \Phi) = c_l(h; \Phi),$$

где функция $h \in L^p[0; 1]$.

Из предыдущего ввиду произвола в выборе функции $g \in L^p[0; 1]$ заключаем, что последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, для всех $p \in (1; \infty]$ является (L^p, L^p) -мультипликатором рядов Фурье по системе Φ . Теорема 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены предположения 1)–5) теоремы 1. Тогда последовательность $(1/\rho_m)$, $m \in \mathbb{Z}_0$, величин, обратных к столбцовым пределам элементов матрицы M , для всех показателей $p \in (1; \infty)$ является (L^p, L^p) -мультипликатором рядов Фурье по ортонормированной системе Φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Утверждение леммы 3 (без выделения в отдельное суждение) было доказано ранее автором для рядов Фурье по двум системам: тригонометрической (см. [12, с. 685] и [10, с. 49]; методы разные) и Уолша–Пэли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Если матрица M определяет регулярный метод суммирования рядов, то согласно свойству (12) все $\rho_m = 1$ и утверждение леммы 3 очевидно. Для *нерегулярных* консервативных методов M доказательство проводится в три шага.

Шаг 1. Из предположения 4) теоремы 1 имеем

$$\forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \left| \frac{1}{\rho_m} \right| \leq \frac{1}{k_3(M)} < \infty.$$

Отсюда в силу равенства $(L^2, L^2) = \ell^\infty(\mathbb{Z}_0)$ заключаем, что последовательность $(1/\rho_m)$, $m \in \mathbb{Z}_0$, является (L^2, L^2) -мультипликатором рядов Фурье по системе Φ .

Таким образом, для показателя $p = 2$ лемма 3 доказана.

Остается доказать ее для показателей $p \neq 2$.

Из предположения 5) о полноте системы Φ в пространстве $L^r[0; 1]$, где показатель $r := \min(p, p')$, на основании теоремы Орлича (см. [1, с. 22, теорема 10] или [2, с. 262, следствие из теоремы 6.5.4]) для всех показателей $p \in (1; \infty)$ имеем равенства $(L^p, L^p) = (L^{p'}, L^{p'})$.

Поэтому остается доказать лемму 3 для показателей $p \in (2; \infty)$.

Шаг 2. Согласно замечанию 6 последовательность (ρ_m) , $m \in \mathbb{Z}_0$, имеет конечное изменение. Поэтому она ограничена и, следовательно, является (L^2, L^2) -мультипликатором.

Определим на пространстве L^2 операторы ρ и ρ^{-1} со значениями в пространстве L^2 : $\rho[L^2] \subset L^2$, $\rho^{-1}[L^2] \subset L^2$.

Первый оператор ρ каждой функции $g \in L^2$ посредством равенств

$$\rho : \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \rho_m c_m(g; \Phi) = c_m(h; \Phi)$$

ставит в соответствие функцию $h \in L^2$: $\rho[g] = h$. В силу теоремы 2 $\rho[L^p] \subset L^p$, $p \in (2; \infty)$.

Второй оператор ρ^{-1} любую функцию $h \in L^2$ согласно равенствам

$$\rho^{-1} : \quad \forall m \in \mathbb{Z}_0 \quad \frac{1}{\rho_m} c_m(h; \Phi) = c_m(g; \Phi)$$

переводит в функцию $g \in L^2$: $\rho^{-1}[h] = g$. Очевидно, последовательность $(1/\rho_m) \in (\rho[L^p], L^p) \subset (L^p, L^p)$. Последнее включение вытекает из определения 2 (см. также [17, с. 308, пример 16.1.2(1)]).

Таким образом, для завершения доказательства леммы 3 надо установить справедливость для всех показателей $p \in (2; \infty)$ равенства $\rho[L^p] = L^p$ или с учетом включения $\rho[L^p] \subset L^p$ равенства $L^p \setminus \rho[L^p] = \emptyset$.

или, что равносильно,

$$\forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad a_l = \frac{1}{\rho_l} c_l(g; \Phi),$$

где функция $g \in L^p[0; 1]$.

В случае предположений Орлича и Ломницкого, когда матрица M определяет *регулярный* метод суммирования рядов, все $\rho_l = 1$ и доказательство частного случая леммы 2 закончено.

Случай *нерегулярного* консервативного метода M потребовал разработки п. 6. Согласно лемме 3 мультипликаторная последовательность $(1/\rho_l)$, $l \in \mathbb{Z}_0$, переводит последовательность $(c_l(g; \Phi))$, $l \in \mathbb{Z}_0$, коэффициентов Фурье по системе Φ функции $g \in L^p[0; 1]$ в последовательность коэффициентов Фурье по системе Φ функции f из пространства $L^p[0; 1]$:

$$\exists f \in L^p[0; 1] \quad \forall l \in \mathbb{Z}_0 \quad a_l = \frac{1}{\rho_l} c_l(g; \Phi) = c_l(f; \Phi).$$

Лемма 2 доказана.

Основной результат – теорема 1 – полностью доказан.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В монографиях, затрагивающих вопрос, сформулированный в начале настоящей работы, расположение материала таково. Сначала находятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ортогональный ряд был рядом Фурье [2, с. 251–259], [3, с. 165–171], [4, с. 221–241], [16, с. 231–235, 249–250]. Затем исследуются Фурье-мультипликаторы [2, с. 259–269], [3, с. 243–245], [4, с. 282–287], [16, с. 266–268]. В работах автора [10]–[12] и настоящей логическая зависимость обратная; доказательства опираются на утверждения о мультипликаторах.

8. Некоторые задачи.

8.1. Пространства L^p , $p \in (1; \infty)$, являются частным случаем пространств Орлича [4, с. 274]. Классические результаты Орлича и Ломницкого распространил на пространства Орлича рядов Фурье по тригонометрической системе Тыннов [22], [23].

ЗАДАЧА 1. Распространить результаты работ [10]–[12] и настоящей на пространства Орлича.

8.2. В монографии [2, с. 257] необходимые и достаточные условия для того, чтобы ортогональный ряд был рядом Фурье функции из определенного пространства, подразделяются на три типа. К первому типу относятся утверждения А) и Б), к третьему – утверждение В). Ко второму типу условий относится и более поздний критерий Руни для рядов по тригонометрической системе [24, с. 765], [5, с. 53]. Автор применял его в работах [11] и [12].

ЗАДАЧА 2. Получить утверждения, аналогичные критерию Руни, для рядов по системе функций Уолша–Пэли [8, с. 158], [25, с. 10] и для общих ортогональных рядов.

8.3. Из теоремы 10 работы Орлича [1, с. 22] вытекает импликация

$$1 < p_1 < p_2 < 2 \implies (L^{p_1}, L^{p_1}) \subsetneq (L^{p_2}, L^{p_2})$$

(см. также [26, с. 129, 140]).

ЗАДАЧА 3. Преодолеть недостаток теоремы 2: она не различает значений p между 1 и ∞ . Получить условия, существенно зависящие от показателя p .

В n -мерном гармоническом анализе эту задачу поставил И. М. Стейн [27, с. 130]. С использованием функционалов от гармонических отрезков типа Сидона в работе [28, с. 242–246] получены результаты о $(L^p(\mathbb{T}^n), L^p(\mathbb{T}^n))$ -мультипликаторах кратных тригонометрических рядов Фурье, учитывающие значение $p \in (1; \infty)$.

8.4. В исследованиях по дифференциальным уравнениям было введено пространство ВМО действительных функций ограниченной средней осцилляции (см. определение в [8, с. 195, 201] или [26, с. 200]). Несмотря на то, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty,$$

имеют место строгие включения следующих действительных пространств:

$$L^\infty \subsetneq \text{ВМО} \subsetneq \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p.$$

ЗАДАЧА 4. Дать ответ на вопрос “Когда ортогональный ряд является рядом Фурье функции из ВМО?”

Для действительных тригонометрических рядов и их $(C, 1)$ -средних ответ дан в работе автора и Г. Шмидера [29, с. 485].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Orlicz W. Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen // *Studia Math.* 1929. V. 1. P. 1–39.
- [2] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
- [3] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
- [4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [5] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.
- [6] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекция по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
- [7] Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин: Валгус, 1977.
- [8] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [9] Бруй И. Н. Линейные средние рядов Фурье и классы функций // Математические исследования. Сб. науч. работ преподавателей, аспирантов и студентов математического факультета Гродненского гос. ун-та. Т. 2. Гродно, 1995. С. 6–11.
- [10] Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$ и их матричные средние // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 2000. № 1. С. 46–49.
- [11] Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$ и их регулярные средние // *Весті Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* 1996. № 1. С. 24–30.
- [12] Бруй И. Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1; \infty)$, и их консервативные средние // *Матем. заметки.* 1997. Т. 62. № 5. С. 677–686.
- [13] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [14] Fekete M. Über faktorenfolgen, welche die “Klasse” einer Fourierschen Reihe unverändert lassen // *Acta litterarum ac scientiarum regiae universitatis hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio scientiarum mathematicarum.* 1922–1923. № 1. P. 148–166.
- [15] Riesz M. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires // *Acta Math.* 1926. V. 49. P. 465–497.

- [16] Butzer P. L., Nessel R. J. *Fourier Analysis and Approximation*. V. 1. Basel–Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1971.
- [17] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. 2. М.: Мир, 1985.
- [18] Buntinas M. Some new multipliers of Fourier series // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987. V. 101. № 3. P. 497–502.
- [19] Giang D. V., Móricz F. Multipliers of Fourier transforms and series on L^1 // *Archiv der Mathematik*. 1994. V. 62. № 3. P. 230–238.
- [20] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [21] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [22] Тыннов М. T -дополнительные пространства коэффициентов Фурье // *Уч. записки Тартуского гос. ун-та*. 1966. Т. 192. С. 65–81.
- [23] Тыннов М. Коэффициенты Фурье и множители суммируемости // *Уч. записки Тартуского гос. ун-та*. 1970. Т. 253. С. 194–201.
- [24] Rooney P. G. On the representation of sequence as Fourier coefficients // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. V. 11. № 5. P. 762–768.
- [25] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.
- [26] Torchinsky A. *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Orlando–San Diego–New York: Academic Press, 1986.
- [27] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [28] Нурсултанов Е. Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // *Матем. заметки*. 1998. Т. 63. № 2. С. 235–247.
- [29] Bruj I., Schmieder G. Real trigonometric series of class BMO and $(C, 1)$ -means // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1998. V. 64. P. 483–488.

Белорусский коммерческий университет управления,
Барановический филиал

Поступило
27.06.2000