Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Царьков, Неединственность решений некоторых дифференциальных уравнений и их связь с геометрической теорией приближения, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 2, 287–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm34>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:19:58

УДК 513.88, 517.9

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВЯЗЬ С ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ ПРИБЛИЖЕНИЯ

И. Г. Царьков

В работе изучаются структурные и аппроксимативные свойства множеств, допускающих полунепрерывную сверху адикличную выборку из оператора почти наилучшего приближения. На основе этих свойств исследуются вопросы неединственности нелинейной неоднородной задачи Дирихле.

Библиография: 10 названий.

Введение. Через (B) обозначим класс всех действительных банаховых пространств. Для банахова пространства X , множеств $M, N \subset X$, точки $x \in X$ определим следующие величины:

$$\varrho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|, \quad D(M, N) = \sup_{y \in N} \varrho(y, M), \quad d(x, M) = D(\{x\}, M).$$

Для произвольных числа $\varepsilon \geq 0$ и множества $M \subset X$ через P_M^ε (соответственно P_M) обозначим метрический ε -проектор (соответственно проектор) на множество M , т.е. такое отображение, что для всех $x \in X$

$$P_M^\varepsilon x = \{y \in M \mid \|y - x\| \leq \varrho(x, M) + \varepsilon\}, \\ P_M x = \{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $x \in X \in (B)$ называется *точкой аппроксимативной компактности* множества $M \subset X$, если из любой последовательности $\{y_n\} \subset M$ такой, что $\|y_n - x\| \rightarrow \varrho(x, M)$, $n \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества. Через $AC(M)$ обозначим множество всех точек аппроксимативной компактности множества M . При этом, если $AC(M) = X$, то множество M называется *аппроксимативно компактным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $A \subset X \in (B)$ называется *ацикличным*, если A непусто, компактно и группы гомологий H_q , $q \geq 1$, и приведенная группа $\tilde{H}_0$ тривиальны (см. [1]). Отображение $F: M \rightarrow 2^X$, $M \subset X$, называется *ацикличным*, если для всех $x \in M$ множество Fx адиклично.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00248.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $M \subset X \in (B)$ называется P -ациклическим относительно множества $N \subset X$, если для всех $x \in N$ множество $P_M x$ ациклично. При этом, если $N = X$, то множество M называется P -ациклическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $F: K \rightarrow 2^X$, $K \subset X \in (B)$, называется *полу непрерывным сверху*, если для любого открытого множества $G \subset X$ множество $\{x \in K \mid G \supset Fx \neq \emptyset\}$ открыто в K . Отображение $\Psi: K \rightarrow 2^X$ называется *полу непрерывной сверху ациклической выборкой* из отображения $\Phi: K \rightarrow 2^X$, $K \subset X \in (B)$, если Ψ полу непрерывно сверху и для любого $x \in K$ множество Ψx ациклично и содержится в Φx .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $M \subset X \in (B)$, $\varepsilon \geq 0$. Отображение $\Psi: N \rightarrow 2^M$ называется ε -выборкой относительно N из метрической проекции на множество M , если для всех $x \in N$ множество $\Psi x \subset P_M^\varepsilon x$.

Для $x \in X \in (B)$, $r \geq 0$ положим

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X \mid \|x - y\| \leq r\}, \\ \overset{\circ}{B}(x, r) &= \{y \in X \mid \|x - y\| < r\}, \\ S(x, r) &= \{y \in X \mid \|x - y\| = r\}, \quad S = S(0, 1). \end{aligned}$$

Через S^* обозначим единичную сферу пространства X^* , сопряженного с X .

Через (R) обозначим класс всех строго выпуклых пространств, т.е. таких $X \in (B)$, что для любых различных $x, y \in S$ верно неравенство $\|(x + y)/2\| < 1$.

Через (SS) обозначим класс всех сильно гладких пространств, т.е. таких $X \in (B)$, что для любой точки $x \in S$, любого функционала $x^* \in S^*$ такого, что $x^*(x) = 1$, и любых последовательностей $\{x_n\} \subset X$ и $\{r_n\} \subset \mathbb{R}_+$ таких, что $r_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и $x \notin B(x_n, r_n) \supset B(0, 1 - 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, верно включение

$$\{y \in X \mid x^*(y) < 1\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, r_n).$$

Настоящая работа посвящена изучению структурных и аппроксимативных свойств множеств $M \subset X \in (B)$, обладающих полу непрерывной сверху ациклической ε -выборкой (для любого $\varepsilon > 0$) из метрической проекции на M относительно некоторого всюду плотного выпуклого подмножества пространства X . В частности, будут доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное множество, обладающее для любого $\varepsilon > 0$ полу непрерывной сверху ациклической ε -выборкой из метрической проекции на себя относительно некоторого выпуклого множества $L \subset X$, всюду плотного в X . Тогда множество M является P -ациклическим.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, множество $M \subset X$ аппроксимативно компактно и невыпукло. Тогда для любого выпуклого множества $L \subset X$, всюду плотного в X , найдется точка $x \in L$ такая, что множество $P_M x$ не ациклично.

Опираясь на последнее утверждение и используя вариационный принцип, мы выведем неединственность ненулевых решений в классе $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ в задаче Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = \gamma u + F(x, u) + \varphi(x), \\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \end{cases}$$

для некоторой бесконечно дифференцируемой функции φ , носитель которой содержится внутри ограниченной замкнутой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (см. теорему 3). Отметим, что впервые такого сорта задачи начали изучать Красносельский, Рутницкий, Стеценко (см. [2]–[4]), Похожаев (см. [5], [6]).

Аппроксимативные и структурные свойства множеств неединственности. Нам понадобятся следующие утверждения.

ТЕОРЕМА А (теорема Вьеториса–Бегла [7]). Пусть бикомпакт X непрерывно отображается на бикомпакт Y так, что все прообразы ацикличны в размерностях $0, 1, \dots, N-1$. Тогда это отображение индуцирует отображение гомологических групп $H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$, которое для $i \leq N-1$ является изоморфизмом, а для $i = N$ эпиморфизмом.

Из этой теоремы немедленно вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА В. Пусть $X \in (B)$, $A \subset X$ – ациклический компакт, $\Phi: A \rightarrow 2^X$ – полунепрерывное сверху ациклическое отображение. Тогда множество $\{(x, y) \mid x \in A, y \in \Phi x\}$ ациклично в $X \times X$.

Для любых $x \in X \in (B)$ и $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, через $\text{cone}\{x, K\}$ обозначим множество $\bigcup_{y \in K} [x, y]$.

ЛЕММА 1. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$, $x \in AC(M)$, $K = \text{cone}\{x, P_M x\}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует полунепрерывная сверху ациклическая ε -выборка из метрической проекции на множество M относительно K . Тогда множество $P_M x$ ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, будем считать, что $x = 0$, $\varrho(x, M) = 1$. Так как $x \in AC(M)$, то $P_M x$ непусто и компактно. Поскольку множество K звездно относительно точки x , то оно стягиваемо по себе в точку x и, следовательно, ациклично (см. [8]). Вложим множество $P_M x$ в $X \times X$ как подмножество $A = \{(y, 0) \mid y \in P_M x\}$. Для того чтобы доказать, что множество A ациклично, достаточно проверить, что любой бесконечный цикл γ из A гомологичен нулю в A . Доказательство проведем от противного. Допустим, что существует бесконечный цикл γ , не гомологичный нулю в A . Тогда найдется окрестность $U \subset X \times X$ множества A , в которой цикл также не гомологичен нулю (см. [8, с. 43]). Введем на $Y = X \times X$ норму, для любой точки $(a, b) \in Y$ положив

$$\|(a, b)\|_Y = \max\{\|a\|_X, \|b\|_X\}.$$

Найдется $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$U_\varepsilon(A) = \{z \in Y \mid \varrho(z, A) < \varepsilon\} \subset U.$$

Отметим, что для всех $y \in U_\varepsilon(A)$ верны соотношения

$$\|y - (x, 0)\| \leq \varrho(y, A) + \sup_{z \in A} \|z - (x, 0)\| = \varrho(y, A) + 1 \leq \varepsilon + 1 < 2.$$

Пусть

$$V(\eta) = \{z \in X \mid \varrho(z, P_M x) < \eta\}, \quad \eta > 0,$$

тогда

$$V(\varepsilon) \times \overset{\circ}{B}(0, \varepsilon) \subset U_\varepsilon(A).$$

Так как $x \in AC(M)$, то найдется $\delta \in (0, \varepsilon/4)$ такое, что $P_M^\delta x \subset V(\varepsilon)$ (см. [9, лемма 2]). В силу предположений леммы найдется полунепрерывное сверху ацикличное отображение $\varphi: K \rightarrow 2^M$, являющееся δ -выборкой из метрической проекции относительно K . Построим полунепрерывное сверху ацикличное отображение $\Psi: K \rightarrow 2^X$, положив

$$\Psi(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{где } z \in \alpha P_M x, \quad \alpha \in \left[0, 1 - \frac{\varepsilon}{4}\right], \\ \frac{4(\|z\| - 1) + \varepsilon}{\varepsilon\|z\|}z + \frac{4(1 - \|z\|)}{\varepsilon}\varphi(z), & \text{где } z \in \alpha P_M x, \quad \alpha \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\Psi(z) = \{z\}$ для всех $z \in P_M x$. По теореме В множество

$$E_1 = \left\{ \left(z, \frac{\varepsilon}{4}(y - z) \right) \mid z \in K, y \in \Psi(z) \right\},$$

являющееся графиком отображения $(\varepsilon/4)(\Psi - \text{Id})$, будет ацикличным. Докажем, что множество

$$E_2 = \left\{ \left(y, \frac{\varepsilon}{4}(y - z) \right) \mid z \in K, y \in \Psi(z) \right\}$$

также ациклично. Это следует из того, что отображение $\zeta: E_2 \rightarrow E_1$, задаваемое формулой $\zeta((a, b)) = (a - 4b/\varepsilon, b)$, является гомеоморфизмом.

Кроме того, $E_2 \supset A$. Докажем, что $E_2 \subset U_\varepsilon(A)$. Действительно, во-первых, для всех $z \in K$

$$\varphi(z) \subset P_M^\delta z \subset P_M^\delta x \subset V(\varepsilon),$$

и во-вторых, для всех $z \in \alpha P_M x$, $\alpha \in (1 - \varepsilon/4, 1]$ и точки $t = z/\|z\| \in P_M x$ верны соотношения

$$\begin{aligned} d(t, \Psi(z)) &= d(0, \Psi(z) - t) = d\left(0, \frac{4(\|z\| - 1)}{\varepsilon\|z\|}z + \frac{4(1 - \|z\|)}{\varepsilon}\varphi(z)\right) \\ &= \frac{4(1 - \|z\|)}{\varepsilon}d\left(0, -\frac{z}{\|z\|} + \varphi(z)\right) = \frac{4(1 - \|z\|)}{\varepsilon}d(t, \varphi(z)) \leq d(t, \varphi(z)) \\ &\leq \|t - z\| + d(z, \varphi(z)) \leq \|t - z\| + d(z, P_M^\delta z) \leq \|t - z\| + \varrho(z, M) + \delta \\ &\leq \delta + 2\|t - z\| \leq \delta + \frac{2\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\Psi(K) \subset V(\varepsilon)$. Кроме того, для всех $z \in K$

$$d(z, \Psi(z)) \leq \|x - z\| + d(x, \Psi(z)) \leq \|x - z\| + d(x, V(\varepsilon)) < 3,$$

следовательно, $(\varepsilon/4)(\Psi(z) - z) \subset \overset{\circ}{B}(0, \varepsilon)$. Тем самым, мы получаем, что $E_2 \subset U_\varepsilon(A)$. Поэтому цикл $\gamma \subset A \subset E_2 \subset U_\varepsilon(A) \subset U$ гомологичен нулю в E_2 , и следовательно, в U , а это противоречит построению множества U . Таким образом, доказано, что $P_M x$ ациклично. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \in (B)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное множество, обладающее для любого $\varepsilon > 0$ полунепрерывной сверху ациклической ε -выборкой из метрической проекции на себя относительно некоторого выпуклого множества $L \subset X$, всюду плотного в X . Тогда множество M является P -ациклическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется локально конечное покрытие пространства X открытыми множествами $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, диаметр которых меньше ε . Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ существует такая функция $\varphi_\alpha \in C(X, \mathbb{R}_+)$, что $\varphi_\alpha > 0$ на U_α и $\varphi_\alpha \equiv 0$ вне U_α . Пусть $\psi_\alpha = \varphi_\alpha / \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Тогда $\psi_\alpha \equiv 0$ вне U_α , $\psi_\alpha > 0$ на U_α , и $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \psi_\alpha \equiv 1$ на X . Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ рассмотрим некоторую точку $t_\alpha \in L \cap U_\alpha$. Построим непрерывное отображение $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} t_\alpha \psi_\alpha(x)$ пространства X в множество L . Нетрудно видеть, что для всех точек $x \in X$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \|f(x) - x\| &= \left\| \sum_{\alpha: x \in U_\alpha} t_\alpha \psi_\alpha(x) - x \right\| \\ &= \left\| \sum_{\alpha: x \in U_\alpha} t_\alpha \psi_\alpha(x) - x \sum_{\alpha: x \in U_\alpha} \psi_\alpha(x) \right\| \leq \sum_{\alpha: x \in U_\alpha} \psi_\alpha(x) \|t_\alpha - x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(x) = P_M \circ f(x), \quad x \in X.$$

Тогда φ – полунепрерывное сверху ациклическое отображение. Докажем, что $\varphi(x) \subset P_M^\varepsilon x$ для всех $x \in X$. Действительно,

$$P_M \circ f(x) \subset B(f(x), \varrho(f(x), M)) \subset B(x, \varrho(f(x), M) + \|f(x) - x\|) \subset B(x, \varrho(f(x), M) + \varepsilon),$$

следовательно,

$$\varphi(x) = P_M \circ f(x) \subset P_M^\varepsilon x.$$

В силу леммы 1 для всех $x \in X$ множество $P_M x$ ациклично. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА С [10]. Пусть $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, $M \subset X$ – P -ациклическое множество с H -полунепрерывной сверху метрической проекцией. Тогда M выпукло.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, $M \subset X$ – аппроксимативно компактное P -ациклическое множество. Тогда M выпукло.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (B)$ таково, что $X \in (SS)$ или $X^* \in (R)$, множество $M \subset X$ аппроксимативно компактно и невыпукло. Тогда для любого выпуклого множества $L \subset X$, всюду плотного в X , найдется точка $x \in L$ такая, что множество $P_M x$ не ациклично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы для всех $x \in L$ множество $P_M x$ было бы ациклическим, то в силу теоремы 1 множество M было бы P -ациклическим. Тогда в силу следствия 1 множество M было бы выпукло, чего не может быть по условию. Следовательно, верно утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – гильбертово пространство, множество $M \subset X$ аппроксимативно компактно и невыпукло. Тогда для любого выпуклого множества $L \subset X$, всюду плотного в X , найдется точка $x \in L$ такая, что множество $P_M x$ не ациклично.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если пространство X из теоремы 2 (следствия 2) бесконечномерно, то таких точек $x \in L$, для которых множество $P_M x$ не ациклично, бесконечно много. Это следует из того, что существует выпуклое подмножество L' множества L , всюду плотное в нем (а следовательно, и в X) и не содержащее любое наперед заданное конечное множество точек из L .

Неединственность в некоторых нелинейных задачах Дирихле. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное тело, являющееся замыканием своей внутренней Ω_0 ,

$$L = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f \equiv 0 \text{ вне } \Omega_0\}.$$

Через H обозначим гильбертово пространство, являющееся замыканием L относительно евклидовой нормы

$$\|u\|_H^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_2}^2 + \|\sqrt{\gamma}u\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u, \nabla u) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \gamma u^2 dx,$$

где $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая неотрицательная ограниченная функция.

Пусть $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x, \cdot)$ не принимает нулевых значений за исключением, быть может, дискретного подмножества $\mathbb{R}$. Будем также предполагать, что для этой функции выполняются условия вложения, т.е. для $n = 2$ найдутся константы $A, B, p, b > 0$ и $a \in (0, 2)$ такие, что для всех $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|F(x, u)| \leq A + B|u|^b e^{p|u|^a},$$

и для $n \geq 3$ найдутся константы $A, B > 0$ и $\alpha \in (0, (n+2)/(n-2))$ такие, что для всех $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|F(x, u)| \leq A + B|u|^\alpha.$$

Везде далее будем считать, что $F(x, 0) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\Phi(x, u) = \int_0^u F(x, t) dt, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Для произвольного числа $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество

$$M_c = \left\{ f \in H \mid Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, f(x)) dx \leq c \right\}.$$

Сразу же отметим, что в силу теорем вложения множество M_c аппроксимативно компактно и $H = \bigcup_{k \in \mathbb{R}} M_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если для некоторого $x \in \Omega$ функция $F(x, \cdot)$ не является монотонно неубывающей по второй переменной, то множество M_c невыпукло для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия предложения следует, что для некоторого $x \in \Omega$ функция $\Phi(x, \cdot)$ не является выпуклой вниз по второй переменной и, следовательно, найдутся числа u_1 и u_2 такие, что

$$\Phi\left(x, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(\Phi(x, u_1) + \Phi(x, u_2)).$$

Без потери общности можно считать, что $\Phi(x, u_1) + \Phi(x, u_2) \neq 0$. В силу непрерывности функции F найдется в окрестности точки x замкнутая область $A \subset \Omega_0$ положительной меры $q = \mu(A)$ такая, что

$$\Phi\left(y, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) > \frac{1}{2}(\Phi(y, u_1) + \Phi(y, u_2)) + \delta$$

для всех $y \in A$ и некоторого $\delta \in (0, 1)$. Зафиксируем некоторую функцию $\varphi \in L$. Тогда существует константа $P > 1$, попарно непересекающиеся замкнутые множества $A_n^1, A_n^2 \subset A$ такие, что

$$\mu(A_n^1) = \mu(A_n^2) = \frac{1}{2}q - \frac{q}{4n}$$

(соответственно $B_n^1, B_n^2 \subset A$ такие, что

$$\mu(B_n^1) = \mu(B_n^2) = \frac{2P - \delta}{4P}q + \frac{q\delta}{8Pn},$$

и функции $\varphi_n^1, \varphi_n^2 \in L$ (соответственно $\psi_n^1, \psi_n^2 \in L$), $n \in \mathbb{N}$, обладающие следующими свойствами:

- 1) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $|\varphi_n^i|, |\psi_n^i| < P$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $\varphi_n^i = \psi_n^i = \varphi$ на $\mathbb{R}^n \setminus A$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$;
- 3) $\varphi_n^i = u_i$ (соответственно $\psi_n^i = u_i$) на множестве A_n^1 (соответственно B_n^1) для всех $i = 1, 2$ и всех $n \in \mathbb{N}$;
- 4) $\varphi_n^1 = u_2, \varphi_n^2 = u_1$ (соответственно $\psi_n^1 = u_2, \psi_n^2 = u_1$) на множестве A_n^2 (соответственно B_n^2) для всех $n \in \mathbb{N}$;
- 5) $\psi_n^i = 0$ вне $(1/n)$ -окрестности множества $B_n^1 \cup B_n^2 \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Из построения следует, что для $i = 1, 2$ верны соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(\varphi_n^i) \stackrel{\text{def}}{=} c_0 \neq c_0 - \frac{q\delta}{4P}(\Phi(u_1) + \Phi(u_2)) = c_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} Q(\psi_n^i).$$

Следовательно, для числа $c = (c_1 + c_0)/2$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и функции $\varphi_i \in [\varphi_n^i, \psi_n^i]$ такие, что $Q(\varphi_i) = c$, $i = 1, 2$, т.е. $\varphi_i \in M_c$, $i = 1, 2$. С другой стороны,

$$Q\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) - \frac{1}{2}(Q(\varphi_1) + Q(\varphi_2)) \geq \delta q - P\left(q - \frac{2P - \delta}{2P}q\right) = \frac{\delta q}{2} > 0,$$

т.е. $(\varphi_1 + \varphi_2)/2 \notin M_c$. Отсюда следует утверждение предложения.

Для фиксированных $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in H$ изучим экстремальную задачу

$$\|u - \varphi\|_H^2 \mapsto \inf_{u \in M_c}.$$

Будем рассматривать случай, когда $0 \notin \partial M_c$, $\varphi \notin M_c$. Из аппроксимативной компактности M_c следует, что существует решение этой задачи $u \in M_c$; при этом нетрудно видеть, что $u \in \partial M_c$ и, следовательно, $u \neq 0$. Поскольку функция u не может принимать дискретное число существенных ненулевых значений, то $F(x, u(x)) \neq 0$ на множестве положительной меры из Ω . Тогда градиент к поверхности ∂M_c в этой точке равен $x_u^* \in H^* = H$, где

$$(x_u^*, h) = \int_{\mathbb{R}^n} F(x, u(x)) h(x) dx,$$

и $x_u^* \neq 0$. Из последнего замечания следует, что

$$\partial M_c = \left\{ f \in H \mid \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, f(x)) dx = c \right\}$$

(кстати, это свойство выполняется и для случая $0 \in \partial M_c$, т.е. тогда, когда $c = 0$, поскольку поверхность ∂M_c содержит только одну особую точку $u = 0$). Из необходимого условия экстремума следует, что для всех $h \in H$ выполнено соотношение

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla h, \nabla(u - \varphi)) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u - \varphi) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} F(x, u) h(x) dx = 0.$$

При этом $\lambda = \lambda_u = 2\|u - \varphi\|/\|x_u^*\| > 0$. Тогда для обобщенных функций верно равенство

$$-2 \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(u - \varphi) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(u - \varphi) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^n} F(x, u) h(x) dx = 0,$$

т.е. в обобщенном смысле u удовлетворяет уравнению

$$-2\Delta(u - \varphi) + 2\gamma(u - \varphi) + \lambda F(x, u) = 0,$$

или для $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_u = \lambda/2 = \|u - \varphi\|/\|x_u^*\|$ — уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \bar{\lambda} F = \Delta \varphi - \gamma \varphi.$$

ЛЕММА 2. Пусть для некоторого $c \in \mathbb{R}$ множество M_c является невыпуклым. Тогда существует функция $\varphi \in L$ такая, что найдутся два различных ненулевых обобщенных решения $f_1, f_2 \in H$, удовлетворяющие для некоторого $\mu > 0$ уравнению $\Delta u - \gamma u - \mu F(x, u) = \Delta \varphi - \gamma \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности, можно считать, что $c \neq 0$ (это следует из непрерывности $\Phi(x, u)$). Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что не существует двух различных ненулевых решений $f_1, f_2 \in H$, удовлетворяющих для некоторого $\mu > 0$ уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \mu F(x, u) = \Delta \varphi - \gamma \varphi.$$

Отметим, что из условия $c \neq 0$ следует, что $0 \notin \partial M_c$. Случаи 1) $c > 0$ и 2) $c < 0$ разбираются аналогично (причем случай $c < 0$ имеет смысл разбирать только, если для всех $k \geq 0$ множество M_k выпукло). Рассмотрим для определенности случай $c > 0$. В силу следствия 2 найдется функция $\varphi \in L$, для которой множество A ближайших

точек в множестве M_c не ациклично. В силу замечания 1 будем считать, что $\varphi \neq 0$. Тогда для любой точки $f \in A$ и

$$\theta(f) = \bar{\lambda}_f = \frac{1}{2}\lambda = \frac{\|f - \varphi\|}{\|x_f^*\|} = \frac{\varrho(\varphi, M_c)}{\|x_f^*\|}$$

верно равенство

$$\Delta f - \gamma f - \bar{\lambda}_f F(x, f) = \Delta \varphi - \gamma \varphi.$$

Поскольку множество $A \subset \partial M_c$, то оно не содержит нуля, поэтому в силу предположения от противного непрерывное отображение $\theta: A \rightarrow \mathbb{R}$ инъективно на компакте A , т.е. θ – гомеоморфизм между A и $\theta(A) \subset \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\theta(A)$ – неациклическое подмножество $\mathbb{R}$ (см. [8]). Отсюда следует, что $\theta(A)$ несвязно и, следовательно, существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \theta(A)$ такие, что $\lambda_1 < \lambda_2$, и $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \theta(A) = \emptyset$. Разобьем множество A на два непересекающихся компактных подмножества

$$A_1 = \{f \in A \mid \bar{\lambda}_f \leq \lambda_1\}, \quad A_2 = \{f \in A \mid \bar{\lambda}_f \geq \lambda_2\}.$$

Из условий леммы следует, что $H = \bigcup_{k \geq c} M_k$. Обозначим через A^k множество всех ближайших точек в множестве M_k для элемента φ ; тогда $A^c = A$, и найдется число $K \in \mathbb{R}$, $K > c$, такое, что $\varphi \in \partial M_K$ и, следовательно, $A^K = \{\varphi\}$.

Докажем, что для всех $k_0 \in [c, K]$ имеет место сходимость $d(A^{k_0}, A^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow k_0$. Действительно, если бы это было не так, то существовали бы $\varepsilon > 0$ и последовательности $\{x_m\}$ и $\{k_m\}$ такие, что $x_m \in A^{k_m}$ и $x_m \notin O_\varepsilon(A^{k_0})$, $m \in \mathbb{N}$, и $k_m \rightarrow k_0$, $m \rightarrow \infty$. Докажем, что

$$\|\varphi - x_m\| = \varrho(\varphi, M_{k_m}) \rightarrow \varrho(\varphi, M_{k_0}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Действительно, пусть $y_0 \in H$ – произвольная предельная точка $\{x_m\}$ в слабой топологии. Из теоремы вложения следует, что функционал

$$Q(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, u(x)) dx, \quad u \in H,$$

слабо непрерывен и, следовательно, $y_0 \in \partial M_{k_0}$. Рассмотрим такую произвольную подпоследовательность $\{x_{m'}\}$ (соответственно $\{x_{m''}\}$) последовательности $\{x_m\}$, что $k_{m'} > k_0$ (соответственно $k_{m''} < k_0$) для всех $m' \in \mathbb{N}$ (соответственно $m'' \in \mathbb{N}$). Тогда $\|\varphi - x_{m'}\| = \varrho(\varphi, M_{k_{m'}}) \leq \varrho(\varphi, M_{k_0})$, следовательно, для предельной точки $y'_0 \in \partial M_{k_0}$ последовательности $\{x_{m'}\}$ верны соотношения

$$\varrho(\varphi, M_{k_0}) \leq \|\varphi - y'_0\| \leq \liminf_{m' \rightarrow \infty} \|\varphi - x_{m'}\| \leq \limsup_{m' \rightarrow \infty} \|\varphi - x_{m'}\| \leq \varrho(\varphi, M_{k_0}),$$

т.е. имеет место равенство

$$\lim_{m' \rightarrow \infty} \varrho(\varphi, M_{k_{m'}}) = \varrho(\varphi, M_{k_0}).$$

Поскольку для любых p, t , $p < t < k_0$, верны включения $M_p \subset M_t \subset M_{k_0}$ и в окрестности любой точки ∂M_{k_0} есть точки $u \in M_{k_0}$ такие, что $Q(u) < k_0$, то для предельной точки $y_0'' \in \partial M_{k_0}$ последовательности $\{x_{m''}\}$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \varrho(\varphi, M_{k_0}) &\leq \|\varphi - y_0''\| \leq \liminf_{m'' \rightarrow \infty} \|\varphi - x_{m''}\| = \liminf_{m'' \rightarrow \infty} \varrho(\varphi, M_{k_{m''}}) \\ &\leq \limsup_{m'' \rightarrow \infty} \varrho(\varphi, M_{k_{m''}}) \leq \varrho(\varphi, M_{k_0}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{m'' \rightarrow \infty} \varrho(\varphi, M_{k_{m''}}) = \varrho(\varphi, M_{k_0}) = \|\varphi - y_0''\|.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\|\varphi - x_m\| = \varrho(\varphi, M_{k_m}) \rightarrow \varrho(\varphi, M_{k_0}) = \|\varphi - y_0\|, \quad m \rightarrow \infty.$$

Учитывая это и то, что y_0 – предельная точка последовательности $\{x_m\}$ в слабой топологии, получим, что y_0 является предельной точкой этой последовательности в сильной топологии. Поэтому найдется $l \in \mathbb{N}$ такое, что $x_l \in O_\varepsilon(A_{k_0})$, чего не может быть. Следовательно, для всех $k_0 \in [c, K]$

$$d(A^{k_0}, A^k) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow k_0.$$

Положим $\varepsilon = (\lambda_2 - \lambda_1)/4 > 0$. Найдется $\delta \in (0, \lambda_2 - \lambda_1)$ такое, что для любой точки $f \in O_\delta(A_1)$ верно неравенство $\bar{\lambda}_f < \lambda_1 + \varepsilon/2$. Существует $k_0 \in (c, K)$ такое, что для всех $k \in (c, k_0)$ верно включение $A \subset O_\delta(A^c)$. Докажем методом от противного, что для всех достаточно близких к c чисел k верно $A^k \cap O_\delta(A_1) = \emptyset$. Допустим, что существует точка $a \in A^k \cap O_\delta(A_1)$. Тогда для полного приращения функционала Q в точке c верно равенство

$$-\Delta Q = c - k = x_a^* \left(-t \frac{x_a^*}{\|x_a^*\|} \right) + o(t),$$

где $t > 0$ выбирается так, чтобы $a - tx_a^*/\|x_a^*\| \in \partial M_c$. Поэтому $\Delta Q/\|x_a^*\| = t + o(t)$, при этом можно считать, что $|o(t)| < \varepsilon \Delta Q/(4\varrho(\varphi, M_c))$ (поскольку $o(t) = o(\Delta Q)$). Учитывая, что $\|\varphi - (a - tx_a^*/\|x_a^*\|)\| \geq \varrho(\varphi, M_c)$, получим, что

$$\begin{aligned} \|\varphi - a\| &\geq \varrho(\varphi, M_c) - \left\| t \frac{x_a^*}{\|x_a^*\|} \right\| \geq \varrho(\varphi, M_c) - t = \varrho(\varphi, M_c) - \frac{\Delta Q}{\|x_a^*\|} + o(t) \\ &\geq \varrho(\varphi, M_c) \left(1 - \frac{\Delta Q}{\varrho^2(\varphi, M_c)} \left(\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{4} \right) - \frac{\varepsilon}{4} \frac{\Delta Q}{\varrho^2(\varphi, M_c)} \right) \\ &= \varrho(\varphi, M_c) \left(1 - \left(\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\Delta Q}{\varrho^2(\varphi, M_c)} \right). \end{aligned}$$

Аналогично, для любого элемента $f \in A_2$ верна формула

$$\Delta Q(f) = x_f^* \left(t \frac{x_f^*}{\|x_f^*\|} \right) + o(t) = \|x_f^*\|t + o(t).$$

Поскольку векторы x_f^* и $(\varphi - f)$ сонаправлены, то

$$\left\| \varphi - \left(f + t \frac{x_f^*}{\|x_f^*\|} \right) \right\| = \|\varphi - f\| - t = \varrho(\varphi, M_c) - t = \varrho(\varphi, M_c) - \frac{\Delta Q}{\|x_f^*\|} + o(t).$$

Можно считать, что

$$|o(t)| = o(\Delta Q) < \frac{\varepsilon}{4} \frac{\Delta Q}{\varrho(\varphi, M_c)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \varphi - \left(f + t \frac{x_f^*}{\|x_f^*\|} \right) \right\| &\leq \varrho(\varphi, M_c) \left(1 - \frac{(\lambda_2 + \varepsilon/4)\Delta Q}{\varrho^2(\varphi, M_c)} \right) \\ &< \varrho(\varphi, M_c) \left(1 - \left(\lambda_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\Delta Q}{\varrho^2(\varphi, M_c)} \right) \leq \|\varphi - a\|, \end{aligned}$$

т.е. точка $a \in M_k$ не является ближайшей для φ . Отсюда следует, что существует некоторое $k_1 > c$ такое, что $A^k \subset O_\delta(A_2)$ для всех $k \in (c, k_1)$. И следовательно, $D(A_2, A^k) \rightarrow 0$ при $k \downarrow c$. Поэтому найдется $\tilde{k} > c$ такое, что для всех $k \in (c, \tilde{k})$ и произвольной точки $f \in A^k$ верно неравенство

$$\bar{\lambda}_f = \frac{\|f - \varphi\|}{\|x_f^*\|} > \lambda_1.$$

Отображение $\Psi: [c, K] \rightarrow 2^H$, задаваемое формулой $\Psi(k) = A^k$, полунепрерывно сверху. Поэтому существует

$$l = \max\{k \in [c, K] \mid \exists f \in \Psi(k): \bar{\lambda}_f \geq \lambda_1\}.$$

Нетрудно видеть, что $l \neq K$. При этом для всех $f \in \Psi(l)$ выполнено $\bar{\lambda}_f \neq \lambda_1$ (иначе бы существовали два различных решения уравнения $\Delta u - \gamma u - \lambda_1 F(u) = \Delta \varphi - \gamma \varphi$). Тем самым, существует $f \in \Psi(l)$ такое, что $\bar{\lambda}_f > \lambda_1$. Докажем, что найдется точка $a \in A^l$ такая, что $\bar{\lambda}_a < \lambda_1$. Действительно, если бы для всех $f \in A^l$ было верно неравенство $\bar{\lambda}_f > \lambda_1$, то в силу полунепрерывности сверху отображения Ψ множество

$$\{k \in [c, K] \mid \forall f \in \Psi(k), \bar{\lambda}_f > \lambda_1\}$$

было бы открыто на отрезке $[c, K]$, следовательно, существовало бы число $l_1 \in (l, K)$, для которого выполнялось бы следующее свойство: для всех $f \in \Psi(l_1)$ имеет место оценка $\bar{\lambda}_f > \lambda_1$, а это противоречит определению числа l . Таким образом, найдется элемент $a \in A^l$ такой, что $\bar{\lambda}_a < \lambda_1$. Отметим, что при рассмотрении случая 2) (т.е. когда $c < 0$) множество M_k при $k \geq 0$ выпукло и, следовательно, множество ближайших точек для φ однотоечно. Поэтому число

$$l = \max\{k \in [c, K] \mid \exists f \in \Psi(k): \bar{\lambda}_f \geq \lambda_1\}$$

не может быть больше или равно нулю, так как в этом случае, для f таких, что $\{f\} = \Psi(l)$, верно неравенство $\bar{\lambda}_f > \lambda_1$. Отсюда множество

$$\{k \in [c, K] \mid \forall f \in \Psi(k), \bar{\lambda}_f > \lambda_1\}$$

открыто на отрезке $[c, K]$, следовательно, l не равно

$$\max\{k \in [c, K] \mid \exists f \in \Psi(k): \bar{\lambda}_f \geq \lambda_1\},$$

противоречие. Таким образом, $l < 0$, и далее доказательство случая 2) не отличается от случая 1). Продолжим доказательство случая 1). Так же, как и ранее, можно доказать, что для множества

$$A_2^l = \{f \in A^l \mid \bar{\lambda}_f > \lambda_1\}$$

верно соотношение $D(A_2^l, A^q) \rightarrow 0$, $q \downarrow l$. Отсюда следует, что найдется число $q \in (l, K]$ такое, что для всех $f \in A^q$ выполнено $\bar{\lambda}_f > \lambda_1$, что опять же противоречит определению числа l . Полученное противоречие доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная ограниченная измеримая функция; непрерывная функция $F = F(x, u): \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям вложения, для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $F(x, \cdot)$ не принимает нулевых значений за исключением, быть может, дискретного подмножества $\mathbb{R}$, и не является монотонно неубывающей по переменной $u \in \mathbb{R}$ для некоторого $x \in \Omega$; кроме того, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $F(x, 0) = 0$. Тогда существуют бесконечно дифференцируемая функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, финитная на Ω , и некоторое число $\mu > 0$, для которых существуют, по крайней мере, два различных ненулевых решения $g_1, g_2 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \mu F(x, u) = g(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция F не является монотонной для некоторого $x \in \Omega$ по переменной $u \in \mathbb{R}$, то в силу предложения 1 для некоторого $c \in \mathbb{R}$ множество M_c невыпукло. По лемме 2 найдутся два различных ненулевых решения $f_1, f_2 \in H$, удовлетворяющие для некоторого $\varphi \in L$ и $\mu > 0$ уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \mu F(x, u) = \Delta \varphi - \gamma \varphi.$$

Положив

$$g_i = f_i|_{\Omega}, \quad i = 1, 2, \quad \text{и} \quad g = \Delta \varphi - \gamma \varphi,$$

получим утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дополнительно к условиям теоремы 3 функция F однородна по переменной u с показателем $\alpha \neq 1$. Тогда для любой ограниченной неотрицательной измеримой функции $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ существует бесконечно дифференцируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, финитная на Ω , для которой найдутся по крайней мере два различных ненулевых решения $f_1, f_2 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u - \gamma u - F(x, u) = f(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 существуют бесконечно дифференцируемая функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, финитная на Ω , и некоторое число $\mu > 0$, для которых существуют по крайней мере два различных ненулевых решения $g_1, g_2 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \mu F(x, u) = g(x).$$

Пусть $p = \mu^{1/(\alpha-1)}$, тогда, положив

$$f = pg, \quad f_i = pg_i, \quad i = 1, 2,$$

получим $p^{-1}\Delta f_i(x) - p^{-1}\gamma f_i(x) - \mu p^{-\alpha}F(x, f_i(x)) = p^{-1}f(x)$ и, следовательно,

$$\Delta f_i(x) - \gamma f_i(x) - F(x, f_i(x)) = f(x), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда вытекает утверждение следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\partial\Omega$ представляет собой подмножество нулей некоторого алгебраического многочлена (например, Ω – шар в $\mathbb{R}^n$), то в теореме 3 (соответственно в следствии 3) в качестве g (соответственно f) можно взять некий многочлен, зануляющийся на границе области Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 3 (и в следствии 3) можно рассмотреть и неограниченную функцию γ , имеющую особенности только на $\partial\Omega$ (т.е. ограниченную на любом компакте из Ω_0).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если граница области Ω липшицева и функции γ, F гёльдеровские, то решения g_1, g_2 соответствующего уравнения из теоремы 3 (f_1, f_2 из следствия 3) принадлежат классу $C^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и в [5], можно доказать, что почти всюду имеет место равенство

$$g_i(x) = \int_{\Omega} G(x, y)(\gamma u(y) + \lambda F(y, u(y)) + g(y)) dy$$

$$\left(f_i(x) = \int_{\Omega} G(x, y)(\gamma u(y) + \lambda F(y, u(y)) + f(y)) dy \right), \quad i = 1, 2,$$

где $G(x, y)$ – функция Грина, соответствующая нулевым граничным условиям. Отсюда, из теорем вложения и свойства интегралов типа потенциала вытекает утверждение замечания.

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей, $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая функция. Пусть $F_1: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что для каждого $x \in \Omega$ функция $F_1(x, \cdot)$ не принимает нулевых значений, за исключением, быть может, дискретного подмножества $\mathbb{R}$. Будем также предполагать, что для этой функции выполняются условия вложения, т.е. для $n = 2$ найдутся константы $A, B, p, b > 0$ и $a \in (0, 2)$ такие, что

$$\forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad |F_1(x, u)| \leq A + B|u|^b e^{p|u|^a},$$

и для $n \geq 3$ найдутся константы $A, B > 0$ и $\alpha \in (0, (n+2)/(n-2))$ такие, что

$$\forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad |F_1(x, u)| \leq A + B|u|^\alpha.$$

Положим

$$\Phi_1(x, u) = \int_0^u F_1(x, t) dt, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Пусть

$$L_\tau = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f|_{\partial\Omega} = \tau|_{\partial\Omega}\}.$$

Через H_τ обозначим гильбертову плоскость, являющуюся замыканием L_τ относительно евклидовой нормы

$$\|u\|_{H_\tau}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\gamma}u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (\nabla u, \nabla u) dx + \int_\Omega \gamma u^2 dx,$$

где $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная измеримая ограниченная функция. Для произвольного числа $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим множество

$$M_c^\tau = \left\{ f \in H_\tau \mid Q^\tau(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \Phi_1(x, f(x)) dx \leq c \right\}.$$

Рассматривая для фиксированных $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in H_\tau$ экстремальную задачу

$$\|u - \varphi\|_{H_\tau}^2 \mapsto \inf_{u \in M_c^\tau},$$

аналогично теореме 3 можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей, $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная ограниченная измеримая функция, $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – бесконечно дифференцируемая функция; непрерывная функция $F_1: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям вложения, для каждого $x \in \Omega$ функция $F_1(x, \cdot)$ не принимает нулевых значений за исключением, быть может, дискретного подмножества $\mathbb{R}$, и не является монотонно неубывающей по переменной $u \in \mathbb{R}$ для некоторого $x \in \Omega$. Тогда существуют бесконечно дифференцируемая функция $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g|_{\partial\Omega} = \tau|_{\partial\Omega}$, и некоторое число $\mu > 0$, для которых найдутся различные решения $g_i \in W_2^1(\Omega)$ такие, что $g_i|_{\partial\Omega} = \tau|_{\partial\Omega}$, $i = 1, 2$, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u - \gamma u - \mu F_1(x, u) = g(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если дополнительно к условиям теоремы 4 функции γ и F_1 гёльдеровские, то решения g_i , $i = 1, 2$, принадлежат классу $C^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М.: Физматгиз, 1958.
- [2] Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: 1958.
- [3] Levinson N. Positive eigenfunctions for $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1962. V. 11. № 3. P. 258–272.
- [4] Красносельский М. А., Степенко В. Я. О некоторых нелинейных задачах, имеющих много решений // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4. № 1. С. 120–137.
- [5] Похожаев С. И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С. 36–39.
- [6] Похожаев С. И. О одном подходе к нелинейным уравнениям // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 6. С. 1327–1331.
- [7] Begle T. G. The Vietoris mapping theorem for bicomact spaces // Ann. of Math. 1950. V. 51. № 3. P. 534–543.
- [8] Борсук К. Теория ретрактов. М.: Мир, 1971.
- [9] Царьков И. Г. О связности некоторых классов множеств в банаховых пространствах // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 2. С. 174–196.
- [10] Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 122–131.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.04.2002