Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Лаптев, Возрастающие монотонные операторы в банаховом пространстве, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 214–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:57:15

УДК 517.9

ВОЗРАСТАЮЩИЕ МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Г. И. Лаптев

Оператор A , действующий из сепарабельного рефлексивного банахова пространства X в его сопряженное X' , назван возрастающим, если $\|Au\| \rightarrow \infty$, когда $\|u\| \rightarrow \infty$. Найдены необходимые и достаточные условия возрастания операторов суперпозиции. Анализируется связь свойств возрастания и коэрцитивности для дифференциальных операторов в частных производных монотонного типа. Указываются дополнительные условия, при которых уравнение $Au = f$ с возрастающим оператором A допускает решение.

Библиография: 8 названий.

Введение. Основная теорема о монотонных операторах в банаховых пространствах утверждает следующее [1, с. 95], [2, гл. 2, § 2, теорема 2.1]. Пусть X – вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство с сопряженным X' , и пусть оператор $A: X \rightarrow X'$ является радиально непрерывным, монотонным и коэрцитивным. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X'$. Предпринимались многочисленные попытки ослабить хотя бы одно из приведенных условий на оператор A . Монотонность удалось заменить на так называемое (M) -свойство, которое, видимо, можно считать предельным в рамках теории монотонности. Коэрцитивность часто заменяют на специальное условие роста оператора: $\|Au\| \rightarrow \infty$, если $\|u\| \rightarrow \infty$. Сделано это для нечетных операторов. В результате теория разделилась на два параллельных направления. В первом изучаются уравнения с коэрцитивными операторами, обладающими (M) -свойством. При этом преимущественно применяется метод Галёркина. Во втором направлении решаются уравнения с нечетными операторами, удовлетворяющими приведенному выше условию роста. При этом привлекается теория степени отображения. Полученные в обоих направлениях результаты в деталях изложены в обзорных работах [1]–[5]. В предлагаемой статье изучается записанное выше условие роста оператора в приложении как к конкретным операторам суперпозиции и к дифференциальным операторам, так и к абстрактным монотонным операторам.

В дальнейшем предполагается, что пространства X и X' сопряжены относительно двойственности (f, u) , где $f \in X'$, $u \in X$. Норма каждого пространства будет сопровождаться его индексом. Например, $\|u\|_X$ обозначает норму в пространстве X . Оператор $A: X \rightarrow X'$ называется *монотонным*, если для всех $u, v \in X$ выполняется соотношение $(Au - Av, u - v) \geq 0$. Чаще всего свойство монотонности дополняется условием

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00884 и № 99-01-00045.

коэрцитивности, которое имеет вид $(Au, u) \geq \varphi(\|u\|_X)\|u\|_X$, где функция $\varphi(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Заметим, что из коэрцитивности вытекает следующее свойство:

$$\|Au\|_{X'} \rightarrow \infty \quad (\|u\|_X \rightarrow \infty). \quad (0.1)$$

Соотношениям (0.1) присвоим специальный термин, взятый из теории возрастающих функционалов [6, гл. VI, § 1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Оператор $A: X \rightarrow X'$ называется *возрастающим*, если для него выполняются соотношения (0.1).

Раскроем определение более детально. Введем функцию $m(r) = \inf \|Au\|_{X'}$, где функции $u \in X$ пробегает множество $\|u\|_X = r$. Согласно определению 0.1 оператор A называется возрастающим, если $m(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Напомним еще, что оператор $A: X \rightarrow X'$ называется *положительно однородным порядка $k > 0$* , если $A(tk) = t^k Au$ для любых $u \in X, t > 0$. Такие операторы тесно связаны с возрастающими операторами. Действительно, пусть положительно однородный порядка $k > 0$ оператор $A: X \rightarrow X'$ удовлетворяет условию $\inf \|Au_0\|_{X'} = m_0 > 0$, где точная нижняя грань берется по всем элементам $u_0 \in X$, для которых $\|u_0\|_X = 1$. Произвольный элемент $u \in X$ представим в виде $u = \|u\|_X u_0$, где $\|u_0\|_X = 1$. Тогда

$$\|Au\|_{X'} = \|A(\|u\|_X u_0)\|_{X'} = \|u\|_X^k \|Au_0\|_{X'} \geq \|u\|_X^k m_0,$$

откуда очевидно, что оператор $A: X \rightarrow X'$ является возрастающим.

1. Возрастающие операторы суперпозиции. Операторы суперпозиции представляют редкий пример нелинейных операторов, для которых многие утверждения могут быть высказаны в терминах необходимых и достаточных условий. Здесь будут указаны необходимые и достаточные условия того, что оператор суперпозиции является возрастающим в пространстве суммируемых функций. Опишем рассматриваемые далее операторы. Пусть задано конечномерное пространство $\mathbb{R}^m$ и отображение $a(\xi): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, зависящее от параметра $\xi \in \mathbb{R}^m$. Функция $a(\xi)$ предполагается непрерывной. Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$. Введем пространство $(L^p(\Omega))^m$ вектор-функций $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ таких, что $\varphi_k(x) \in L^p(\Omega)$, $k = 1, \dots, m$. Оператор суперпозиции определяется как композиция $A\varphi \equiv a[\varphi(x)]$, которая задает вектор-функцию, определенную для почти всех $x \in \Omega$. Хорошо известно [6, гл. 1, § 2, теорема 2.3], что оператор $A: (L^p(\Omega))^m \rightarrow (L^{p'}(\Omega))^m$, где $p + p' = pp'$, $p > 1$, непрерывен и ограничен тогда и только тогда, когда

$$|a(\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + c_2 \quad (c_1 > 0). \quad (1.1)$$

Следующее утверждение дает аналогичный критерий возрастания оператора A .

ТЕОРЕМА 1.1. Оператор суперпозиции $A: (L^p(\Omega))^m \rightarrow (L^{p'}(\Omega))^m$ является непрерывным, ограниченным и возрастающим тогда и только тогда, когда функция $a(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям роста:

$$c_3 |\xi|^{p-1} - c_4 \leq |a(\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + c_2 \quad (c_1, c_3 > 0). \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Правая часть в (1.2) совпадает с (1.1) и потому является необходимым и достаточным условием непрерывности и ограниченности рассматриваемого оператора. Поэтому речь фактически идет о левой части неравенств (1.2). Сначала убедимся в достаточности выписанных условий для возрастания оператора a . Обозначим $X = (L^p(\Omega))^m$ и $X' = (L^{p'}(\Omega))^m$. Пусть задана последовательность функций $\varphi_N(x) \in X$, удовлетворяющих условию $\|\varphi_N\|_X \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$. Оценим норму функций $A\varphi_N$, используя левую часть соотношений (1.2):

$$\|A\varphi_N\|_{X'}^{p'} = \int_{\Omega} |a(\varphi_N(x))|^{p'} dx \geq \int_{\Omega} |c_3|\varphi_N(x)|^{p-1} - c_4|^{p'} dx.$$

Для любых чисел $z \geq 0$ и $q > 1$ очевидно неравенство

$$|z - c_4|^q \geq c_5 z^q - c_6 \quad (c_5 > 0),$$

и потому оценку для нормы функции $A\varphi_N$ можно продолжить следующим образом:

$$\|A\varphi_N\|_{X'}^{p'} \geq \int_{\Omega} (c_7|\varphi_N(x)|^p - c_6) dx = c_7\|\varphi_N\|_X^p - c_8.$$

Отсюда вытекает, что $\|A\varphi_N\|_{X'} \rightarrow \infty$, если $\|\varphi_N\|_X \rightarrow \infty$, т.е. оператор A при условиях (1.2) является возрастающим, что и утверждалось.

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Допустим, что оператор $A: X \rightarrow X'$ является возрастающим, однако левое неравенство в (1.2) не выполняется. Это значит, что найдется последовательность $\xi_N \in \mathbb{R}^m$ с такими свойствами:

$$|\xi_N| \rightarrow \infty, \quad |a(\xi_N)||\xi_N|^{-(p-1)} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (1.3)$$

Построим последовательность функций $\varphi_N \in X$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения: $\|\varphi_N\|_X \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, однако $\|A\varphi_N\|_{X'} \leq C$. Очевидно, это приводит к противоречию с условием возрастания оператора $A: X \rightarrow X'$.

Ради некоторого упрощения записи предположим, что $a(0) = 0$ и что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ содержит нуль пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда Ω содержит также шары $\omega_N = \{x \mid |x| < \rho_N\}$ при достаточно малых $\rho_N \rightarrow 0$. Последовательность точек $\xi_N \in \mathbb{R}^m$ из условия (1.3) считаем далее фиксированной. По ней строим последовательность функций, полагая $\varphi_N(x) \equiv \xi_N$, если $x \in \omega_N$, и считая $\varphi_N(x) \equiv 0$ вне ω_N . Функции $A\varphi_N$ задаются тогда равенствами $a(\varphi_N(x)) \equiv a(\xi_N)$, если $x \in \omega_N$, и $a(\varphi_N(x)) \equiv 0$ вне ω_N . Области ω_N укажем позднее. А пока вычислим нормы построенных функций:

$$\|\varphi_N\|_X^p = \int_{\Omega} |\varphi_N(x)|^p dx = \int_{\omega_N} |\xi_N|^p dx = |\xi_N|^p |\omega_N|; \quad (1.4)$$

$$\|A\varphi_N\|_{X'}^{p'} = \int_{\omega_N} |a(\xi_N)|^{p'} dx = |a(\xi_N)|^{p'} |\omega_N|. \quad (1.5)$$

Рассмотрим вначале основной вариант, считая, что $|a(\xi_N)| \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Потребуем выполнения равенств $\|A\varphi_N\|_{X'} \equiv 1$ для всех N . По формулам (1.5) однозначно определяются объемы шаров ω_N :

$$|\omega_N| = |a(\xi_N)|^{-p'} \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

Отсюда очевидно, что $|\omega_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, так что шары ω_N неограниченно уменьшаются и при достаточно больших номерах $N \geq N_0$ войдут в заданную область Ω . В результате построенные ранее функции $\varphi_N(x)$ для $N \geq N_0$ станут элементами пространства X , и при этом для них выполняются соотношения $\|A\varphi_N\|_{X'} \equiv 1$ ($N \geq N_0$). Подставляя формулы (1.6) в (1.4), находим, что для $N \geq N_0$

$$\|\varphi_N\|_X^p = |\xi_N|^p |\omega_N| = |\xi_N|^p |a(\xi_N)|^{-p'} = (|a(\xi_N)| |\xi_N|^{-(p-1)})^{-p'}.$$

Вспоминая условие (1.3), приходим к выводу, что $\|\varphi_N\|_X \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Одновременно $\|A\varphi_N\|_{X'} \equiv 1$ для $N \geq N_0$. А это противоречит условию возрастания оператора $A: X \rightarrow X'$. Аналогично рассматривается вариант, когда только некоторая подпоследовательность $|a(\xi_{N_k})| \rightarrow \infty$ при $N_k \rightarrow \infty$. Остается изучить последний случай, который предполагает, что числа $|a(\xi_N)|$ равномерно ограничены. Тогда можно фиксировать некоторый шар $\omega_0 \subset \Omega$ и считать $\omega_N = \omega_0$ для всех $N = 1, 2, \dots$. Из равенств (1.4) вытекает, что $\|\varphi_N\|_X \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. В то же время по формулам (1.5) $\|A\varphi_N\|_{X'} \leq C$ с единой постоянной C . Это противоречит условию возрастания оператора $A: X \rightarrow X'$. Итак, предположив, что неравенства (1.2) для возрастающего оператора A не выполняются, мы пришли к противоречию, которое и доказывает справедливость теоремы.

Приведем пример монотонного возрастающего, но не коэрцитивного оператора суперпозиции.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $X = (L^2(\Omega))^2$, т.е. множество вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, где $y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$. Очевидно, что X – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(y, z) = \int_{\Omega} y_1(x) z_1(x) dx + \int_{\Omega} y_2(x) z_2(x) dx \quad (y, z \in X).$$

В частности, $\|y\|_X^2 = \|y_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|y_2\|_{L^2(\Omega)}^2$ и $X' = X$.

Для $y = (y_1, y_2)$ полагаем $ay = (y_2, -y_1)$. Определим оператор $A: X \rightarrow X'$, считая $Ay = a(y_1(x), y_2(x))$ для $y \in X$. Нетрудно видеть, что A – линейный оператор, определенный на всем пространстве X и отображающий его в $X = X'$, при этом

$$\|Ay\|_X^2 = \int_{\Omega} y_2^2(x) dx + \int_{\Omega} y_1^2(x) dx = \|y\|_X^2. \quad (1.7)$$

Из равенства (1.7) следует в частности, что A – ограниченный возрастающий оператор. Вычислим еще скалярное произведение

$$(Ay, y) = \int_{\Omega} y_2(x) y_1(x) dx - \int_{\Omega} y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

Полученное равенство показывает, что оператор A не является коэрцитивным, однако остается монотонным, так как в силу линейности

$$(Ay - Az, y - z) = (A(y - z), y - z) = 0.$$

2. Возрастающие дифференциальные операторы. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\partial\Omega$ рассмотрим дифференциальное уравнение в дивергентной форме

$$Au \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = f, \quad |\gamma| \leq m; \quad D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\beta| \leq m-1. \quad (2.1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Оператор A удобно представлять как композицию трех операторов. Сначала задаем линейный оператор $Lu \equiv \{D^\alpha u; |\alpha| \leq m\}$. Число компонент этого вектора обозначим через r . Оператор L действует непрерывно из каждого соболевского пространства $X = \dot{W}_p^m(\Omega)$, $p > 1$, в пространство $Y = (L^p(\Omega))^r$. Затем вступает в действие нелинейный оператор суперпозиции $a(x, y): Y \rightarrow Y' = (L^{p'}(\Omega))^r$, $p + p' = pp'$, который задается формулой

$$a(x, y) = \{A_\alpha(x, y_\gamma(x)), \quad |\alpha| \leq m, \quad |\gamma| \leq m\}.$$

Завершает все линейный оператор $L': Y' \rightarrow W_{p'}^{-m}(\Omega)$, сопряженный к L . В результате получаем композицию $Au = L'aLu$, $u \in \dot{W}_p^m(\Omega)$. Более детально указанная структура дифференциальных операторов рассматривается в [1, гл. II, § 2]. Ясно, что нелинейность всего оператора A определяется оператором суперпозиции $a: Y \rightarrow Y'$, который в дальнейшем будем называть *символом* дифференциального оператора $A: \dot{W}_p^m(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{-m}(\Omega)$.

Одна из задач теории дифференциальных операторов с частными производными состоит в том, чтобы по свойствам символа $a: Y \rightarrow Y'$ судить о свойствах дифференциального оператора A . Иногда это удается сделать достаточно просто. Например, если оператор $a(x, y): \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ является монотонным, то дифференциальный оператор A также будет монотонным. Изучаемое здесь свойство возрастания оператора не является столь же просто наследуемым. Именно, если символ $a: Y \rightarrow Y'$ является возрастающим, то это еще не гарантирует возрастания дифференциального оператора. Приведем соответствующий пример. В качестве символа возьмем оператор суперпозиции $a(y)$, построенный в примере 1.1. Уже отмечалось, что $a(y)$ определяет линейный ограниченный возрастающий и монотонный оператор из $(L^2(\Omega))^2$ в себя. А теперь найдем соответствующий дифференциальный оператор. Он задается формулой

$$Au \equiv \sum_{i=1}^2 D_i A_i(D_1 u, D_2 u) = D_1(D_2 u) + D_2(-D_1 u) \equiv 0.$$

Как видим, возрастающий оператор суперпозиции $a(y)$ переводится композицией $L'aL$ в нулевой оператор, который возрастающим быть не может. Это одна из причин, по которой при изучении дифференциальных операторов придерживаются условия строгой монотонности главной части оператора. Условие это имеет вид

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(x, \xi_0, \xi^m) - A_\alpha(x, \xi_0, \eta^m))(\xi_\alpha^m - \eta_\alpha^m) > 0 \quad (\xi^m \neq \eta^m).$$

Здесь $(\xi_0, \xi^m) = \xi$ и вектор ξ^m соответствует производным $D^\alpha u$, у которых $|\alpha| = m$.

Построенный выше пример показывает, что условие возрастания дифференциального оператора $A: X \rightarrow X'$ приходится устанавливать дополнительно к условию возрастания его символа $a: Y \rightarrow Y'$. Для дифференциальных операторов часто удается установить еще одно свойство, которое напоминает далее. Говорят, что оператор $A: X \rightarrow X'$ обладает (S_+) -свойством, если из соотношений $u_N \rightarrow u$ в X , $\overline{\lim}(Au_N, u_N - u) \leq 0$ ($N \rightarrow \infty$) вытекает, что $u_N \rightarrow u$ в норме пространства X . Рассмотрим дифференциальный оператор (2.1), сохранив в нем для наглядности только старшие производные. Другими словами, рассмотрим оператор

$$Au \equiv \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha A_\alpha(D^m u), \quad D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\beta| \leq m-1. \quad (2.2)$$

Здесь $D^m u = \{D^\alpha u; |\alpha| = m\}$. Число компонент этого вектора обозначим через M . Выпишем для оператора A условия, обеспечивающие его возрастание и (S_+) -свойство:

- $A_1)$ функции $A_\alpha(\xi)$ непрерывны по аргументу $\xi \in \mathbb{R}^M$;
 $A_2)$ они удовлетворяют следующим условиям роста

$$|A_\alpha(\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + c_2;$$

- $A_3)$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^M$

$$\sum_{|\alpha|=m} (A_\alpha(\xi) - A_\alpha(\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) > 0 \quad (\xi \neq \eta);$$

- $A_4)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^M$

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\xi) \xi_\alpha \geq c_3 |\xi|^p - c_4 \quad (c_3 > 0).$$

Согласно теореме 2.1 § 2 гл. I монографии Скрыпника [4, с. 15] при условиях $A_1)$ – $A_4)$ оператор $A: \dot{W}_p^m(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{-m}(\Omega)$ является непрерывным, ограниченным и обладает (S_+) -свойством. Остается заметить, что условие $A_4)$ приводит к коэрцитивности дифференциального оператора A , откуда следует его возрастание. Таким образом, в приложениях к дифференциальным операторам для доказательства (S_+) -свойства привлекается условие коэрцитивности, которого старались избежать, введя понятие возрастающего оператора. Можно предположить, что условие $A_4)$ является излишним для доказательства возрастания оператора A при сохранении остальных условий $A_1)$ – $A_3)$. Следующее утверждение показывает, что условие возрастания оператора A необходимо приводит к условию $A_4)$, по крайней мере для однородных операторов, которые часто используются.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия $A_1)$ – $A_3)$, и пусть функции $A_\alpha(\xi)$ являются положительно однородными, т.е. существует число $s > 0$ такое, что $A_\alpha(\lambda\xi) = \lambda^s A_\alpha(\xi)$ для всех $\lambda > 0$ и $|\alpha| = m$. При этих условиях оператор $A: \dot{W}_p^m(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{-m}(\Omega)$ является возрастающим тогда и только тогда, когда выполнено также условие $A_4)$. В частности, оператор A коэрцитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Введем символ $a(\xi) = \{A_\alpha(\xi), |\alpha| = m\}$. Из условия теоремы вытекает, что символ является положительно однородной вектор-функцией: $a(\lambda\xi) = \lambda^s a(\xi)$, $\lambda > 0$. Отсюда получаем такое представление символа:

$$a(\xi) = a(|\xi|\theta) = |\xi|^s a(\theta), \quad \theta = \xi|\xi|^{-1}, \quad |\theta| = 1. \quad (2.3)$$

Переменная θ меняется в пределах единичной сферы S_M пространства $\mathbb{R}^M$, которая является ограниченным множеством, и потому непрерывная функция $a(\theta)$ ограничена на S_M , так что $|a(\theta)| \leq C$ с фиксированной постоянной $C > 0$. Отсюда и из представления (2.3) следует оценка

$$|a(\xi)| \leq C|\xi|^s. \quad (2.4)$$

Из условия ограниченности A_2) сразу получаем, что $s \leq p - 1$. Остается убедиться, что $s = p - 1$. Допустим, что $s < p - 1$. Оценим норму функции Au . Полагая $X = \dot{W}_p^m(\Omega)$, согласно определению нормы в сопряженном пространстве $X' = W_{p'}^{-m}(\Omega)$ имеем

$$\|Au\|_{X'} = \sup_{\|e\|_X=1} (Au, e) = \sup_{\|e\|_X=1} \int_\Omega \sum_\alpha A_\alpha(D^m u) D^\alpha e \, dx.$$

Применив неравенство Гёльдера, получим

$$\|Au\|_{X'} \leq \left(\int_\Omega |a(D^m u)|^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \sup \|e\|_{\dot{W}_p^m(\Omega)}.$$

Последний множитель по условию есть единица, а к первому применим оценку (2.4), что дает

$$\|Au\|_{X'} \leq C \left(\int_\Omega |D^m u|^q \, dx \right)^{1/p'} = C \|u\|_{\dot{W}_q^m(\Omega)}^{q/p'}. \quad (2.5)$$

Здесь $q = sp' < p$, так как $s < p - 1$. Хорошо известно, что пространство $\dot{W}_p^m(\Omega)$ является собственным подмножеством пространства $\dot{W}_q^m$ для $q < p$. Это значит, что найдется последовательность функций $u_N \in \dot{W}_p^m(\Omega)$ с такими свойствами:

$$\|u_N\|_{\dot{W}_q^m(\Omega)} \leq C, \quad \|u_N\|_{\dot{W}_p^m(\Omega)} \rightarrow \infty \quad (N \rightarrow \infty).$$

Используя неравенство (2.5), получаем

$$\|Au_N\|_{X'} \leq C \|u_N\|_{\dot{W}_q^m(\Omega)}^{q/p'} \leq C_1,$$

где $\|u_N\|_X \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$). Это противоречит условию возрастания оператора A . Следовательно, строгое неравенство $s < p - 1$ невозможно, так что $s = p - 1$ и условие однородности принимает вид

$$A_\alpha(\lambda\xi) = \lambda^{p-1} A_\alpha(\xi), \quad \lambda > 0. \quad (2.6)$$

В частности, $A_\alpha(0) = 0$ для всех $|\alpha| = m$. Введем функцию $H(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\xi) \xi_\alpha$. Из условия A_3) при $\eta = 0$ вытекает, что $H(\xi) > 0$ для $\xi \neq 0$. Пусть $\xi = |\xi|\theta$, где $|\theta| = 1$. Тогда с учетом равенств (2.6) получаем

$$H(\xi) = H(|\xi|\theta) = \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(|\xi|\theta) |\xi| \theta_\alpha = |\xi|^p \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\theta) \theta_\alpha.$$

Это значит, что

$$H(\xi) = |\xi|^p H(\theta), \quad \theta = \xi|\xi|^{-1}, \quad |\theta| = 1. \quad (2.7)$$

Так как переменная $\theta \in S_M$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству, то функция $H(\theta)$ достигает на S_M своего минимума m_0 . По доказанному ранее $H(\xi) > 0$ для $\xi \neq 0$. Следовательно, $m_0 > 0$. Таким образом, справедлива оценка $H(\theta) \geq m_0 > 0$, $|\theta| = 1$. Из условия однородности (2.7) получаем, что $H(\xi) \geq m_0|\xi|^p$, $m_0 > 0$. Вспоминая определение функции $H(\xi)$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\xi) \xi_\alpha \geq m_0 |\xi|^p, \quad m_0 > 0.$$

Это показывает, что для возрастающего оператора A выполнено условие A_4), что и утверждалось.

Докажем достаточность условий $A_1)$ – $A_4)$ для возрастания оператора A . Заметим, что эта часть доказательства не требует однородности функций $A_\alpha(\xi)$. Используя условие $A_4)$, оценим произведение

$$(Au, u) = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(D^m u) D^\alpha u \, dx \geq \int_{\Omega} (c_3 |D^m u|^p - c_4) \, dx = c_3 \|u\|_X^p - c_5.$$

Так как $|(Au, u)| \leq \|Au\|_{X'} \|u\|_X$, то

$$c_3 \|u\|_X^p - c_5 \leq \|Au\|_{X'} \|u\|_X.$$

Отсюда очевидно, что $\|Au\|_{X'} \rightarrow \infty$, если $\|u\|_X \rightarrow \infty$, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.1 показывает, что для дифференциальных операторов получить различие между возрастающими и коэрцитивными операторами довольно сложно.

Для однородных функций $A_\alpha(\xi)$ можно предложить следующий признак сравнения, несколько обобщающий условие коэрцитивности $A_4)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия $A_1)$ – $A_3)$, а также

$$A'_4) \quad \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\xi) \xi_\alpha \geq c_3 a_0(\xi) \xi - c_4 \quad (c_3 > 0),$$

где вектор-функция $a_0(\xi)$ положительно однородна степени $s > 0$, т.е. $a_0(\lambda\xi) = \lambda^s a_0(\xi)$ для всех $\lambda > 0$. Если дифференциальный оператор $A_0: \dot{W}_p^m(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{-m}$, построенный по символу $a_0(\xi)$, является возрастающим, то оператор $A: \dot{W}_p^m(\Omega) \rightarrow W_{p'}^{-m}$ также возрастает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор A_0 возрастает и его символ $a_0(\xi)$ есть положительно однородная функция, то по теореме 2.1 справедливо неравенство $a_0(\xi) \xi \geq m_0 |\xi|^p$, $m_0 > 0$. В результате условие $A'_4)$ можно представить в виде

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(\xi) \xi_\alpha \geq c_3 m_0 |\xi|^p - c_2 \quad (c_3 > 0, \quad m_0 > 0),$$

откуда следует возрастание оператора A , как это установлено при доказательстве достаточности в теореме 2.1.

3. Абстрактные возрастающие операторы. Далее часто будет использоваться следующее свойство. Пусть $\varphi(r)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция, определенная для $r \geq 0$ и удовлетворяющая условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что пространства X, X' обладают *J-свойством*, если существует оператор двойственности $J: X \rightarrow X'$ относительно функции $\varphi(r)$, который является деминепрерывным, ограниченным, монотонным и коэрцитивным.

Оператор двойственности тщательно изучен. Он определен для любой пары X, X' банаховых пространств, но может быть многозначным. Для его однозначности и деминепрерывности достаточно предполагать, что пространства X, X' строго выпуклы. Оператор двойственности является монотонным и удовлетворяет следующим тождествам [2, гл. 2, § 2]:

$$(Ju, u) = \|Ju\|_{X'} \|u\|_X; \quad \|Ju\|_{X'} = \varphi(\|u\|_X). \quad (3.1)$$

Отсюда вытекает, в частности, его ограниченность и коэрцитивность. Напомним еще, что из деминепрерывности следует радиальная непрерывность. По аналогии с основной теоремой о монотонных коэрцитивных операторах сформулируем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть пространства X, X' обладают J-свойством, и пусть оператор $A: X \rightarrow X'$ является непрерывным, ограниченным, монотонным и возрастающим. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для любого элемента $f \in X'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ введем оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$, где J – оператор из определения 3.1. Отметим свойства нового оператора. Он радиально непрерывен, ограничен и монотонен как сумма операторов с такими свойствами. Проверим, что он коэрцитивен. Из монотонности оператора A следует неравенство $(Au, u) \geq (A(0), u)$, откуда $(Au, u) \geq -c_1 \|u\|_X$, где $c_1 = \|A(0)\|_{X'}$. По условию оператор J коэрцитивен, именно

$$(Ju, u) = \varphi(\|u\|_X) \|u\|_X, \quad \text{где } \varphi(r) \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty).$$

Из приведенных соотношений получаем

$$(A_\varepsilon u, u) \geq -c_1 \|u\|_X + \varepsilon \varphi(\|u\|_X) \|u\|_X = (\varepsilon \varphi(\|u\|_X) - c_1) \|u\|_X. \quad (3.2)$$

Так как число $\varepsilon > 0$ фиксировано и функция $\varphi(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, то очевидно, что $\varepsilon \varphi(r) - c_1 \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Это означает коэрцитивность оператора A_ε . Подведем итог. Оператор A_ε является радиально непрерывным, ограниченным, монотонным и коэрцитивным. Значит, для него выполнены все условия основной теоремы о монотонных операторах [1, с. 95], и потому уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для заданного элемента $f \in X'$. Докажем возможность предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$, для чего выясним дополнительные свойства множества $u^\varepsilon, \varepsilon > 0$. Уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$, рассматриваемое как тождество в пространстве X' , умножим на элемент $u^\varepsilon \in X$, что дает равенство $(A_\varepsilon u^\varepsilon, u^\varepsilon) = (f, u^\varepsilon)$. Его левую часть оценим снизу, используя соотношения (3.2). Правую часть оценим сверху через нормы. В результате получим неравенство

$$\varepsilon \varphi(\|u^\varepsilon\|_X) \leq c_2, \quad c_2 = c_1 + \|f\|_{X'}.$$

Подчеркнем, что постоянная c_2 не зависит от ε . Далее используем последнее из равенств (3.1). Получим

$$\varepsilon \|Ju^\varepsilon\|_{X'} = \varepsilon \varphi(\|u^\varepsilon\|_X) \leq c_2. \quad (3.3)$$

Уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ представим в виде $Au^\varepsilon = f - \varepsilon Ju^\varepsilon$. Из оценки (3.3) вытекает, что

$$\|Au^\varepsilon\|_{X'} \leq \|f\|_{X'} + \varepsilon \|Ju^\varepsilon\|_{X'} \leq \|f\|_{X'} + c_2 \equiv c_3. \quad (3.4)$$

Убедимся в равномерной ограниченности множества u^ε , $\varepsilon > 0$. Допустим, что найдется последовательность u_k^ε , $\varepsilon_k \rightarrow 0$, для которой $\|u_k^\varepsilon\|_X \rightarrow \infty$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Так как оператор A по условию возрастающий, то $\|Au_k^\varepsilon\|_{X'} \rightarrow \infty$, что противоречит оценке (3.4). Следовательно, найдется постоянная c_4 такая, что $\|u^\varepsilon\|_X \leq c_4$ для всех $\varepsilon > 0$. Так как пространство X рефлексивно, то можно выделить слабо сходящуюся последовательность $u^{\varepsilon_m} \rightharpoonup u$ в X при $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Оператор $J: X \rightarrow X'$ ограничен, и потому из оценки $\|u^\varepsilon\|_X \leq c_4$ вытекает, что $\|Ju^\varepsilon\|_{X'} \leq c_5$, где постоянная не зависит от ε . Но тогда $\varepsilon Ju^\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в пространстве X' . Из тождества $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ следует в свою очередь, что $Au^\varepsilon = f - \varepsilon Ju^\varepsilon \rightarrow f$ в X' при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда нетрудно получить, что $(Au^{\varepsilon_m}, u^{\varepsilon_m}) \rightarrow (f, u)$ при $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Итак, построена последовательность u^{ε_m} с такими свойствами:

$$u^{\varepsilon_m} \rightharpoonup u \text{ в } X, \quad Au^{\varepsilon_m} \rightharpoonup f \text{ в } X', \quad \overline{\lim}_{\varepsilon_m \rightarrow 0} (Au^{\varepsilon_m}, u^{\varepsilon_m}) \leq (f, u).$$

Согласно [1, гл. III, § 1, лемма 1.3, с. 85] этих свойств в совокупности с монотонностью оператора A достаточно, чтобы утверждать, что $Au = f$. Тем самым теорема доказана.

Заметим, что частный случай этой теоремы, когда X – гильбертово пространство, доказан в монографии Ниренберга [7, гл. 5, п. 5.1, следствие 2].

Итак, требование коэрцитивности монотонного оператора удается ослабить до условия его возрастания. Условие монотонности также подвергалось многочисленным обобщениям. В результате появились, например, псевдомонотонные операторы, операторы вариационного исчисления, операторы с (S) -свойством и другие. Приходится констатировать, что в приложениях к уравнениям с частными производными у перечисленных классов не оказалось преимуществ перед ранее введенным множеством операторов, обладающих (M) -свойством. Так называются операторы, для которых равенство $Au = f$ вытекает из следующих соотношений, выполняющихся для последовательности $u_N \in X$ при $N \rightarrow \infty$:

$$u_N \rightharpoonup u \text{ в } X, \quad Au_N \rightharpoonup f \text{ в } X', \quad \overline{\lim} (Au_N, u_N) \leq (f, u).$$

Согласно [2, замечание 2.1, гл. 2, § 2] в этом определении аксиоматизируется предельный переход в галёркинских приближениях. Класс операторов, обладающих (M) -свойством, довольно широк. Например, любой линейный ограниченный оператор обладает (M) -свойством в силу слабой непрерывности.

Напомним следующее утверждение [2, гл. 2, § 2, теорема 2.1]. Пусть оператор $A: X \rightarrow X'$ является деминепрерывным, ограниченным, коэрцитивным и обладает (M) -свойством. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X'$. Приведем параллельные утверждения для нечетных операторов, т.е. операторов, удовлетворяющих условию $A(-u) = -Au$. Подобные утверждения установлены в работе [8]. Здесь они приводятся по монографии [4, гл. 1, § 5, следствие 5.1 и теорема 5.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $A: X \rightarrow X'$ является непрерывным, ограниченным, возрастающим нечетным оператором, и пусть он обладает (S_+) -свойством. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X'$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $A: X \rightarrow X'$ является непрерывным, ограниченным, нечетным, положительно однородным оператором, причем уравнение $Au = 0$ допускает единственное решение $u = 0$. Пусть еще оператор A обладает (S_+) -свойством. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X'$.

В предложении 3.1 (S_+) -свойство можно заменить на монотонность оператора A и J -свойство, как это следует из теоремы 3.1. Убедимся на примере, что ослабить монотонность до (M) -свойства уже нельзя при сохранении остальных условий предложения 3.1.

ПРИМЕР 3.1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Введем линейный оператор поворота, который на базисных векторах действует по закону $Ae_k = e_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Если $x = \sum_{k=1}^\infty c_k e_k$, то полагаем $Ax = \sum_{k=1}^\infty c_k e_{k+1}$. Очевидно, что $\|Ax\| = \|x\|$ для всех $x \in H$ и потому оператор A – линейный, ограниченный, непрерывный и возрастающий из пространства H в себя, причем $A(-x) = -Ax$, т.е. это нечетный оператор.

Убедимся, что он обладает (M) -свойством. Действительно, если $x_n \rightharpoonup x$, $Ax_n \rightharpoonup f$ в H при $N \rightarrow \infty$, то $Ax = f$, так как линейный ограниченный оператор слабо непрерывен. Равенство $Ax = f$, полученное из слабых сходимостей, характеризует операторы с (M) -свойством. Итак, построенный оператор A обладает всеми свойствами оператора из предложения 3.1, кроме (S_+) -свойства, которое заменено на (M) -свойство. Тем не менее, уравнение $Ax = f$ не имеет решения для $f = e_1$, т.е. заключение предложения 3.1 для введенного оператора A несправедливо.

Убедимся далее, что в предложении 3.2 (S_+) -свойство нельзя заменить даже на монотонность.

ПРИМЕР 3.2. Пусть снова H – сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $A: H \rightarrow H$ – линейный, ограниченный, положительный, вполне непрерывный оператор. Такой оператор положительно однороден степени $k = 1$ и нечетен в силу линейности, так как $A(tx) = tAx$ ($t > 0$), $A(-x) = -Ax$. Он также является монотонным в силу положительности: $(Ax, x) > 0$, $x \neq 0$. Уравнение $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$ также в силу положительности оператора A . Тем не менее, уравнение $Ax = f$ допускает решения не для любой правой части $f \in H$, что подтверждает невозможность ослабления (S_+) -свойства оператора A до его монотонности.

Теорема 3.1 показывает, что возрастание оператора A в совокупности с монотонностью достаточно для существования решения уравнения $Au = f$. Ослабить условие монотонности до (M) -свойства без дополнительных предположений уже не удастся, как показывает пример 3.1. В следующем утверждении предложены дополнительные условия, которые дают возможность изучать возрастающие операторы с (M) -свойством.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть пространства X, X' обладают J -свойством, и пусть оператор $A: X \rightarrow X'$ является непрерывным, ограниченным, возрастающим и обладает (M) -свойством. Пусть еще для него выполнены следующие два условия:

- 1) форма (Au, u) полуограничена снизу; именно $(Au, u) \geq 0$ для всех $u \in X$;

2) если последовательность $u_N \rightharpoonup u$ в X при $N \rightarrow \infty$, то

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} (Au_N, u_N - u) \geq 0.$$

Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для любого элемента $f \in X'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем число ε и введем оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$. Он деминепрерывен и ограничен, а также коэрцитивен, что устанавливается аналогично тому, как это сделано при доказательстве предыдущей теоремы 3.1. Убедимся еще, что оператор A_ε обладает (M) -свойством. Пусть задана последовательность $u_N \in X$, для которой известны такие соотношения при $N \rightarrow \infty$:

$$u_N \rightharpoonup u \text{ в } X, \quad \overline{\lim} (A_\varepsilon u_N, u_N - u) \leq 0. \quad (3.5)$$

Последнее неравенство запишем подробнее:

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} [(Au_N, u_N - u) + \varepsilon (Ju_N, u_N - u)] \leq 0. \quad (3.6)$$

Для участвующего здесь оператора двойственности установим одно свойство.

ЛЕММА 3.1. Пусть $u_N \rightharpoonup u$ в X при $N \rightarrow \infty$. Тогда $\liminf_{N \rightarrow \infty} (Ju_N, u_N - u) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, оператор двойственности является монотонным, и потому выполняется неравенство $(Ju_N - Ju, u_N - u) \geq 0$, которое представим в виде

$$(Ju_N, u_N - u) \geq (Ju, u_N - u).$$

Правая часть здесь стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Доказательство следующей леммы достаточно очевидно.

ЛЕММА 3.2. Пусть последовательности чисел a_N, b_N ограничены и при $N \rightarrow \infty$ удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\lim} (a_N + b_N) \leq 0, \quad \liminf a_N \geq 0, \quad \liminf b_N \geq 0.$$

Тогда существуют пределы $\lim a_N = 0, \lim b_N = 0$.

Вернемся к неравенству (3.6) и введем обозначения

$$a_N = (Au_N, u_N - u), \quad b_N = \varepsilon (Ju_N, u_N - u).$$

Проверим выполнение условий леммы 3.2. Ее первое неравенство совпадает с (3.6), второе входит в условие теоремы, а последнее вытекает из леммы 3.1. Следовательно, существуют $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = 0$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} b_N = 0$, что при возвращении к исходным обозначениям дает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (Au_N, u_N - u) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon (Ju_N, u_N - u) = 0.$$

Отсюда следует, что $Au_N \rightharpoonup Au$, $Ju_N \rightharpoonup Ju$ при $N \rightarrow \infty$, так как операторы A и J обладают (M) -свойством, и соответственно $A_\varepsilon u_N \rightharpoonup A_\varepsilon u$ ($N \rightarrow \infty$). Остается напомнить, что последняя сходимость получена в предположении, что выполняются соотношения (3.5). Согласно определению это значит, что оператор A_ε обладает (M) -свойством. Подведем итог. Оператор A_ε является деминепрерывным, ограниченным, коэрцитивным и обладает (M) -свойством. Этого достаточно, чтобы утверждать, что уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для заданного элемента $f \in X'$.

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ определена функция u^ε , удовлетворяющая уравнению

$$Au^\varepsilon + \varepsilon Ju^\varepsilon = f. \quad (3.7)$$

Остается убедиться, что возможен предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что эта часть доказательства аналогична предельному переходу в предыдущей теореме, и потому отметим только основные моменты. Уравнение (3.7) умножим на u^ε . Используя оценки снизу для форм (Au, u) и (Ju, u) , получаем неравенство $\varepsilon \varphi(\|u^\varepsilon\|_X) \leq c_2$. Отсюда аналогично (3.3) получаем оценку $\varepsilon \|Ju^\varepsilon\|_{X'} \leq c_2$. Снова обращаясь к уравнению (3.7), по аналогии с (3.4) выводим, что $\|Au^\varepsilon\|_{X'} \leq c_3$. Так как оператор A по условию возрастающий, то отсюда следует равномерная оценка $\|u^\varepsilon\|_X \leq c_4$, которая дает неравенство $\|Ju^\varepsilon\|_{X'} \leq c_5$ и сходимость $\varepsilon Ju^\varepsilon \rightarrow 0$ в X' при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате, из уравнения (3.7) вытекает, что $Au^\varepsilon \rightarrow f$ в X' при $\varepsilon \rightarrow 0$. Изложенное означает, что можно выбрать последовательность u^{ε_k} , $\varepsilon_k \rightarrow 0$, с такими свойствами:

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \text{ в } X, \quad Au^{\varepsilon_k} \rightarrow f \text{ в } X', \quad \lim(Au^{\varepsilon_k}, u^{\varepsilon_k}) = (f, u). \quad (3.8)$$

Оператор A обладает (M) -свойством, которое предполагает, что соотношений (3.8) достаточно для равенства $Au = f$. Это завершает доказательство теоремы.

В заключение автор благодарит Ю.А. Дубинского и С.И. Похожаева за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.
- [2] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [3] Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Современные проблемы математики. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. С. 5–130.
- [4] Скрышник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
- [5] Милоевич П.С. Разрешимость сильно нелинейных операторных уравнений и их приложения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 3. С. 502–516.
- [6] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
- [7] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
- [8] Похожаев С.И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66–73.