Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Экстремумы субэкспоненциального дробового шума, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 227–231

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm341>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:12:24

УДК 519.21

ЭКСТРЕМУМЫ

СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ДРОБОВОГО ШУМА

А. В. Лебедев

Рассмотрено асимптотическое поведение экстремумов дробового шума в случае монотонных функций отклика с неограниченным носителем и субэкспоненциально распределенных амплитуд. Предполагается, что распределение амплитуд принадлежит области притяжения некоторого максимум-устойчивого закона. Получено предельное распределение для максимумов.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Исследования дробового шума восходят к началу XX века [1]. Фундаментальной в этой области считается работа [2]. Помимо описания флуктуационных шумов в электрических цепях в дальнейшем были найдены приложения модели в самых разных областях: акустике, оптике, механике, биологии, метеорологии, гидрологии, нейropsychологии, теории риска (страховании) и др.

Под *дробовым шумом* будем понимать случайный процесс вида

$$X(t) = \sum_{t_n \leq t} \xi_n \varphi(t - t_n), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где случайные величины ξ_n , $n \geq 1$, называемые *амплитудами*, независимы и одинаково распределены, t_n , $n \geq 1$, образуют процесс восстановления, причем $\{\xi_n\}$ и $\{t_n\}$ независимы; $\varphi(t)$ – измеримая функция на $\mathbb{R}_+$, называемая *функцией отклика*. Функции распределения амплитуд ξ_n и промежутков $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $t_0 = 0$, обозначим через A и G соответственно.

Нас будет интересовать асимптотическое поведение процесса $M(t) = \sup\{X(u) : u \in [0, t]\}$ при $t \rightarrow \infty$.

В [3] изучались максимумы процессов с правильно меняющимися хвостами распределений амплитуд и финитными функциями отклика. Случай функций отклика с неограниченным носителем (в частности, показательной) изучался в [4], но для единичных амплитуд.

Проведем обобщение модели [3], рассмотрев случай монотонных функций отклика с неограниченным носителем и субэкспоненциально распределенных амплитуд.

Субэкспоненциальные распределения были введены в [5] как удовлетворяющие следующим условиям:

1) $F(x) = 0$, $x < 0$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00131.

$$2) F(x) < 1, x > 0;$$

$$3) \overline{F}^{2*}(x) \sim 2\overline{F}(x), x \rightarrow \infty, \text{ где } \overline{F}(x) = 1 - F(x).$$

Последнее условие оказывается эквивалентно $\overline{F}^{n*}(x) \sim n\overline{F}(x), x \rightarrow \infty, n \geq 2$. Современное состояние вопроса изложено в обзоре [6]. Интересные результаты были получены в [7], [8].

В классе субэкспоненциальных распределений S выделим подкласс $S_{\max}$ распределений, принадлежащих области притяжения какого-либо невырожденного максимум-устойчивого закона H при линейной нормировке. Иначе говоря, для таких распределений существуют числовые последовательности $a_n > 0, b_n, n \geq 1$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq a_n x + b_n) = H(x).$$

К данному классу относятся, например, распределения Парето, Вейбулла (с показателем меньше единицы), Барра, Бенктандера (I и II типов), логарифмически нормальное, логарифмически гамма и др. Принадлежность области притяжения означает наличие регулярности, без которой получение многих важных результатов усложняется.

Фундаментальной в теории экстремумов является работа [9] о трех типах максимум-устойчивых законов (распределений экстремальных значений) и их областях притяжения. Более современное состояние теории отражено в монографии [10].

Распределения из $S_{\max}$ либо имеют правильно меняющиеся хвосты, либо принадлежат области притяжения двойного показательного закона $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ [6].

Будем далее пользоваться понятием ассоциированности случайных величин [11], [12] (в теории надежности употребляется термин “связность”). Функцию многих переменных $f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, назовем *монотонно неубывающей*, если из $x'_i \leq x''_i, 1 \leq i \leq n$, следует $f(x') \leq f(x'')$. Случайные величины набора $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ называются *ассоциированными*, если $\text{Cov}(f(\zeta), g(\zeta)) \geq 0$ для всех тех монотонно неубывающих f и g , для которых эта ковариация существует.

Согласно [11] независимые случайные величины ассоциированы, монотонно не убывающие функции от ассоциированных случайных величин также обладают этим свойством, и для ассоциированных ζ_i и любых чисел s_i , где $1 \leq i \leq n$, верно неравенство [11, теорема 5.1]

$$P(\zeta_i \leq s_i, 1 \leq i \leq n) \geq \prod_{i=1}^n P(\zeta_i \leq s_i).$$

2. Основные результаты. Всюду в дальнейшем будем считать выполненными следующие предположения:

1) случайные величины ξ_n в (1) имеют функцию распределения $A \in S_{\max}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \leq a_n x + b_n) = H(x);$$

пусть $\alpha = +\infty$, если A принадлежит области притяжения Λ , и α – показатель правильно меняющейся функции $\bar{A}$ в противном случае;

2) φ неотрицательна, монотонно не возрастает и φ^δ непосредственно интегрируема по Риману для некоторого $\delta \in (0, \min\{1, \alpha\})$; $\varphi(0) = 1$;

3) G имеет конечное среднее $\gamma > 0$; обозначим $\lambda = 1/\gamma$.

Заметим, что условие $\varphi(0) = 1$ вместо $\varphi(0) \in (0, +\infty)$ не является ограничительным (поскольку всегда можно нормировать амплитуды соответствующим образом), однако упрощает вычисления.

ТЕОРЕМА 1. Последовательность $X(t_n)$ имеет предельное распределение Ψ при $n \rightarrow \infty$, и существует распределение $F_0 \in S$ такое, что $\bar{\Psi}(x) \leq \bar{F}_0(x)$ и $\bar{F}_0(x) \sim C\bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$, для некоторого $C > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задано семейство числовых последовательностей $u_n = u_n(s)$, $s > 0$, $n \geq 1$, таких, что $n\bar{A}(u_n) \rightarrow s$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(M(t) \leq u_{[\lambda t]}) = e^{-s}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(M(t) \leq a_{[\lambda t]}x + b_{[\lambda t]}) = H(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют субэкспоненциальные распределения, не принадлежащие области притяжения ни одного максимум-устойчивого закона при линейной нормировке. Простой пример такого распределения был приведен Ч.М. Голди в частной переписке с автором: полагаем $F(x) = 0$ при $x \leq 1$ и для всех $n \geq 0$

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} e^{-n}x^{-1}, & e^{2n} \leq x \leq e^{2n+1}, \\ e^{n+1}x^{-2}, & e^{2n+1} \leq x \leq e^{2n+2}. \end{cases}$$

Поскольку указанный подкласс субэкспоненциальных распределений пока мало изучен, вопрос об истинности теорем 1 и 2 для него остается открытым.

3. Доказательства. Воспользуемся следующими свойствами субэкспоненциальных распределений [6, § 5].

I. Если $F, F_i \in S$ и $\bar{F}_i(x) \sim c_i \bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$, $c_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2$, то $F_1 * F_2 \in S$ и $\overline{F_1 * F_2}(x) \sim (c_1 + c_2)\bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$.

II. Пусть случайная величина κ со значениями в $\mathbb{Z}_+$ такова, что $M(1 + \varepsilon)^\kappa < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$, тогда если $F \in S$, то $F_{\text{rs}} = MF^{\kappa*} \in S$ и $\bar{F}_{\text{rs}}(x) \sim (M\kappa)\bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$.

III. Пусть случайные величины η_n , $n \geq 1$, независимы, имеют распределение $F \in S_{\text{max}}$ и заданы числа $c_n \geq 0$, $n \geq 1$; обозначим распределение $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \eta_n$ через F_{ws} . Тогда

- а) если хвост F правильно меняющийся с показателем α и для некоторого $\delta < \min\{1, \alpha\}$ верно $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^\delta < \infty$, то $F_{\text{ws}} \in S$ и $\bar{F}_{\text{ws}}(x) \sim (\sum_{n=1}^{\infty} c_n^\alpha)\bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$;
- б) если F принадлежит области притяжения двойного показательного закона и для некоторого $\delta \in (0, 1)$ верно $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^\delta < \infty$, где $c_n \leq 1$ для всех $n \geq 1$, то $F_{\text{ws}} \in S$ и $\bar{F}_{\text{ws}}(x) \sim N_1 \bar{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$, где N_1 — число c_n , равных единице.

ЛЕММА. Существуют $\theta > 0$ и $\rho \in (0, 1)$ такие, что распределение случайной величины $\nu = \max\{n: t_n \leq \theta n\}$ удовлетворяет условию $P(\nu > m) = O(\rho^m)$, $m \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $0 < G(\varepsilon) < 1$, обозначим $p = 1 - G(\varepsilon)$. Определим $\tau_n^\varepsilon = \varepsilon I(\tau_n \geq \varepsilon)$ и $t_n^\varepsilon = \tau_1^\varepsilon + \dots + \tau_n^\varepsilon$, так что $t_n^\varepsilon/\varepsilon$ имеет распределение $\text{Bi}(n, p)$. Пусть $0 < s < p$, $\theta = \varepsilon s$, тогда

$$P(t_n \leq \theta n) \leq P(t_n^\varepsilon \leq \theta n) \leq \rho^n, \quad \rho = \left(\frac{1-p}{1-s}\right)^{1-s} \left(\frac{p}{s}\right)^s \in (0, 1). \quad (2)$$

Имеем

$$P(\nu > m) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} P(t_n \leq \theta n) = O(\rho^m), \quad m \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Имеем

$$X(t_n) = \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi(t_n - t_k) \stackrel{d}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \varphi(t_k) \nearrow \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \varphi(t_k) = X_{\infty}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\xi_0 \stackrel{d}{=} \xi_1$. Обозначим распределение X_{∞} через Ψ .

Определим

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \varphi(\theta n)$$

и обозначим распределение Y через F_Y . Тогда по свойству III получаем $\bar{F}_Y(x) \sim C_Y \bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$. Здесь $C_Y = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\theta n)^{\alpha}$, если хвост A правильно меняется с показателем α (причем $\alpha > \delta$, поэтому ряд сходится), и $C_Y = \max\{n: \varphi(\theta n) = 1\} + 1$ в противном случае.

Определим $Z = \xi_1 + \dots + \xi_{\nu}$ и обозначим распределение Z через F_Z . С учетом леммы по свойству II получаем $\bar{F}_Z(x) \sim C_Z \bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$, где $C_Z = M\nu < \infty$.

Положим $F_0 = F_Y * F_Z$, тогда по свойству I верно $\bar{F}_0(x) \sim C \bar{A}(x)$, $x \rightarrow \infty$, где $C = C_Y + C_Z$.

Имеем $\varphi(t_n) \leq 1$ при $n \leq \nu$ и $\varphi(t_n) \leq \varphi(\theta n)$ при $n > \nu$. Поэтому

$$P(X_{\infty} > x | \nu = k) \leq \overline{F_Y * A^{k*}}(x), \quad k \geq 0.$$

По формуле полной вероятности получаем $\bar{\Psi}(x) \leq \bar{F}_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим случайные величины $X_n = X(t_n)$ и $M(k, l) = \max\{X_{k+1}, \dots, X_l\}$, $M_n = M(0, n)$. Из оценки $X_n \geq \xi_n$ следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{A(u_n)\}^n = e^{-s}. \quad (3)$$

Заметим, что X_i , $1 \leq i \leq n$, ассоциированы как монотонно неубывающие функции от набора независимых случайных величин ξ_i , $-\tau_i$, $1 \leq i \leq n$. Максимумы $M(k, l)$, в свою очередь, представляют собой монотонно неубывающие функции от X_i , $k+1 \leq i \leq l$, и поэтому также ассоциированы. Следовательно,

$$P(M_n \leq u_n) \geq \prod_{j=1}^{[n/k]} P(M(l_{j-1}, l_j) \leq u_n), \quad l_j = jk, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С помощью свойства I и теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{[n/k]} P(M(l_{j-1}, l_j) \leq u_n) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{[n/k]} P\left(X_{l_{j-1}+1} + \sum_{i=l_{j-1}+2}^{l_j} \xi_i \leq u_n\right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \{F_0 * A^{(k-1)*}(u_n)\}^{[n/k]} = \exp\left\{-\left(1 + \frac{C-1}{k}\right)s\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Переходя в правой части (4) к пределу по $k \rightarrow \infty$ и учитывая (3), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-s}.$$

Обозначим $N(t) = \sup\{n: t_n \leq t\}$. Имеем

$$M(t) = \sup_{u \in [0, t]} X(u) = \max_{n=1, N(t)} X_n = M_{N(t)}. \quad (5)$$

Поскольку $N(t)/t \rightarrow \lambda$ почти наверное, то из (5) и определения u_n следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(M(t) \leq u_{[\lambda t]}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Распределение H принадлежит к одному из экстремальных типов [9], [10] и в любом случае непрерывно, так что функция h , обратная к $(-\ln H)$, определена на $(0, +\infty)$. Из условия следует $n\bar{A}(a_n x + b_n) \rightarrow H(x)$, $n \rightarrow \infty$, поэтому можно взять $u_n(s) = a_n h(s) + b_n$ и применить теорему 2.

Автор благодарен Ч. М. Голди, К. Клюппельберг и Д. Клайну (Cline) за внимание и помощь в поиске информации, а также выражает признательность рецензенту за полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Campbell N. R. The study of discontinuous phenomena // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1909. V. 15. № 1. P. 117–136.
- [2] Райс С. Теория флуктуационных шумов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М.: ИЛ, 1953. С. 88–238.
- [3] McCormick W. P. Extremes for shot noise processes with heavy tailed amplitudes // J. Appl. Probab. 1997. V. 34. № 3. P. 643–656.
- [4] Doney R. A., O'Brien G. L. Loud shot noise // Ann. Appl. Probab. 1991. V. 1. № 1. P. 88–103.
- [5] Чистяков В. П. Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.
- [6] Goldie C. M., Klüppelberg C. Subexponential distributions // A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy Tailed Distributions / ed. R. Adler, R. Feldman, M. S. Taqqu. Boston: Birkhäuser, 1998. P. 435–459.
- [7] Калашников В. В., Цициашвили Г. III. Двусторонние оценки случайных сумм с субэкспоненциальными слагаемыми // Пробл. передачи информации. 1999. Т. 35. № 3. С. 67–79.
- [8] Якимив А. Л. Явные оценки для асимптотики субэкспоненциальных безгранично делимых функций распределения // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 295–301.
- [9] Gnedenko B. V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire // Ann. Math. 1943. V. 44. № 3. P. 423–453.
- [10] Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрэн Г. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
- [11] Esary J., Prochan F., Walkup D. Association of random variables with applications // Ann. Math. Stat. 1967. V. 38. № 5. P. 1466–1474.
- [12] Бахтин Ю. Ю. Закон повторного логарифма для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 812–823.