Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Нечепуренко, Оценка нормы матрицы Грина через интегральный критерий качества дихотомии и границы хаусдорфова множества, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 232–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:07:02

УДК 512.64

ОЦЕНКА НОРМЫ МАТРИЦЫ ГРИНА ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ КАЧЕСТВА ДИХОТОМИИ И ГРАНИЦЫ ХАУСДОРФОВА МНОЖЕСТВА

Ю. М. Нечепуренко

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида $du/dt = Au + f(t)$, $-\infty < t < \infty$, получены новые верхние оценки второй нормы матрицы Грина через интегральный критерий качества дихотомии и границы хаусдорфова множества матрицы A . Эти оценки значительно лучше известных для многих приложений.

Библиография: 6 названий.

Пусть A – квадратная матрица порядка n такая, что мнимая ось не содержит точек ее спектра и разбивает его на два непустых подмножества, лежащих соответственно в левой и правой полуплоскостях. Величину $\theta = \|H\|_2$, где

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega I - A)^* (i\omega I - A)^{-1} d\omega, \quad (1)$$

а I означает единичную матрицу порядка n , называют *интегральным критерием качества* дихотомии спектра матрицы A мнимой осью [1].

Обозначим через P спектральный проектор (проектор Рисса), отвечающий части спектра матрицы A , лежащей в левой полуплоскости. В работе [2] было показано, что

$$\|\exp\{tA\}(I - P)\|_2 \leq \sqrt{c_1} \exp\left\{\frac{t}{2\theta}\right\}, \quad t \leq 0, \quad (2)$$

$$\|\exp\{tA\}P\|_2 \leq \sqrt{c_2} \exp\left\{-\frac{t}{2\theta}\right\}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где

$$c_1 = 2h_{\max}\theta, \quad c_2 = 2|h_{\min}|\theta, \quad (4)$$

а $h_{\min} = h_{\min}(A) < 0$ и $h_{\max} = h_{\max}(A) > 0$ означают соответственно левую и правую границы хаусдорфова множества

$$W(A) = \left\{ \frac{(Av, v)}{(v, v)} : v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0 \right\}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00269.

матрицы A :

$$h_{\min}(A) = \min\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in W(A)\}, \quad h_{\max}(A) = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in W(A)\}.$$

Неравенства (2), (3) являются верхними оценками нормы матрицы Грина [3], [4]

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega I - A)^{-1} \exp\{i\omega t\} d\omega = \exp\{tA\} \times \begin{cases} P - I, & t < 0, \\ P, & t > 0, \end{cases}$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

и имеют много других полезных приложений. В частности, они позволяют оценить норму спектрального проектора:

$$\|P\|_2 = \|I - P\|_2 \leq \sqrt{\min\{c_1, c_2\}}, \quad (5)$$

и для решения $u(t) = \exp\{tA\}u^0$ задачи Коши

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt} = Au$$

оценить скорость убывания жесткой компоненты по сравнению с главной:

$$\frac{\|Pu(t)\|_2}{\|(I - P)u(t)\|_2} \leq \sqrt{c_1 c_2} \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\} \frac{\|Pu^0\|_2}{\|(I - P)u^0\|_2}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Действительно, из неравенств (2), (3) следует, что для любого $u^0 \in \mathbb{C}^n$ и $t \geq 0$ выполнены оценки

$$\|\exp\{-tA\}(I - P)u^0\|_2 \leq \sqrt{c_1} \exp\left\{-\frac{t}{2\theta}\right\} \|(I - P)u^0\|_2, \quad (7a)$$

$$\|\exp\{tA\}Pu^0\|_2 \leq \sqrt{c_2} \exp\left\{-\frac{t}{2\theta}\right\} \|Pu^0\|_2. \quad (7b)$$

Подставив в (7a) $\exp\{tA\}u^0$ вместо u^0 и разделив левую (правую) части неравенства (7b) на соответственно правую (левую) части полученного неравенства, приходим к (6).

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Оценки (2), (3) справедливы с константами*

$$c_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\alpha}, \quad c_2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta}, \quad (8)$$

где $\alpha = 1/(2|h_{\min}|\theta)$, $\beta = 1/(2|h_{\max}|\theta)$, $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Отсюда, учитывая, что $\gamma \leq 1$ в силу неравенства (5) с константами (4), несложно вывести следующую оценку нормы матрицы Грина.

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место неравенство*

$$\|G(t)\|_2 \leq \sqrt{c} \exp\left\{-\frac{|t|}{2\theta}\right\}, \quad -\infty < t < \infty,$$

где

$$c = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{2\gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\gamma} \leq \frac{4}{\gamma} = 8 \min\{h_{\max}, |h_{\min}|\} \theta.$$

Отметим, что константы c_1 и c_2 из теоремы 1 не превосходят одноименных констант (4) и значительно меньше их в случаях, когда либо $h_{\max} \gg |h_{\min}|$, либо $|h_{\min}| \gg h_{\max}$. Действительно, при $\delta > 0$ функция $\varphi(x) = (\delta + x)^{1+\delta}/x$ убывает в интервале $0 < x \leq 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\alpha} \leq \frac{1}{\beta} = 2h_{\max}\theta, \quad \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta} \leq \frac{1}{\alpha} = 2|h_{\min}|\theta.$$

С другой стороны, если $h_{\max} \geq |h_{\min}|$, то $\gamma = \alpha$ и

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{1+\alpha} \leq \frac{4}{\alpha} = 8|h_{\min}|\theta,$$

а если $|h_{\min}| \geq h_{\max}$, то $\gamma = \beta$ и

$$\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta} \leq \frac{4}{\beta} = 8h_{\max}\theta.$$

Таким образом, константы из теоремы 1 удовлетворяют следующим неравенствам:

$$c_1 \leq \min\{2h_{\max}, 8|h_{\min}|\}\theta, \quad c_2 \leq \min\{8h_{\max}, 2|h_{\min}|\}\theta. \quad (9)$$

Если матрица A является конечномерным аналогом линейного неограниченного замкнутого оператора L , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, с областью определения $D(L) \subset \mathcal{H}$, то для того чтобы оценки (2), (3) с константами (4) оставались нетривиальными при $n \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы хаусдорфово множество оператора L было ограничено слева и справа, т.е.

$$h_{\min}(L) = \inf \left\{ \operatorname{Re} \frac{(Lx, x)_{\mathcal{H}}}{(x, x)_{\mathcal{H}}} : x \in D(L), x \neq 0 \right\} > -\infty, \quad (10)$$

$$h_{\max}(L) = \sup \left\{ \operatorname{Re} \frac{(Lx, x)_{\mathcal{H}}}{(x, x)_{\mathcal{H}}} : x \in D(L), x \neq 0 \right\} < \infty, \quad (11)$$

и был ограничен интегральный критерий качества дихотомии спектра оператора L мнимой осью:

$$\sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|(i\omega - L)^{-1}x\|_{\mathcal{H}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}}^2} d\omega < \infty. \quad (12)$$

В то же время, как это следует из неравенств (9), для нетривиальности при $n \rightarrow \infty$ оценок из теоремы 1 необходимо и достаточно выполнения условия (12) и какого-нибудь

одного из условий (10), (11). Учитывая, что для многих задач математической физики, таких как уравнения конвекции-диффузии, переноса нейтронов и т.п., условие (11) выполнено, а условие (10) – нет, очевидно не только количественное, но и качественное преимущество оценок из теоремы 1 по сравнению с оценками (2), (3), (4).

Для доказательства теоремы 1 существенно предположение о том, что мнимая ось разбивает спектр матрицы A на два непустых подмножества. Поэтому полученные оценки нельзя использовать в случаях, когда $P = 0$ или I . Для этих случаев, требующих отдельного рассмотрения, оценки, аналогичные оценкам из теоремы 1, получены в работе [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая, что $P(-A) = I - P(A)$, $H(-A) = H(A)$,

$$h_{\min}(-A) = -h_{\max}(A), \quad h_{\max}(-A) = -h_{\min}(A), \quad (13)$$

нетрудно проверить, что неравенство (2), (8) эквивалентно неравенству (3), (8), примененному к матрице $-A$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать справедливость одного из этих неравенств. Докажем, например, неравенство (3), (8).

Известно [1], [6], что матричный интеграл (1) является решением обобщенного уравнения Ляпунова, которое в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$A^*H + HA = (I - P)^*(I - P) - P^*P, \quad HP = P^*H. \quad (14)$$

Если матрица A не имеет собственных значений на мнимой оси, то система матричных уравнений (14) имеет единственное эрмитовое положительно определенное решение $H = H^* > 0$. Для этого решения справедливо представление (1) и представление

$$H = \int_0^\infty [P^* \exp\{sA^*\} \exp\{sA\}P + (I - P)^* \exp\{-sA^*\} \exp\{-sA\}(I - P)] ds. \quad (15)$$

Пусть u^0 – произвольный вектор длины n , $u = \exp\{tA\}u^0$, $\tilde{H} = P^*HP$. Домножив первое уравнение (14) слева на P^* и справа на P , получим равенство

$$A^*\tilde{H} + \tilde{H}A = -P^*P,$$

в силу которого

$$\frac{d}{dt}(\tilde{H}u, u) = ((A^*\tilde{H} + \tilde{H}A)u, u) = -(Pu, Pu) \leq -\frac{1}{\theta}(HPu, Pu) = -\frac{1}{\theta}(\tilde{H}u, u).$$

Следовательно,

$$(\tilde{H}u, u) \leq \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}(\tilde{H}u^0, u^0), \quad t \geq 0.$$

Отсюда для произвольного τ такого, что $t \geq \tau \geq 0$, имеем

$$(\exp\{-\tau A^*\}\tilde{H}\exp\{-\tau A\}u, u) \leq \exp\left\{-\frac{t-\tau}{\theta}\right\}(\tilde{H}u^0, u^0). \quad (16)$$

В силу представления (15)

$$\begin{aligned} (\exp\{-\tau A^*\} \tilde{H} \exp\{-\tau A\} u, u) &= \int_{-\tau}^{\infty} (\exp\{sA^*\} \exp\{sA\} Pu, Pu) ds \\ &\geq \int_{-\tau}^{\infty} \sigma(s)^2 ds \|Pu\|_2^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\sigma(s)$ – минимальное сингулярное число матрицы $\exp\{sA\}$. С другой стороны, в силу того же представления $\tilde{H} \leq H$ и, следовательно,

$$(\tilde{H}u^0, u^0) \leq \theta \|u^0\|_2^2. \quad (18)$$

Используя неравенства (17) и (18) для оценки соответственно левой и правой частей неравенства (16), приходим к следующему неравенству:

$$\|\exp\{tA\}Pu^0\|_2^2 \leq \theta \exp\left\{\frac{\tau}{\theta}\right\} \left(\int_{-\tau}^{\infty} \sigma(s)^2 ds\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\} \|u^0\|_2^2, \quad (19)$$

справедливому при всех $t \geq \tau \geq 0$.

В силу известного [1] неравенства

$$\|\exp\{tA\}\|_2 \leq \exp\{h_{\max}t\}, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

и второго равенства (13) для минимального сингулярного числа матричной экспоненты справедливы следующие нижние оценки:

$$\sigma(s) = \frac{1}{\|\exp\{-sA\}\|_2} \geq \begin{cases} \exp\{h_{\min}s\}, & s \geq 0, \\ \exp\{h_{\max}s\}, & s \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^{\infty} \sigma(s)^2 ds &\geq \int_0^{\infty} \exp\{2h_{\min}s\} ds + \int_{-\tau}^0 \exp\{2h_{\max}s\} ds \\ &= \frac{1}{2|h_{\min}|} + \frac{1 - \exp\{-2h_{\max}\tau\}}{2h_{\max}} = \theta \left(\alpha + \beta - \beta \exp\left\{-\frac{\tau}{\beta\theta}\right\} \right). \end{aligned}$$

Подставив эту оценку в правую часть неравенства (19), получим, что при всех $t \geq \tau \geq 0$ и $u^0 \in \mathbb{C}^n$ справедливо неравенство

$$\|\exp\{tA\}Pu^0\|_2^2 \leq c(\tau) \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\} \|u^0\|_2^2 \quad (21)$$

и, следовательно, справедливо неравенство

$$\|\exp\{tA\}P\|_2^2 \leq c(\tau) \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\}, \quad t \geq \tau \geq 0, \quad (22)$$

где

$$c(\tau) = \exp\left\{\frac{\tau}{\theta}\right\} \left(\alpha + \beta - \beta \exp\left\{-\frac{\tau}{\beta\theta}\right\} \right)^{-1}.$$

Отметим, что положив в (22) $\tau = 0$, получим неравенство (3), (4), а применив полученное неравенство к матрице $-A$, получим неравенство (2), (4).

Наряду с оценкой (22) в силу неравенства $\|P\|_2 \leq 1/\gamma$ и оценки (20) справедлива оценка

$$\|\exp\{tA\}P\|_2^2 \leq \frac{1}{\gamma} \exp\left\{\frac{t}{\beta\theta}\right\}, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

Правая часть неравенства (22) убывает с ростом t , а правая часть неравенства (23) — возрастает. Следовательно, если в качестве τ выбрать решение уравнения

$$c(\tau) \exp\left\{-\frac{\tau}{\theta}\right\} = \frac{1}{\gamma} \exp\left\{\frac{\tau}{\beta\theta}\right\}, \quad \tau \geq 0, \quad (24)$$

то оценка (22) будет справедлива при всех $t \geq 0$. Непосредственно проверяется, что

$$\tau = \tau_* = \beta\theta \ln \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$$

является решением уравнения (24) и

$$c(\tau_*) = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta}.$$

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следуют неравенства (7) с константами c_1 и c_2 , определенными в этой теореме. Однако по аналогии с доказательством теоремы 1 можно непосредственно вывести неравенства (7) с несколько меньшими константами.

ТЕОРЕМА 2. *Оценки (7) справедливы с константами*

$$c_1 = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta} \right)^{1+\alpha}, \quad c_2 = \left(\frac{\beta + 1}{\alpha + \beta} \right)^{1+\beta}, \quad (25)$$

где α и β определены как в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенств (20) и (21) для любого $u^0 \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$\|\exp\{tA\}Pu^0\|_2^2 \leq \exp\left\{\frac{t}{\beta\theta}\right\} \|Pu^0\|_2^2 \quad (26)$$

при всех $t \geq 0$ и

$$\|\exp\{tA\}Pu^0\|_2^2 \leq c(\tau) \exp\left\{-\frac{t}{\theta}\right\} \|Pu^0\|_2^2 \quad (27)$$

при всех $t \geq \tau \geq 0$. Правая часть неравенства (26) возрастает, а правая часть неравенства (27) убывает с ростом t . Поэтому если в качестве τ выбрать решение

$$\tau_0 = \beta\theta \ln \frac{\beta + 1}{\alpha + \beta}$$

уравнения

$$c(\tau) \exp\left\{-\frac{\tau}{\theta}\right\} = \exp\left\{\frac{\tau}{\beta\theta}\right\}, \quad \tau \geq 0,$$

то оценка (27) будет справедлива при всех $t \geq 0$. Учитывая, что

$$c(\tau_0) = \left(\frac{\beta+1}{\alpha+\beta}\right)^{1+\beta},$$

приходим к оценке (76), (25). Справедливость оценки (7а), (25) следует из оценки (76), (25), примененной к матрице $-A$.

Отметим, что функция $c(\tau)$ убывает в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_0$ и возрастает при $\tau \geq \tau_0$. Следовательно, выбор $\tau < \tau_*$ и $\tau < \tau_0$ при получении из оценки (21) оценок вида (3) и (76) привел бы к более грубому результату, чем $\tau = \tau_*$ и τ_0 соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
- [2] Годунов С. К., Нечепуренко Ю. М. Оценки для главной и жесткой компонент на основе интегрального критерия качества дихотомии // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 1. С. 35–42.
- [3] Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [4] Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1994.
- [5] Нечепуренко Ю. М. Об оценке нормы матричной экспоненты // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 5. С. 597–600.
- [6] Булгаков А. Я. Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц // Тр. ИМ СО АН СССР. Т. 15. Новосибирск, 1989. С. 12–92.

Институт вычислительной математики РАН
E-mail: yumn@inm.ras.ru

Поступило
06.03.2001