Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Новиков, Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 239–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:36:34

УДК 517.518.865

АСИМПТОТИКА КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В ПОСТРОЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВСПЛЕСКОВ ДОБЕШИ

И. Я. Новиков

Статья посвящена изучению асимптотики корней последовательности полиномов Бернштейна, приближающих кусочно-линейную функцию. Эта последовательность возникает при построении модифицированных всплесков с компактным носителем, которые, в отличие от классических всплесков Добеши, сохраняют локализацию с ростом гладкости. Доказано, что предельной кривой для корней является граница области сходности рассматриваемых полиномов Бернштейна на комплексной плоскости.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Всплеском называют функцию ψ , сжатия и сдвиги которой $\{\psi_{jk}(t) := 2^{j/2}\psi(2^j t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$. Всплески с компактным носителем и произвольной конечной гладкостью построены Добеши в [1]. Существенным недостатком этой конструкции является ухудшение локализованности всплесков с возрастанием гладкости (см. [2]). В статьях автора [3], [4] построены модифицированные всплески Добеши, сохраняющие локализацию с возрастанием гладкости. В построении используются полиномы Бернштейна на B [5], аппроксимирующие кусочно-аналитическую функцию на отрезке $[-1, 1]$. Эти полиномы определяют квадрат модуля тригонометрического полинома m (масштабирующего фильтра), являющегося центральным элементом конструкции всплесков с компактным носителем. Полином m находится при помощи леммы Рисса [6]. Для ее применения необходимо знать корни полинома B . Более того, полином m определяется таким способом неоднозначно. Информация о корнях полинома B позволяет выбирать m с дополнительными свойствами, определяющими важные для приложений характеристики соответствующих всплесков: степень асимметричности, локализованность, гладкость (см., например, [7]).

Данная статья посвящена исследованию асимптотики корней следующей последовательности многочленов Бернштейна:

$$B_L(x) = \sum_{l=0}^{L-1} \binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l} + \sum_{l=L}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L} \right) \binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l}, \quad L \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00044, и программы “Университеты России”.

аппроксимирующих на $[0, 1]$ кусочно-линейную функцию

$$f(t) := \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ \frac{3}{2} - 2t, & t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Рис. 1

На рис. 1 показаны функция f и полином Бернштейна B_7 . Подобная задача для многочленов Бернштейна, аппроксимирующих на $[0, 1]$ характеристическую функцию отрезка $[0, 1/2]$ и соответствующих конструкции классических всплесков Добеши, изучалась в [8]–[10]. Используя методы [4], можно доказать, что модифицированные всплески Добеши, построенные таким же образом, как в [3], с заменой использованной там кусочно-аналитической функции на кусочно-линейную, сохраняют локализацию с ростом гладкости. Рисунок 2 показывает корни B_{37} . Цель работы – найти кривую, на которой расположены корни, и исследовать поведение корней при $L \rightarrow \infty$. Оказывается, что предельная кривая состоит из частей двух лемнискат. Первая лемниската определяется уравнением

$$\mathcal{L}_1 := \left\{ x : \left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = 1 \right\},$$

вторая –

$$\mathcal{L}_2 := \left\{ x : \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4} = 1 \right\}$$

(рис. 3).

Рисунок 4 показывает нули B_{37} вместе с $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Маленькая окружность на рис. 4 имеет центр в $36/35$ и радиус $6/35$. Доказано, что многочлены B_L не имеют корней, не равных 1, внутри этого круга. В п. 2 доказываются точные результаты относительно корней B_L , содержащихся в левой петле лемнискаты $\mathcal{L}_2$ и имеющих вещественную часть меньшую чем $1/4$. Подобные результаты получены относительно других областей внутри петель лемнискат $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (они не приводятся здесь из-за ограничения объема). Вспомогательные утверждения вынесены в отдельный пункт – п. 3.

Рис. 2. Нули B_{37} Рис. 3. Лемнискаты $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

Численные эксперименты показывают, что вертикальная прямая линия $\operatorname{Re} z = 1/2$ является предельной кривой для нулей B_L , расположенных вне лемнискат. Этот факт нуждается в теоретическом обосновании.

Полученные результаты указывают, что расположение корней полиномов Бернштейна, аппроксимирующих кусочно-аналитическую функцию, подобно расположению корней частных сумм степенного ряда. Известно (см. [11]), что любая граничная точка круга сходимости степенного ряда является предельной для множества корней частных сумм этого ряда. Из результатов статьи [12] следует, что последовательность $\{B_L\}_{L=1}^{\infty}$ сходится в комплексной области на пересечении внутренностей лемнискат $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Таким образом, в рассмотренном случае предельной кривой для корней полиномов Бернштейна так же, как и для частных сумм степенного ряда, является граница области сходимости.

Рис. 4. Корни B_{37} и лемнискаты

2. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 2.1. *Все корни многочленов B_L , $L \in \mathbb{N}$, не равные 1, лежат вне окружности*

$$\left| x - \frac{36}{35} \right| = \frac{6}{35}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для $x \neq 1$ имеет место равенство

$$B_L(x) = (1-x)^{4L} \left[\sum_{l=0}^{L-1} \binom{4L}{l} \left(\frac{x}{1-x} \right)^l + \sum_{l=L}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L} \right) \binom{4L}{l} \left(\frac{x}{1-x} \right)^l \right].$$

Пусть $z := x/(1-x)$. Применим теорему Энестрема–Какея [6, с. 114, проблема 23] к полиному

$$\sum_{l=0}^{L-1} \binom{4L}{l} z^l + \sum_{l=L}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L} \right) \binom{4L}{l} z^l.$$

На основании этой теоремы корни находятся в кольце

$$\min \left\{ \min_{0 \leq l \leq L-1} \frac{\binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}}, \min_{L \leq l \leq 3L-2} \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L}\right) \binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}} \right\} \\ \leq |z| \leq \max \left\{ \max_{0 \leq l \leq L-1} \frac{\binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}}, \max_{L \leq l \leq 3L-2} \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L}\right) \binom{4L}{l}}{\binom{4L}{l+1}} \right\}.$$

Прямые вычисления показывают, что $1/(4L) \leq |z| \leq 6 - 14/(L+2) < 6$. В терминах переменной x имеем

$$\left\{ x : \left| \frac{x}{1-x} \right| < 6 \right\} = \left\{ x : \left| x - \frac{36}{35} \right| > \frac{6}{35} \right\}.$$

Пусть α_1 и β_1 – области внутри левой и правой петли лемнискаты $\mathcal{L}_1$; α_2 и β_2 – то же самое для $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= \left\{ x : \left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} < 1, \operatorname{Re} x < \frac{1}{4} \right\}, \\ \beta_1 &:= \left\{ x : \left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} < 1, \operatorname{Re} x > \frac{1}{4} \right\}, \\ \alpha_2 &:= \left\{ x : \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4} < 1, \operatorname{Re} x < \frac{3}{4} \right\}, \\ \beta_2 &:= \left\{ x : \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4} < 1, \operatorname{Re} x > \frac{3}{4} \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Корни многочленов $B_L(x)$, $L \in \mathbb{N}$, находящиеся в $\{x : |x| \leq 1/4\}$, удовлетворяют неравенству*

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} > a(L), \tag{2.2}$$

где

$$a(L) = \left(1 - \left(\frac{5}{27} \right)^L \frac{9}{128L} \right)^{3/(12L+4)} \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}} \Phi(L) \right)^{-3/(12L+4)}, \\ \Phi(L) := \frac{\Gamma^*(4L)}{\Gamma^*(L)\Gamma^*(3L)}, \quad \Gamma^*(r) := \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e^r r^{-r} \Gamma(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$b_{N,l}(x) := \binom{N}{l} x^l (1-x)^{N-l}, \quad l = 0, 1, \dots, N, \quad B_{L,1}(x) := \sum_{l=0}^{3L-1} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{2L} \right) b_{4L,l}(x),$$

$$R_{L,1}(x) := \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2} \right) b_{4L,l}(x), \quad B_{L,2}(x) := \sum_{l=0}^{L-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} \right) b_{4L,l}(x).$$
(2.3)

Известно, что

$$\sum_{l=0}^N b_{N,l}(x) = 1, \quad \sum_{l=0}^N \frac{l}{N} b_{N,l}(x) = x.$$

Поэтому

$$B_L(x) = B_{L,1}(x) - B_{L,2}(x) = \frac{3}{2} - 2x + R_{L,1}(x) - B_{L,2}(x). \quad (2.4)$$

Применяя к $B_{L,2}$ формулы (3.3) и (3.6), получаем, что

$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2} - 2x + 6L \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(x) x^{L+1} (1-x)^{3L+1}, \quad (2.5)$$

где

$$I_{N,k}(x) := \int_0^1 s(1-xs)^{-N} (1-s)^k ds.$$

Теперь (2.4) и (2.5) влекут

$$B_L(x) = 1 + R_{L,1}(x) - 6L \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1}(x) x^{L+1} (1-x)^{3L+1}. \quad (2.6)$$

Очевидно, что для $|x| \leq 1/4$ и $s \in [0, 1]$

$$|(1-xs)^{-1}| \leq \left(1 - \frac{s}{4}\right)^{-1}. \quad (2.7)$$

На основании (2.6) и (2.7), если $B_L(x) = 0$ и $|x| \leq 1/4$, то

$$|(1 + R_{L,1}(x)) x^{-L-1} (1-x)^{-3L-1}| < 6L \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1} \left(\frac{1}{4} \right). \quad (2.8)$$

Из (2.5) следует, что

$$6L \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1,L-1} \left(\frac{1}{4} \right) = B_{L,2} \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^{-L-1} \left(\frac{3}{4} \right)^{-3L-1}. \quad (2.9)$$

Теперь (2.8) и (2.9) влекут

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{L+1} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3L+1} > \frac{|1 + R_{L,1}(x)|}{B_{L,2}(1/4)}.$$

Учитывая следствие 3.3 и (3.11), получаем

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{L+1} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3L+1} > \frac{1 - \left(\frac{5}{27} \right)^L \frac{9}{128L}}{\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}} \Phi(L)}.$$

Возводя обе части последнего неравенства в степень $3/(4(3L+1))$, получаем (2.2).

Пусть $\mathcal{L}_{11}$ обозначает лемнискату

$$\mathcal{L}_{11}(L) := \left\{ x : \left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = a(L) \right\}.$$

Рис. 5

На рис. 5 изображены корни B_{20} и лемниската $\mathcal{L}_{11}(20)$.

Зафиксируем теперь произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим область

$$\alpha_{2,1} := \alpha_2 \cap \left\{ \left| x - \frac{1}{4} \right| > \delta \right\} \cap \left\{ \operatorname{Re} x < \frac{1}{4} \right\}.$$

В силу следствия 3.5

$$I_{4L+1, L-1}(x) = \frac{1}{L^2(1-4x)^2} + O(L^{-3}). \quad (2.10)$$

Если $B_L(x) = 0$, то в силу (2.6)

$$x^{-L-1}(1-x)^{-3L-1} = \frac{6L \binom{4L-1}{L-1} I_{4L+1, L-1}(x)}{1 + R_{L,1}(x)}. \quad (2.11)$$

По формуле Стирлинга

$$\binom{4L-1}{L-1} \sim \frac{4^{4L}}{2\sqrt{6\pi L} 3^{3L}}.$$

Поэтому (2.11), (2.10) и следствие 3.3 влекут

$$x^{-L-1}(1-x)^{-3L-1} = \frac{4^{4L}}{\sqrt{6\pi L} L 3^{3L-1}} \frac{1}{(1-4x)^2} (1 + O(L^{-1})).$$

Возводя обе части этого неравенства в степень $(-1/(4L+4))$, получаем, что корень x многочлена B_L удовлетворяет условию

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = \left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7} \right)^{1/(8(L+1))} (|1-x| \cdot |1-4x|)^{1/(2(L+1))} (1 + O(L^{-2})). \quad (2.12)$$

Из этого следует

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\delta > 0$, $L \in \mathbb{N}$. Тогда расстояние от любого корня полинома $B_L(x)$, содержащегося в $\alpha_{2,1}$, до кривой $\mathcal{L}_{1,L}$:

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = \left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7} \right)^{1/(8(L+1))} (|1-x| \cdot |1-4x|)^{1/(2(L+1))}, \quad (2.13)$$

не превосходит $c(\delta)L^{-2}$.

Рисунок 6 показывает корни B_{20} и кривую $\mathcal{L}_{1,L}$ внутри области $\alpha_{2,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – корень B_L , расположенный в $\alpha_{2,1}$, а x – точка на $\mathcal{L}_{1,L}$, ближайшая к X , $\varepsilon := x - X$. Так как $|1 + \varepsilon|^a = 1 + O(a|\varepsilon|)$ для любого $a \in (0, 1)$, то

$$\begin{aligned} |1 - X|^{2/(L+1)} &= |1 - x|^{2/(L+1)} \cdot \left| 1 + \frac{\varepsilon}{1-x} \right|^{2/(L+1)} = |1 - x|^{2/(L+1)} \left(1 + O\left(\frac{|\varepsilon|}{L}\right) \right), \\ |1 - 4X|^{2/(L+1)} &= |1 - 4x|^{2/(L+1)} \left(1 + O\left(\frac{|\varepsilon|}{L}\right) \right), \\ |X(1 - X)^3| &= |x(1 - x)^3| \cdot \left| 1 + \frac{2+x}{x(1-x)}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \right|. \end{aligned}$$

Пусть $E := (2+x)/(x(1-x))$. Так как $x \in \mathcal{L}_{1,L}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\left| \frac{X}{1/4} \right| \cdot \left| \frac{1-X}{3/4} \right|^3}{\left(\frac{2^{17}\pi L^3}{3^7} \right)^{1/(2(L+1))} (|1-X| \cdot |1-4X|)^{1/(L+1)}} &= \frac{|1 + E\varepsilon + O(\varepsilon^2)|}{1 + O(|\varepsilon|/L)} \\ &= |1 + E\varepsilon + O(|\varepsilon|)| = 1 + O(L^{-2}). \end{aligned}$$

Рис. 6

Последнее равенство следует из (2.12) и влечет, что $\varepsilon = O(L^{-2})$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\delta > 0$. Корни $B_L(x)$, $L \in \mathbb{N}$, содержащиеся в $\alpha_{2,1}$, находятся на расстоянии не больше, чем $c'(\delta)L^{-1}$, от кривой $\mathcal{L}'_{1,L}$, задаваемой уравнением

$$\left| \frac{x}{1/4} \right|^{1/4} \left| \frac{1-x}{3/4} \right|^{3/4} = 1 + \frac{\log(2^{17}\pi L^3/3^7)}{8L+1}.$$

Рисунок 7 показывает корни B_{20} и $\mathcal{L}'_{1,20}$ в $\alpha_{2,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что $t = 1 + \log t + O((t-1)^{-2})$.

Рис. 7

3. Вспомогательные результаты. Прежде всего представим некоторые специальные многочлены Бернштейна в виде полиномов Тейлора.

Пусть $T_{g,k}(x)$ – полином Тейлора для функции g в точке 0 порядка k :

$$T_{g,k}(x) := \sum_{l=0}^k \frac{g^{(l)}(0)}{l!} x^l.$$

Пусть

$$A_{N,k}(x) := \sum_{l=0}^k b_{N,l}(x).$$

ТЕОРЕМА 3.1. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$

$$A_{N,k}(x) = (1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k}(x), \quad (3.1)$$

где $h_l(x) := (1-x)^{-l}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$h_l^{(m)}(0) = l(l+1) \cdots (l+m-1), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Формула (3.1) доказывается по индукции. Для $k = 0$ она очевидна. Предположим, что формула (3.1) верна для k . Для $k+1$ имеем

$$\begin{aligned} A_{N,k+1}(x) &= A_{N,k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{N-k-1} \\ &= (1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{N-k-1} \\ &= (1-x)^{N-k-1} \left(T_{h_{N-k},k}(x) - x T_{h_{N-k},k}(x) + \binom{N}{k+1} x^{k+1} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.2), получаем (3.1) для $k+1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$

$$A_{N,k}(x) = 1 - (N-k) \binom{N}{k} \int_0^1 (1-xs)^{-N-1} (1-s)^k ds x^{k+1} (1-x)^{N-k}. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегральная формула Тейлора для остаточного члена дает

$$T_{h_{N-k},k}(x) = (1-x)^{k-N} - \frac{(N-k) \cdots N}{k!} \int_0^x (1-s)^{-N-1} (x-s)^k ds. \quad (3.4)$$

Замена переменных $s = xs$ приводит к (3.3).

Теорема 3.1 и следствие 3.1 являются обобщениями теоремы 1 и равенства (14) из [9]. Пусть

$$C_{N,k}(x) := \sum_{l=1}^k \frac{l}{N} b_{N,l}(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $k \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$C_{N,k}(x) = x(1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k-1}(x), \quad (3.5)$$

$$C_{N,k}(x) = x - (N-k) \binom{N-1}{k-1} \int_0^1 (1-xs)^{-N} (1-s)^{k-1} ds x^{k+1} (1-x)^{N-k}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{l}{N} \binom{N}{l} = \binom{N-1}{l-1},$$

то, используя (3.1), получаем (3.5):

$$\begin{aligned} C_{N,k}(x) &= x \sum_{l=1}^k \binom{N-1}{l-1} x^{l-1} (1-x)^{(N-1)-(l-1)} \\ &= x A_{N-1,k-1}(x) = x(1-x)^{N-k} T_{h_{N-k},k-1}(x). \end{aligned}$$

Так же, как при доказательстве (3.4), имеем

$$\begin{aligned} T_{h_{N-k},k-1}(x) &= (1-x)^{k-N} - \frac{(N-k) \cdots (N-1)}{(k-1)!} \int_0^x (1-s)^{-N} (x-s)^{k-1} ds \\ &= (1-x)^{k-N} - (N-k) \binom{N-1}{k-1} \int_0^1 (1-xs)^{-N} (1-s)^{k-1} ds x^k, \end{aligned}$$

откуда следует (3.6).

Докажем теперь некоторые вспомогательные оценки.

ЛЕММА 3.1. Для $x \in \alpha_2$

$$|R_1(x)| \leq \frac{q(x)^{4L} \tau(x)}{2L(1-\tau(x))^2}, \quad (3.7)$$

где α_2, R_1 определены в (2.1), (2.3),

$$q(x) := \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4}, \quad \tau(x) := \frac{|x|}{3|1-x|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \alpha_2$, то

$$q(x) = \left| \frac{x}{3/4} \right|^{3/4} \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{1/4} = \frac{|1-x|}{1/4} \left(\frac{|x|}{3|1-x|} \right)^{3/4} < 1,$$

откуда

$$\tau(x) = \frac{|x|}{3|1-x|} = \left(q(x) \frac{1/4}{|1-x|} \right)^{4/3} < 1,$$

так как $|1-x| > 1/4$ для $x \in \alpha_2$.

Так как для любого $\lambda \in (0, 1)$ выполнена оценка $\binom{N}{l} \leq \lambda^{-l} (1-\lambda)^{l-N}$, то для $x \in \alpha_2$ и $l > 3L$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \binom{4L}{l} x^l (1-x)^{4L-l} \right| &\leq \left| \frac{x}{3/4} \right|^l \left| \frac{1-x}{1/4} \right|^{4L-l} \\ &= \left(\frac{|1-x|}{1/4} \right)^{4L} \left(\frac{|x|}{3|1-x|} \right)^{3L} \left(\frac{|x|}{3|1-x|} \right)^{l-3L} \\ &= q(x)^{4L} \tau(x)^{l-3L}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{L,1}(x) &:= \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2} \right) b_{4L,l}(x) \leq q(x)^{4L} \sum_{l=3L+1}^{4L} \left(\frac{l}{2L} - \frac{3}{2} \right) \tau(x)^{l-3L} \\ &= \frac{q(x)^{4L}}{2L} \sum_{l=1}^L l \tau(x)^l = \frac{q(x)^{4L} \tau(x) (1 - (L+1)\tau(x)^L + L\tau(x)^{L+1})}{2L(1 - \tau(x))^2} \\ &< \frac{q(x)^{4L} \tau(x)}{2L(1 - \tau(x))^2}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3.1 основано на идеях статьи [12].

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Для $|x| \leq 1/4$ выполнена оценка

$$|R_1(x)| < \frac{9}{128L} \left(\frac{5}{27} \right)^L.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|x| \leq 1/4$, то $3/4 \leq |1-x| \leq 5/4$. Поэтому $q(x) \leq (5/27)^{1/4}$, $\tau(x) \leq 1/9$.

Следующие ниже оценки $B_L(1/4)$, $L \in \mathbb{N}$, основаны на представлении некоторых многочленов Бернштейна при помощи *неполной бета-функции*:

$$\text{Inc}_{a,b}(x) := \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x s^{a-1} (1-s)^{b-1} ds.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$

$$A_{N,k}(x) = 1 - \text{Inc}_{k+1, N-k}(x). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $(b_{N,k}(x))' = N(b_{N-1,k-1}(x) - b_{N-1,k}(x))$, где $b_{N,l}(x)$ полагается равным нулю при $l < 0$ или $l > N$. Поэтому $(A_{N,k}(x))' = -Nb_{N-1,k}(x)$. Так как $A_{N,k}(0) = 1$, то

$$A_{N,k}(x) = 1 - N \int_0^x b_{N-1,k}(s) ds,$$

откуда следует (3.9).

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Имеет место равенство

$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2} - 2x + 2x \text{Inc}_{L,3L}(x) - \frac{1}{2} \text{Inc}_{L+1,3L}(x). \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$B_{L,2}(x) = \frac{1}{2} A_{4L,L}(x) - 2C_{4L,L}(x) = \frac{1}{2} A_{4L,L}(x) - 2x A_{4L-1,L-1}(x),$$

откуда при помощи (3.9) получаем (3.10).

ЛЕММА 3.2. *Имеет место соотношение*

$$B_{L,2}(1/4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}} \Phi(L) < \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}}, \quad (3.11)$$

где

$$\Phi(L) := \frac{\Gamma^*(4L)}{\Gamma^*(L)\Gamma^*(3L)}, \quad \Gamma^*(r) := \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e^r r^{-r} \Gamma(r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (3.10)

$$\begin{aligned} B_{L,2}\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2} \left(\text{Inc}_{L,3L}\left(\frac{1}{4}\right) - \text{Inc}_{L+1,3L}\left(\frac{1}{4}\right) \right) \\ &= \frac{(4L-1)!}{(2L-1)!(3L-1)!} \int_0^{1/4} (1-4s)s^{L-1}(1-s)^{3L-1} ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Сделаем замену переменных (см. [13])

$$-\frac{\zeta^2}{2} = \ln \left[\left(\frac{s}{1/4} \right)^{1/4} \left(\frac{1-s}{3/4} \right)^{3/4} \right],$$

где знак ζ отрицательный. Тогда

$$B_{L,2}\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{3L}{2\pi}} \Phi(L) \int_0^\infty \exp(-2L\zeta^2) \zeta d\zeta = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2\pi L}} \Phi(L).$$

Известно, что $\Gamma^*(r) \searrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и $\Phi(L) \nearrow 1$ при $L \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $k, N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $k < N - 2$, $\text{Re } x < (k+1)/(N-1)$, $|x - (k+1)/(N-1)| > \delta$. Тогда

$$\text{In}_{N,k}(x) := \int_0^1 (1-xs)^{-N} (1-s)^k ds = \frac{1}{k+1 - (N-1)x} + O(k^{-3}). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a := (N-1)/(k+1)$. В интеграле $\text{In}_{N,k}$ сделаем замену переменных $w := w(s) := (1-s)/(1-xs)^a$. Тогда

$$\frac{dw}{ds} = \frac{(a - (a-1)s)x - 1}{(1-xs)^{a+1}}$$

и

$$\text{In}_{N,k}(x) = \int_0^1 \frac{w^k}{1 - (a - (a-1)s)x} dw.$$

Докажем, что $|w(s)| < 1$ при достаточно малых $s \in [0, 1]$. Пусть $x := \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$|w(s)| = \frac{1-s}{(1-2\rho s \cos \varphi + \rho^2 s^2)^{a/2}}.$$

Поэтому неравенство $|w(s)| < 1$ эквивалентно

$$\frac{(1 - 2\rho s \cos \varphi + \rho^2 s^2)^{a/2} - 1}{s} = \frac{f(s) - f(0)}{s} > -1,$$

где $f(s) := (1 - 2\rho s \cos \varphi + \rho^2 s^2)^{a/2}$. Последнее неравенство выполнено для достаточно малых $s \in [0, 1]$, так как $f'(0) = -a\rho \cos \varphi > -1$.

Пусть константа $\varepsilon \in (0, 1)$ выбрана так, что $\varepsilon < \delta^2 / ((k+1)^2(a-1)|x|)$ и $|\tau| < 1$, где $\tau := w(\varepsilon)$. Тогда

$$\text{In}_{N,k}(x) = \int_0^\tau \frac{w^k}{1 - (a - (a-1)s)x} dw + \int_\tau^1 \frac{w^k}{1 - (a - (a-1)s)x} dw =: I_1 + I_2.$$

Так как $s \in [0, 1]$, то $(a - (a-1)s) \in [1, a]$. Ясно, что отрезок $[x, ax]$ не пересекает круг $\{z : |1 - z| \leq \delta\}$, поэтому $|1 - (a - (a-1)s)x| > \delta$ для любого $s \in [0, 1]$ и

$$|I_1| < \frac{|\tau|^{k+1}}{(k+1)\delta}.$$

Для I_2 имеем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{1 - ax} \int_\tau^1 w^k dw - \int_\tau^1 \frac{w^k(a-1)xs}{(1 - ax)(1 - (a - (a-1)s)x)} dw \\ &= \frac{1 - \tau^{k+1}}{(1 - ax)(k+1)} - \int_\tau^1 \frac{w^k(a-1)xs}{(1 - ax)(1 - (a - (a-1)s)x)} dw. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\left| \text{In}_{N,k}(x) - \frac{1}{(1 - ax)(k+1)} \right| < \frac{2|\tau|^{k+1}}{\delta(k+1)} + \frac{(a-1)|x|\varepsilon}{(k+1)\delta^2} < \frac{2|\tau|^{k+1}}{\delta(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. В условиях леммы 3.3 выполнено равенство

$$\begin{aligned} I_{N,k}(x) &= \text{In}_{N,k}(x) - \text{In}_{N,k+1}(x) = \frac{1}{(k+1 - (N-1)x)(k+2 - (N-1)x)} + O(k^{-3}) \\ &= \frac{1}{(k+1)^2 \left(1 - \frac{N-1}{k+1}x\right)^2} + O(k^{-3}). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets // *Comm. Pure Appl. Math.* 1988. V. 46. P. 909–996.
- [2] Chui C. K., Wang J. High-Order Orthonormal Scaling Functions and Wavelets Give Poor Time-Frequency Localization. CAT Report # 322, 1994.
- [3] Novikov I. Ya. Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness // *East J. Appr.* 1995. V. 1. № 3. P. 341–348.
- [4] Новиков И. Я. Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши // *Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информатика.* Т. 4. Вып. 1 Тула: ТулГУ, 1998. С. 107–111.
- [5] Бернштейн С. Demonstration de theorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités // *Сообщ. Харьковского матем. общества. Сер. 2.* 1912–1913. Т. 13. № 1. С. 1–2.
- [6] Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.
- [7] Shen J., Strang G. Asymptotics of Daubechies filters, scaling functions, and wavelets // *Applied and Comp. Harm. Analysis.* 1998. V. 5. P. 312–331.
- [8] Kateb D., Lemarie-Rieusset P. G. The phase of the Daubechies filters // *Université de Paris-Sud Mathématiques. Preprint 62,* 1994. P. 1–42.
- [9] Shen J., Strang G. The Zeros of the Daubechies Polynomials // *Massachusetts Institute of Technology. Preprint,* 1995. P. 1–12.
- [10] Temme N. M. Asymptotics and Numerics of Zeros of Polynomials that are Related to Daubechies Wavelets // *Centrum voor Wiskunde en Informatica. Preprint AM-R9613,* 1996. P. 1–12.
- [11] Jentzsch R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Functionen. Berlin: Inaug.-diss, 1914.
- [12] Канторович Л. В. Осходимости последовательности полиномов Бернштейна за пределами основного интервала // *Изв. АН СССР.* 1931. С. 1103–1115.
- [13] Temme N. M. Asymptotic inversion of the incomplete beta-function // *J. Comp. Appl. Math.* 1992. V. 41. P. 145–157.

Воронежский государственный университет
E-mail: igorno@icmail.ru

Поступило
08.06.2000