Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Пришляк, Векторные поля Морса–Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 254–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:28:40

УДК 517.91

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ МОРСА–СМЕЙЛА БЕЗ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А. О. Пришляк

Рассматриваются векторные поля Морса–Смейла на 3-мерных многообразиях. Дана их топологическая классификация в терминах гомеоморфизмов поверхностей с двумя наборами окружностей на них. Построен алгоритм проверки существования таких гомеоморфизмов.

Библиография: 6 названий.

В данной работе построен алгоритм, позволяющий проверять топологическую эквивалентность полей Морса–Смейла без замкнутых орбит на 3-мерных многообразиях. Значительный вклад в изучение таких полей внесли Арансон и Гринес [1], Палис и ди Мелу [2], Флейтас [3], Пеиксото [4]. Ими была получена топологическая классификация полей Морса–Смейла на 2-мерных многообразиях.

Уманским [5] построена схема динамической системы, которая есть полный топологический инвариант векторного поля Морса–Смейла на 3-мерном многообразии, но является довольно громоздкой. Построенный нами алгоритм сравнительно прост и позволяет проводить подсчет числа топологически не эквивалентных векторных полей с заданным числом особых траекторий. Соответствующий алгоритму инвариант состоит из наборов помеченных графов.

В п. 1 приводятся основные определения. В п. 2 для проверки топологической эквивалентности векторных полей Морса–Смейла на 3-мерных многообразиях по каждому полю строится поверхность с двумя наборами окружностей на ней. Доказывается критерий эквивалентности полей в терминах гомеоморфизмов таких поверхностей. В п. 3 и п. 4 строится алгоритм, позволяющий проверять существование таких гомеоморфизмов. Такой алгоритм строится для векторных полей без замкнутых орбит на ориентированных многообразиях. Этот алгоритм сводит задачу к проверке изоморфности сферических графов, которые рассматриваются в п. 5. В п. 6 полученные результаты распространяются на векторные поля Морса–Смейла на неориентируемых многообразиях.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 94-0921.

1. Основные определения. Пусть M^3 – замкнутое многообразие, X – векторное поле на нем. Поле X называется *векторным полем Морса–Смейла*, если

- 1) X имеет конечное число критических элементов (особых точек и замкнутых орбит) и все они невырожденные (гиперболические);
- 2) устойчивые и неустойчивые интегральные многообразия критических элементов пересекаются трансверсально;
- 3) предельным множеством каждой траектории является критический элемент.

Два векторных поля называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм многообразия на себя, который переводит интегральные траектории в интегральные траектории, сохраняя их ориентации. Если векторные поля Морса–Смейла топологически эквивалентны, то они имеют одинаковое число особых точек каждого индекса [2].

Под *графом* будем понимать конечный 1-мерный клеточный комплекс. *Изоморфизм графов* – это клеточный гомеоморфизм (т.е. гомеоморфизм графов, отображающий вершины в вершины, а ребра в ребра). Изоморфизмы называются *эквивалентными (равными)*, если между соответствующими гомеоморфизмами существует изотопия, постоянная в вершинах.

2. Ориентированный случай. Пусть M^3 – замкнутое ориентированное многообразие, X и X' – векторные поля Морса–Смейла без замкнутых орбит на M^3 .

Пусть $a_1, \dots, a_k$ – особые точки индекса 0 поля X , а $a'_1, \dots, a'_k$ – особые точки индекса 0 поля X' ; $b_1, \dots, b_n$ и $b'_1, \dots, b'_n$ – особые точки индекса 1 у полей X и X' соответственно. Так как X и X' – векторные поля Морса–Смейла, то каждая интегральная траектория, входящая в b_i (b'_i), начинается в какой-то a_j (a'_j). Рассмотрим регулярную окрестность объединения интегральных траекторий, которые начинаются в особых точках индекса 0 и заканчиваются в особых точках индекса 1. Обозначим через Φ границу этой окрестности для поля X и через Φ' для поля X' . Эти границы суть ориентированные поверхности рода $n - k + 1$, которые задают разбиения Хегора многообразия M^3 на два кренделя [6].

Обозначим через $v(x)$ и $u(x)$ устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия точки x , т.е. объединение всех интегральных кривых, которые заканчиваются и начинаются в точке x соответственно. Пусть $u_i = u(b_i) \cap \Phi$. Тогда $\{u_i\}$, $i = 1, \dots, n$, – набор непересекающихся окружностей на поверхности Φ , разрезая поверхность по которым мы получим k компонент связности; каждая из этих компонент есть сфера S_i с выколотыми дисками, которая соответствует особой точке a_i , а диски – особым точкам b_j .

Если $c_1, \dots, c_m$ – особые точки индекса 2, то $\{v_i = v(c_i) \cap \Phi\}$, $i = 1, \dots, m$, – другой набор окружностей на поверхности Φ . Аналогично, для поля X' на поверхности Φ' существуют два набора окружностей.

Если у векторного поля по одной особой точке индексов 0 и 3, то наборы окружностей будут системами меридианов поверхности, которые задают диаграмму Хегора многообразия M^3 [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X, X' – векторные поля Морса–Смейла на замкнутом многообразии M^3 , Φ и Φ' – отвечающие им поверхности, $\{u_i\}$, $i = 1, \dots, n$, и $\{u'_i\}$, $i = 1, \dots, n$, – первые, а $\{v_i\}$, $i = 1, \dots, m$, и $\{v'_i\}$, $i = 1, \dots, m$, – вторые наборы окружностей на них. Поле X топологически эквивалентно X' тогда и только

тогда, когда существует гомеоморфизм $f: \Phi \rightarrow \Phi'$, который переводит первый набор окружностей в первый, а второй во второй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из построения. Докажем достаточность. Пусть такой гомеоморфизм существует. Рассмотрим диски, которые лежат на неустойчивых интегральных многообразиях $u(b_i)$, содержат точки b_i и ограничены окружностями u_i . Тогда мы можем продолжить гомеоморфизмы с границ этих дисков до гомеоморфизмов самих дисков, переводящих интегральные траектории в интегральные траектории (так как каждая интегральная траектория, кроме особых точек, пересекает границу диска). Аналогично существует гомеоморфизм дисков, состоящих из частей интегральных траекторий, которые начинаются на окружностях второго типа и заканчиваются в особых точках индекса 2. Тогда поверхность вместе с этими дисками разбивает многообразие на 3-мерные диски, каждый из которых имеет по одной особой точке индекса 0 или 3. Имея гомеоморфизмы на границах этих дисков, продолжим их на внутренности. Для этого на каждой траектории, проходящей через 3-мерный диск, введем параметризацию так, чтобы параметр t был пропорционален длине дуги и чтобы источнику или стоку соответствовало значение параметра $t = 0$, а точке на границе трехмерного диска $-t = 1$. Тогда каждая точка отображается в точку с тем же значением параметра t на соответствующей траектории (соответствие между траекториями задается гомеоморфизмом границ 3-мерных дисков). Таким образом, между многообразиями нами были построены гомеоморфизмы, которые задают топологическую эквивалентность векторных полей.

3. Построение алгоритма и инварианта. Построим алгоритм, позволяющий проверять существование гомеоморфизма, который сохраняет ориентацию поверхностей и переводит первую систему кривых в первую, а вторую во вторую.

1-й шаг. Для поля X построим граф G , взяв в качестве вершин особые точки индекса 0, а в качестве ребер особые точки индекса 1. Две вершины A_i и A_j соединены ребром B_s , если существуют интегральные кривые, которые начинаются в a_i и a_j и заканчиваются в точке b_s .

По другому этот граф можно построить, взяв в качестве вершин продырявленные сферы S_i , а в качестве ребер окружности u_i . Аналогично для поля X' строим граф G' .

Первым необходимым условием топологической эквивалентности векторных полей является существование изоморфизма между графами G и G' . Если они изоморфны, то таких изоморфизмов конечное число. Дальнейшие проверки будем производить для каждого из них в отдельности. Пусть $g: G \rightarrow G'$ – один из этих изоморфизмов. Без ограничения общности можно считать, что $g(A_i) = A'_i$, $g(B_i) = B'_i$. Таким образом, у нас зафиксированы взаимнооднозначные соответствия между сферами S_i и S'_i и дырками на них.

2-й шаг. Стынем дырки в точки на каждой сфере S_i . Полученную сферу без дырок обозначим через $\tilde{S}_i$. Тогда дуги окружностей v_j , которые лежат на $\tilde{S}_i$, будут образовывать комплекс K_i , состоящий из графа, возможно несвязного, в объединении с окружностями. На каждой такой окружности поставим произвольную точку, превращая окружность в петлю. Тогда комплекс K_i превратится в граф Γ_i .

Граф, который лежит на сфере, будем называть *сферическим*. Два таких графа Γ_i и Γ'_i назовем *сферически изоморфными*, если существует сохраняющий ориентации го-

меоморфизм сфер $\tilde{S}_i$ и $\tilde{S}'_i$, который отображает Γ_i в Γ'_i . Если $\tilde{S}_i = \tilde{S}'_i$, то это равносильно существованию изотопии сферы, переводящей Γ_i в Γ'_i .

Вторым необходимым условием топологической эквивалентности векторных полей при фиксированном гомеоморфизме g является существование для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ изоморфизма сферических графов Γ_i в Γ'_i , который переводит вершины D_l в D'_l (соответствие между этими вершинами зафиксировано на первом шаге).

Как и на первом шаге, если такие изоморфизмы существуют, то их для каждого i конечное число (для каждого графа число его сферических реализаций не больше произведения количеств перестановок из чисел ребер, выходящих из каждой вершины). Мы фиксируем по одному изоморфизму $h_i: \tilde{S}_i \rightarrow \tilde{S}'_i$, $h_i(\Gamma_i) = \Gamma'_i$.

3-й шаг. Для каждого j зададим произвольным способом ориентацию на B_j (т.е. фиксируем начало и конец ребра). Тогда гомеоморфизм g индуцирует ориентацию на ребре B'_j . Если окружности второго семейства пересекают окружность u_j более чем в одной точке, то пометим одну из точек пересечения. Тогда мы фактически пометили по одной точке на границах сфер $\tilde{S}_i$ и $\tilde{S}_l$, которые касаются друг друга по окружности u_j , а на графах Γ_i и Γ_l — концы каких-то ребер, которые входят в вершины D_{j_1} и D_{j_2} , соответствующие началу и концу ребра B_j .

Прделаем ту же процедуру для поля X' . Рассмотрим на графе Γ'_i вершину, соответствующую началу B'_j . Обозначим через d_j число ребер между помеченным концом ребра графа Γ'_i в этой вершине и образом помеченного конца ребра из Γ_i при изоморфизме h_i . Отсчет этого числа ребер ведем по ориентации границы u_j соответствующей дыры (эта ориентация индуцирована ориентацией сферы $\tilde{S}_i$).

Через e_j обозначим соответствующее число ребер между помеченным концом ребра графа Γ'_l и образом помеченного конца ребра графа Γ_l для конца ребра B'_j , ведя отсчет вдоль той же ориентации u_j , как и для подсчета d_j . Если в начале и конце ребра B'_j нет помеченных точек, то положим d_j и e_j равными нулю.

Третьим необходимым условием является $d_j - e_j = 0$ для всех j .

Последовательная проверка всех трех условий составляет алгоритм проверки существования нужного гомеоморфизма поверхностей и топологической эквивалентности векторных полей.

Таким образом, мы построили инвариант векторного поля, состоящий из графа G и набора сферических графов Γ_i , у каждой вершины которых помечен один из концов ребер, входящих в нее. Два таких графа назовем эквивалентными, если для них выполняется условие теоремы из п. 4.

ПРИМЕР 1. Пусть Φ и Φ' — торы, u и u' — меридианы, v — окружность на поверхности Φ , пересекающая меридиан u в двух точках и не гомотопная 0, v'_1 и v'_2 — две окружности на Φ' , каждая из которых пересекает меридиан u' в одной точке. Тогда G и G' — графы, состоящие из одной вершины и одного ребра (петли). Существуют два изоморфизма между ними: сохраняющий и обращающий ориентацию. Пусть Γ и Γ' — соответствующие для первого изоморфизма сферические графы. Каждый из них состоит из двух вершин и двух ребер, соединяющих разные вершины. Существуют два изоморфизма f_1 и f_2 между ними (отображение вершин зафиксировано изоморфизмом между G и G'). Первый из них оставляет, а второй переставляет ребра, если ребра на каждом

графе занумеровать. Произвольным образом пометим одну из точек пересечения на меридиане u . Тогда на графе Γ мы пометили два конца разных ребер, а на графе Γ' – два конца одного ребра. Таким образом, для f_1 и f_2 имеем $d = 0, e = 1$ или $d = 1, e = 0$. Значит, условие $d - e = 0$ нарушается. Аналогично, оно нарушается и для не сохраняющего ориентацию изоморфизма графов. Таким образом, искомого гомеоморфизма поверхностей не существует и поля топологически не эквивалентны.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим векторные поля на трехмерной сфере, у которых имеется по одной особой точке каждого индекса. Тогда поверхность Φ у всех таких полей будет тором, на котором находится по одной окружности первого и второго типа, индекс пересечения которых равен ± 1 . Число точек пересечения этих окружностей равно числу особых траекторий, начинающихся в особой точке индекса 1 и заканчивающихся в особой точке индекса 2. Обозначим это число через $n(X)$. Пусть $k(n)$ – число топологически не эквивалентных векторных полей, у которых $n(X) = n$. Используя алгоритм, выпишем все сферические графы с двумя вершинами, из которых выходит по n ребер, одно из которых помечено. Среди всех таких графов выберем те, которые реализуют векторные поля на трехмерной сфере. Изоморфность их проверяется так, как в п. 5. В результате подсчетов, проведенных по данной схеме, было получено $k(1) = 1, k(3) = 1, k(5) = 5$. Подсчет топологически не эквивалентных полей на других многообразиях и с другими числами $n(X)$ проводится аналогично.

4. Достаточность алгоритма для топологической эквивалентности векторных полей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X, X' – векторные поля Морса–Смейла на замкнутом многообразии M^3 , G и G' – их графы, а Γ_i и Γ'_i – сферические графы. Поля X и X' топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм графов $g: G \rightarrow G'$, для которого существуют изоморфизмы сферических графов $h_i: \Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i$, согласованные на вершинах с изоморфизмом g и такие, что для всех j выполняется равенство $d_j - e_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость видна из построения.

Достаточность. Гомеоморфизм g устанавливает соответствие между гомеоморфными частями (сферами с дырками), на которые окружности первого типа разбивают поверхности Φ и Φ' . Гомеоморфизмы устанавливают гомеоморфизмы соответствующих частей, а условие $d_j - e_j = 0$ есть условие того, что их можно склеить в гомеоморфизм всей поверхности.

Покажем, как это сделать. Последнее условие позволяет нам выбрать другие помеченные точки (ребра) такие, что $d_j = e_j = 0$ (на $\tilde{S}_i$ – те же, а на $\tilde{S}'_i$ – образы помеченных ребер при h_i). Выколов со сфер регулярные окрестности вершин графов, получим гомеоморфизм между сферами с выколотыми дисками. Для каждой окружности u_j возникает два гомеоморфизма f_{j1} и f_{j2} как ограничения гомеоморфизмов h_i на границу. Эти гомеоморфизмы переводят помеченную точку в помеченную, а значит, они совпадают и в других точках пересечения окружности u_j с окружностями второго типа. Так как оба гомеоморфизма по построению сохраняют ориентацию, то они изотопны с изотопией, постоянной в точках пересечения. Продолжим эту изотопию до изотопии гомеоморфизма h_i на одной из сфер S_i , содержащей окружность u_j так, чтобы эта изотопия была

постоянна на графе Γ_i . Таким образом, мы заменяем гомеоморфизм h_i на изотопный ему гомеоморфизм, совпадающий с h_i на графе Γ_i и совпадающий со вторым гомеоморфизмом окружности u_j . Такую операцию продelaем для каждой окружности первого типа. Получим набор гомеоморфизмов сфер с дырками, переводящих графы на сферах в графы и совпадающих на соответствующих границах дырок. Тогда они могут быть продолжены до гомеоморфизма всей поверхности Φ .

5. Изоморфизмы сферических графов. Пусть Γ_i и Γ'_i – связные сферические графы. Если они сферически изоморфны, то они изоморфны и как простые графы. Поэтому для проверки сферической изоморфности графов проверим вначале их простую изоморфность. Если они изоморфны, то таких изоморфизмов конечное число и мы будем проверять для каждого из изоморфизмов, реализуются ли они сферическими изоморфизмами. Пусть $f_i: \Gamma_i \rightarrow \Gamma'_i$ – один из изоморфизмов, который переводит вершины p_k графа Γ_i в вершины $p'_k = f(p_k)$ графа Γ'_i , а ребра r_n – в ребра r'_n .

Предположим, что у графов нет петель (если это не так, то, ставя на каждой петле по новой вершине, мы разобьем ее на два ребра и получим графы без петель). Пометим на каждом из графов для каждой вершины по одному ребру, которое заканчивается в ней, так, чтобы при изоморфизме f_i помеченные ребра переходили в помеченные. Для каждой вершины p_k выпишем вектор w_k , состоящий из номеров ребер, входящих в эту вершину, начиная с помеченного ребра и далее подряд по ориентации на сфере.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для того чтобы связные графы Γ_i и Γ'_i были сферически изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они были изоморфны как простые графы и для каждого k были равными векторы w_k и w'_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна из построения. Докажем достаточность. Пусть D – одна из областей, на которые граф разбивает сферу. Так как граф связный, то ее внутренность есть открытый диск. Ее граница состоит из вершин и ребер. Выпишем их последовательно $(p_{k_1}, r_{n_1}, p_{k_2}, r_{n_2}, \dots, p_{k_1}, r_{n_1})$, начиная с произвольной вершины p_{k_1} и обходя область вдоль границы против ориентации границы, индуцированной ориентацией области D , совпадающей с ориентацией сферы. При этом последнее ребро заканчивается в первой вершине. Заметим, что n_m и n_{m+1} – последовательные числа в векторе $w_{k_{m+1}}$. Пусть D' – та область на сфере S'_i , граница которой содержит ребро r'_{n_1} , которое обходится против ориентации границы D' из p'_{k_1} в p'_{k_2} . Выпишем для этой области последовательно вершины и ребра, начиная с $p'_{k_1}, r'_{n_1}, p'_{k_2}$. Так как n_2 следует за n_1 в векторе $w'_{k_2} = w_{k_2}$, то следующим ребром будет r'_{n_2} . Следующей вершиной будет его второй конец p'_{k_3} и так далее. Так как между ребрами r_n и r'_n задан гомеоморфизм, то задан гомеоморфизм границ этих областей и он продолжается на внутренность этих областей как с границы диска на его внутренность. Продelaем это для каждой области. Таким образом, мы получим искомый гомеоморфизм сфер.

Заметим, что если рассматривать сферу как двумерный CW-комплекс с 0-мерными клетками – вершинами графа, 1-мерными – ребрами и 2-мерными – областями, то выписываемые последовательности вершин и ребер фактически задают приклеивающее отображение 2-мерных клеток.

Пусть теперь сферические графы Γ_i и Γ'_i не связны. Выберем на сфере $\tilde{S}_i$ непересекающийся путь, соединяющий две вершины графа Γ_i из разных компонент связности. Получим новый граф, имеющий на одну компоненту связности меньше. Рассмотрим на сфере $\tilde{S}'_i$ образы при изоморфизме f_i соединяемых вершин. Если их нельзя соединить путем без самопересечений и пересечений с графом Γ'_i , то графы Γ_i и Γ'_i не будут сферически изоморфными. Если можно, то таких соединений с точностью до изотопии, постоянной на графе, конечное число. (Если компоненты связности – точки, то все такие соединения изотопны. В общем случае их число не превосходит произведение чисел ребер, выходящих из соединяемых вершин.) Повторим эту процедуру до тех пор, пока графы не станут связными. Таким образом, для нового графа на сфере $\tilde{S}_i$ получим конечный набор изоморфных (как простые графы) графов на сфере $\tilde{S}'_i$. Тогда графы Γ_i и Γ'_i будут сферически изоморфны тогда и только тогда, когда в этом наборе графов найдется граф, сферически изоморфный построенному связному графу на сфере $\tilde{S}_i$.

6. Неориентированный случай. Если многообразие M^3 не ориентировано и не ориентирована поверхность Φ , то зафиксируем ориентации на каждой окружности первого типа и на каждой сфере с дырками, полученной после разрезания поверхности. Тогда каждой окружности на границе поставим в соответствие число D_j , равное $+1$, если ориентация окружности совпадает с ориентацией сферы, и -1 в противном случае. Выберем ориентации на окружностях первого типа и сферах с дырками для поверхности Φ' так, чтобы числа D'_j были равны D_j (если этого сделать нельзя, то поля топологически не эквивалентны). Дальнейшее построение алгоритма аналогично построению в ориентированном случае.

Автор выражает свою признательность В.В. Шарко за советы и помощь, оказанные при написании работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арансон С.Х., Гринес В.З. Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. 1986. Т. 41. № 1. С. 149–169.
- [2] Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986.
- [3] Fleitas G. Classification of gradient like flows of dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1975. V. 9. P. 155–183.
- [4] Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical Systems / ed. M. Peixoto: Acad. Press, 1973. P. 389–419.
- [5] Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: МГУ, 1991.
- [6] Zieshang H. On Heegaard diagrams of 3-manifolds // Asterisque. 1988. V. 163/164. P. 247–280.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
E-mail: prish@mechmat.univ.kiev.ua, prishlyak@yahoo.com

Поступило
11.09.1996
Исправленный вариант
01.03.2001