Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Рютин, Равномерная непрерывность обобщенных рациональных приближений, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 261–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:05:05

УДК 517.51

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

К. С. Рютин

В работе показано, что не существует равномерно непрерывных мультипликативных ε -выборок из $C[0; 1]$ на множество обобщенных рациональных дробей достаточно общего вида при малых ε .

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Работа посвящена доказательству отсутствия равномерно непрерывных ε -выборок на множество обобщенных рациональных дробей в $C[0; 1]$ при малых ε . Дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – метрическое пространство, $A \subset X$, $\varepsilon > 0$. Для $x \in X$ положим $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Отображение $\Phi: X \rightarrow A$ называется *мультипликативной* (соответственно *аддитивной*) ε -*выборкой*, если для любого $x \in X$ выполнено неравенство

$$\|\Phi(x) - x\| \leq (1 + \varepsilon)\rho(x, A)$$

(соответственно $\|\Phi(x) - x\| \leq \rho(x, A) + \varepsilon$); следовательно (в случае мультипликативной выборки), ограничение Φ на A – тождественное отображение. Выборка называется *непрерывной* (*липшицевой*), если Φ непрерывно (липшицево).

Для дальнейшего понадобится определить еще один важный объект – обобщенные рациональные дроби. Всюду в дальнейшем X – некоторое банахово пространство функций, определенных на отрезке $[0; 1]$; наиболее интересны случаи $X = L_p[0; 1]$ и $X = C[0; 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V, W – подпространства X . Положим

$$R_{V,W} = \left\{ r = \frac{v}{w} : v \in V, w \in W, r \in X \right\}.$$

Разумеется, мы предполагаем, что $R_{V,W} \neq \emptyset$ и $R_{V,W}$ – замкнутое подмножество X . Чтобы это было заведомо выполнено, мы в дальнейшем определим это множество более аккуратно. В случае, когда V, W – подпространства многочленов степеней не выше m и n соответственно, вместо $R_{V,W}$ мы будем использовать стандартное обозначение $R_{m,n}$. Еще один важный частный случай: $W = \langle 1 \rangle$. Тогда $\dim W = 1$ и $R_{V,W} = V$ –

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96109.

подпространство в X . Здесь и всюду в дальнейшем под $\langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$, где $\{f_j\}_{j=1}^k \subset X$, а $k \in \mathbb{N}$, понимается линейная оболочка $f_1, f_2, \dots, f_k$. У нас чаще всего f_j будут выбираться линейно независимыми.

Первые результаты о существовании непрерывных ε -выборок на множества обобщенных рациональных дробей были получены Конягиным, который доказал в [1] для любых V, W и для любого $\varepsilon > 0$ существование непрерывной аддитивной ε -выборки из $C[0; 1]$ в $R_{V, W}$. Отсутствие непрерывной ε -выборки при малых ε из пространства $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$, на множество $R_{m, n}$, $n > 1$, доказано в работе Царькова [2]. Альбрехтом в работе [3] исследовался вопрос о существовании выборок на подпространства. Вопросами устойчивости непрерывных выборок занимался Маринов в [4]. Он, в частности, получил оценки устойчивости выборок через модуль выпуклости пространства. Конягину принадлежит первый отрицательный результат о существовании равномерно непрерывных операторов обобщенного рационального приближения. В работе [5] им анонсирована следующая

ТЕОРЕМА А. *При любом $\varepsilon \in (0; 2)$ не существует равномерно непрерывной ε -выборки из $C[0; 1]$ в $R_{0, 1}$.*

Доказательство этой теоремы содержится в работе автора [6]. В той же работе доказана следующая

ТЕОРЕМА В. *Найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ существует липшицева мультипликативная ε -выборка из $C[0; 1]$ в $R_{0, 1}$.*

Для построения этой выборки был применен метод усреднения, использованный в частной ситуации Альбрехтом в [3]. В этой работе мы получим обобщение теоремы Конягина [5].

Все рассматривавшиеся в работах [1], [2], [5], [6] множества $R_{V, W}$ состояли из вещественнозначных обобщенных рациональных функций. Мы же рассматриваем как $\mathbb{R}$ -, так и $\mathbb{C}$ -значные рациональные дроби. Всюду в дальнейшем $X = C[0; 1]$ (пространство непрерывных $\mathbb{R}$ - или же $\mathbb{C}$ -значных функций с $\sup$ -нормой, каждый раз мы будем оговаривать особо, какое поле скаляров рассматриваем). Кроме того, мы рассматриваем только мультипликативные ε -выборки.

2. Формулировки теорем. В дальнейшем будем считать, что $\dim V, \dim W < \infty$; более того, $\dim V = 1$, $\dim W = n \geq 2$, $V = \langle \varphi_0 \rangle$, $W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Кроме того, предполагаем, что $\{w_j\}_{j=1}^n$ – базис W . Наложим некоторые дополнительные ограничения на V и W . Во-первых, всюду в дальнейшем считаем, что $X = C[0; 1]$ и $R_{V, W} \subset C[0; 1]$. Поэтому $\varphi_0, w_j \in C[0; 1]$. В зависимости от ситуации V, W будут подпространствами в пространстве всех непрерывных $\mathbb{R}$ - или же $\mathbb{C}$ -значных функций. Теперь мы дадим аккуратное определение множества обобщенных рациональных дробей в $C[0; 1]$, которое годится и в действительном, и в комплексном случаях:

$$R_{V, W} = \text{Cl} \left\{ r = \frac{v}{w} : v \in V, w \in W, w \neq 0 \text{ на } [0; 1] \right\},$$

где под $\text{Cl } A$ понимается замыкание множества A .

Сначала наложим некоторые, впрочем довольно естественные, условия на V, W в $\mathbb{R}$ -случае; потом скажем, какие изменения надо внести, если функции $\mathbb{C}$ -значные.

УСЛОВИЕ 1. Для всех $\tau \in [0; 1]$ функция $\varphi_0(\tau) > 0$.

УСЛОВИЕ 2. Существует $f \in W$ такая, что $f(\tau) > 0$ для всех $\tau \in [0; 1]$.

УСЛОВИЕ 3. Множество нулей всякой функции $f \in W$ такой, что $f \not\equiv 0$, нигде не плотно на $[0; 1]$.

В $\mathbb{C}$ -случае условия 1, 2 надо сформулировать в виде: $\varphi_0(\tau) \neq 0$ для всех $\tau \in [0; 1]$ и существует $f \in W$ такая, что $f(\tau) \neq 0$ для всех $\tau \in [0; 1]$. Условие 3 переносится на $\mathbb{C}$ -случай дословно. Из условия 1 следует (в $\mathbb{R}$ -случае) существование $\alpha > 0$ такого, что $\varphi_0(\tau) > \alpha$ для всех $\tau \in [0; 1]$. Из-за нетривиальности $R_{V,W}$ приходим к необходимости условия 2.

Условию 3 удовлетворяют аналитические функции и, в частности, многочлены. Договоримся писать $R_{\mathbb{R}}$ или $R_{\mathbb{C}}$ в зависимости от того, какие дроби (вещественные или же комплексные) мы рассматриваем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если выполнены условия 1–3 на подпространства V, W , то

$$\left\{ r = \frac{v}{w} : v \in V, w \in W, w \neq 0 \text{ на } [0; 1] \right\}$$

– замкнутое подмножество $C[0; 1]$ и, следовательно, совпадает с $R_{V,W}$.

Убедимся в справедливости этого замечания. Пусть $r^k = \varphi_0/w^k \rightarrow r^0 \in C[0; 1]$ при $k \rightarrow \infty$, где $w^k \in W$ – знаменатель k -й дроби. Достаточно показать, что w^k стремится к некоторому элементу $w^0 \in W$, так как из этого следует, что w^0 не обращается в нуль на $[0; 1]$ (в противном случае $r^0 \notin C[0; 1]$). Предположим, что $\{w^k\}_{k=1}^{k=\infty}$ – неограниченная последовательность в W , в противном случае из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что $r^0 \equiv 0$. Рассмотрим $\tilde{w}^k \in W$ такие, что $w^k = \|w^k\| \tilde{w}^k$. Так как для любого k $\|\tilde{w}^k\| = 1$, то из последовательности $\{\tilde{w}^k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\tilde{w}^k \rightarrow w^0$. Заметим, что $\|w^0\| = 1$ и, следовательно, множество нулей функции w^0 нигде не плотно на отрезке $[0; 1]$ в силу условия 3 на W . Следовательно, из последовательности w^k можно извлечь подпоследовательность, которая на всюду плотном подмножестве отрезка $[0; 1]$ стремится к ∞ . Тем самым, $r^0 = 0$ на всюду плотном множестве, а следовательно, $r^0 \equiv 0$.

Этим замечанием мы будем пользоваться при всех дальнейших рассмотрениях.

ТЕОРЕМА 1. Пусть V, W удовлетворяют условиям 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 2)$ не существует равномерно непрерывной мультипликативной ε -выборки из шара в $C[0; 1]$ на $R_{\mathbb{R}} = R_{V,W}$.

В $\mathbb{C}$ -случае ограничение на ε получается хуже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть V, W удовлетворяют условиям 1–3. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ не существует равномерно непрерывной мультипликативной ε -выборки из шара в $C[0; 1]$ на $R_{\mathbb{C}} = R_{V,W}$.

Наложенные в теореме 1 условия на подпространства V, W не являются необходимыми. Автору известны некоторые случаи, когда теорема 1 справедлива и при этом φ_0 имеет нули на отрезке $[0; 1]$. Получены и некоторые результаты, аналогичные теореме 1, при $\dim V > 1$.

3. Вспомогательные утверждения. Доказательство в случае вещественного и комплексного поля скаляров идет по единой схеме, поэтому будет вестись одновременно. Если какие-то детали доказательства будут отличаться, мы будем всякий раз оговаривать, как надо действовать в $\mathbb{R}$ - или же $\mathbb{C}$ -случае. Сформулируем лемму, справедливую в обоих случаях.

ЛЕММА 1. Пусть W – подпространство в $C[0; 1]$, для которого выполнено условие 3 и $\dim W = n$. Предположим дополнительно, что найдется точка $\tau_0 \in [0; 1]$, в которой $f(\tau_0) = 0$ для всех $f \in W$. Тогда для любых $a > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всякой функции $f \in W$ такой, что $\|f\|_{C[\tau_0; \tau_0 + \varepsilon]} \leq 1$, выполнено неравенство $\|f\|_{C[\tau_0; \tau_0 + \delta]} \leq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать лемму будем сразу в $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -случаях. Обозначим через $\mathbb{K}$ рассматриваемое поле скаляров. Пусть $f = \sum_{j=1}^n a_j w_j$, где $\{w_j\}$ – стандартный базис W , а $a_j \in \mathbb{K}$. В силу условий леммы $w_j(\tau_0) = 0$ для всех j . Будем обозначать той же буквой W подпространство в $C[\tau_0; \tau_0 + \varepsilon]$, порожденное ограничениями функций из W на отрезок $[\tau_0; \tau_0 + \varepsilon]$.

Введем на W две нормы:

$$\|f\|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j|, \quad \|f\|_2 = \|f\|_{C[\tau_0; \tau_0 + \varepsilon]}.$$

Заметим, что $\|f\|_2$ является нормой по условию 3 на подпространство W . Подпространство W конечномерное, поэтому на нем все нормы эквивалентны. Следовательно, найдется $C > 0$ такое, что из $\|f\|_2 \leq 1$ следует

$$\|f\|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j| \leq C.$$

Теперь выберем $\delta > 0$ со свойством $\omega(w_j, \delta) \leq a/C$ для всех j , где через $\omega(g, \delta)$ обозначен модуль непрерывности функции g . Для произвольного числа $\tau \in (0; \delta]$ имеем

$$|f(\tau_0 + \tau)| = |f(\tau_0 + \tau) - f(\tau_0)| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \max_j \omega(w_j, \delta) \leq a.$$

Заметим, что если зафиксировать a , то в лемме фактически построена функция $\delta = \delta(\varepsilon)$, которую можно считать монотонно возрастающей.

Теперь приступим к построению удобного для доказательства теоремы базиса в подпространстве W .

ЛЕММА 2. А) $\mathbb{C}$ -случай. Пусть W – подпространство в $C[0; 1]$ и $\dim W \geq 2$. Предположим дополнительно, что найдется $f \in W$, которая не обращается в 0 на $[0; 1]$. Тогда для любого числа $A \in (1; 2)$ существуют линейно независимые функции $w_1, w_2 \in W$ и число $\tau_0 \in [0; 1]$, для которых будут выполнены следующие условия:

1) $w_2(\tau_0) = 0$, $w_1 + Mw_2 \neq 0$ на $[0; 1]$ для всех $M > 0$ и, более того,

$$\left\| \frac{1}{w_1 + Mw_2} \right\| \leq 1 \quad \text{для всех } M > 0;$$

2) $\left\| \frac{1}{w_1} \right\| = 1$, $|w_1(\tau_0)| < A$ и $w_1 \neq 0$ на $[0; 1]$.

В) $\mathbb{R}$ -случай. Пусть W – подпространство в $C[0; 1]$ и $\dim W \geq 2$. Предположим дополнительно, что найдется положительная $f \in W$. Тогда для любого числа $A \in (1; 2)$ существуют линейно независимые функции $w_1, w_2 \in W$ и число $\tau_0 \in [0; 1]$, для которых будут выполнены следующие условия:

- 1) $w_2(\tau_0) = 0$, $w_2 \geq 0$ на $[0; 1]$;
- 2) $\left\| \frac{1}{w_1} \right\| = 1$, $w_1(\tau_0) < A$ и $w_1 > 0$ на $[0; 1]$.

Заметим, что для рассматриваемого в теореме 1 подпространства W выполнены все условия леммы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем вести доказательство случая А), указывая, какие изменения надо вносить в доказательство, чтобы получить случай В). По условию леммы имеется функция $f \in W$, которая нигде не обращается в 0 на $[0; 1]$. Кроме того, найдется линейно независимая с f функция $g \in W$.

Обозначим $\Omega_g = \{z \in \mathbb{C} : \exists \tau \in [0; 1] \ (zf + g)(\tau) = 0\}$. Заметим, что Ω_g – компактное подмножество $\mathbb{C}$. Пусть точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega_g$ такая, что

$$x_0 = \max_{z \in \Omega_g} \{\operatorname{Re} z\}, \quad f_2 = z_0 f + g.$$

Из линейной независимости f и g следует $f_2 \neq 0$. Построим аналогичную функцию f_2 в случае В). По условию В) имеется функция $f \in W$ такая, что $f > 0$ на $[0; 1]$. Кроме того, найдется линейно независимая с f функция $g \in W$, которая может, вообще говоря, принимать как положительные, так и отрицательные значения на отрезке $[0; 1]$. Положим

$$\lambda_0 = \inf_{\lambda} \{\lambda : \lambda f + g \geq 0 \text{ на } [0; 1]\}, \quad f_2 = \lambda_0 f + g.$$

Из линейной независимости f и g следует $f_2 \neq 0$. Далее доказательство идет сходным образом в обоих случаях А) и В). Установим одно свойство функций f , f_2 , справедливое в обоих случаях. Для любой точки $\tau \in [0; 1]$ и числа $s > 0$ справедливо неравенство

$$|(sf + f_2)(\tau)| \geq \max\{s|f(\tau)|, |f_2(\tau)|\}. \quad (1)$$

В вещественном случае неравенство (1) очевидно (обе функции f и f_2 неотрицательны) и, более того, можно убрать модули. Установим неравенство (1) в случае А). По нашему выбору f , f_2 для любого $z \in \mathbb{C}$ такого, что $\operatorname{Re} z > 0$, выполнено следующее: $f_2 + zf$ не обращается в 0 на $[0; 1]$. Из этого следует, что для любого $\tau \in [0; 1]$ такого, что $f_2(\tau) \neq 0$, выполнено

$$|\arg f_2(\tau) - \arg f(\tau)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тем самым, требуемое неравенство (1) установлено.

Пусть

$$T = \{\tau \in [0; 1] : f_2(\tau) = 0\}$$

– множество нулей f_2 . Тогда T – компактное собственное подмножество отрезка $[0; 1]$. Следовательно, найдется $\tau_0 \in T$ такое, что $f(\tau_0) = \min_{\tau \in T} |f(\tau)|$. Построение функции w_1 проводится единым образом в обоих случаях А), В). Рассмотрим семейство функций из $C[0; 1]$: $f_s = sf + f_2$, где $s \geq 0$ – “малый параметр”. По нашим построениям $f_s \neq 0$

на $[0; 1]$ для всех $s > 0$. Для доказательства леммы достаточно показать, что найдется $s_0 > 0$, для которого будет выполнено условие

$$\frac{|f_{s_0}(\tau_0)|}{\min_{\tau \in [0; 1]} |f_{s_0}(\tau)|} < A.$$

Заметим, что $f_s(\tau_0) = s f(\tau_0)$ для всех $s \geq 0$.

Рассмотрим покрытие множества T открытыми интервалами U_j такими, что для любого j и для любых $\tau_1, \tau_2 \in U_j$ выполнено

$$|f(\tau_1) - f(\tau_2)| \leq \frac{A-1}{A} |f(\tau_0)|.$$

Благодаря компактности T такой набор множеств U_j можно считать конечным. Рассмотрим $D = [0; 1] \setminus (\bigcup_j U_j)$. Разумеется, D – компактное подмножество $[0; 1]$. Поэтому существует

$$\min_{\tau \in D} |f_2(\tau)| = h > 0.$$

Теперь займемся выбором необходимого нам значения s_0 . Если $\tau \in \bigcup_j U_j$, то по неравенству (1)

$$|f_s(\tau)| \geq s |f(\tau)| \geq s \left(|f(z)| - \frac{A-1}{A} |f(\tau_0)| \right) \geq s \frac{|f(\tau_0)|}{A},$$

мы выбрали некоторый $z \in T$ таким образом, что z, τ принадлежат одному U_j . Если $\tau \in D$, то

$$|f_s(\tau)| \geq |f_2(\tau)| \geq h > s \frac{|f(\tau_0)|}{A}.$$

Самое левое неравенство выполнено при $s < hA/|f(\tau_0)|$. Выберем какое-нибудь число s_0 , удовлетворяющее этому неравенству, и отвечающую ему функцию f_{s_0} .

Нормируем f_{s_0} таким образом, что для функции $w_1 = \alpha f_{s_0}$, $\alpha > 0$, выполнено

$$\left\| \frac{1}{w_1} \right\| = 1.$$

Обозначим $w_2 := f_2$. Из построения вытекает, что $w_1 + Mw_2 \neq 0$ на $[0; 1]$ для всех $M > 0$. Более того, из неравенства (1) следует, что

$$\left\| \frac{1}{w_1 + Mw_2} \right\| \leq 1$$

для всех $M > 0$. Итак, требуемые w_1, w_2 построены.

Дополним построенные в лемме 2 w_1, w_2 до базиса W . Можно считать $w_j(\tau_0) = 0$ для всех $j \geq 2$. Теперь можно перейти собственно к доказательству теоремы 1.

4. Доказательство теорем 1 и 2. Доказываются обе теоремы одним и тем же рассуждением, только в одном месте при доказательстве можно сделать в вещественном случае более точную оценку. Доказательству теоремы предположим

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточно доказывать теорему в предположении $\varphi_0 \equiv 1$, ибо в силу однородности $R_{V,W}$ можно от пары (V, W) перейти к $(\widetilde{V}, \widetilde{W})$, которая задает такое же $R_{V,W}$. А именно, $\widetilde{V} = \langle 1 \rangle$, $\widetilde{W} = \langle w_1/\varphi_0, \dots, w_n/\varphi_0 \rangle$. Заметим, что для $\widetilde{W}$, по-прежнему, выполнены условия 2 и 3.

Доказывать теорему будем методом от противного. Пусть Φ – равномерно непрерывная мультипликативная ε -выборка из единичного шара в $C[0; 1]$ на $R_{V,W}$, $0 < \varepsilon < 2$. Через $\omega(\delta)$ обозначим модуль непрерывности отображения Φ . Для сокращения записи обозначим $R = R_{V,W}$. Благодаря замечанию 1 можно считать, что $V = \langle 1 \rangle$. Обозначим $x_0 = 1/w_1$, $x_1 = 1/(w_1 + Mw_2)$, $M > 1$ – число. Мы используем построенный выше базис $\{w_j\}$. В дальнейшем мы устремим M к $+\infty$. Рассмотрим отрезок

$$x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, \quad \lambda \in [0; 1],$$

который лежит в единичном шаре пространства $C[0; 1]$. Введем следующие обозначения:

$$\Phi(x_\lambda) = \frac{a_\lambda}{w_1 + p_\lambda}, \quad p_\lambda \in \langle w_2, \dots, w_n \rangle.$$

Заметим, что p_λ однозначно определяется по Φ , x_λ и $p_\lambda(\tau_0) = 0$ для всех $\lambda \in [0; 1]$. Оценим

$$\|\Phi(x_\lambda) - \Phi(x_\mu)\| \leq \omega(\|x_\lambda - x_\mu\|) = \omega(|\lambda - \mu| \cdot \|x_0 - x_1\|).$$

Применив неравенство $\omega(k\delta) \leq k\omega(\delta)$, справедливое для любого числа $k \in \mathbb{N}$ и любого модуля непрерывности, получим

$$\|\Phi(x_\lambda) - \Phi(x_\mu)\| \leq \omega(2|\lambda - \mu|) \leq 2\omega(|\lambda - \mu|).$$

Следовательно,

$$\frac{|a_\lambda - a_\mu|}{|w_1(\tau_0)|} = |\Phi(x_\lambda)(\tau_0) - \Phi(x_\mu)(\tau_0)| \leq \|\Phi(x_\lambda) - \Phi(x_\mu)\| \leq 2\omega(|\lambda - \mu|).$$

Итак,

$$|a_\lambda - a_\mu| \leq L\omega(|\lambda - \mu|),$$

где $L > 0$ не зависит от выбора x_0, x_1, M . Покажем, что для всех $\lambda \in [0; 1]$

$$\rho(x_\lambda, R) \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

В самом деле, $\lambda x_1, (1 - \lambda)x_0 \in R$, поэтому

$$\rho(x_\lambda, R) \leq \min\{\lambda\|x_1\|, (1 - \lambda)\|x_0\|\} \leq \frac{1}{2}.$$

В вещественном случае (теорема 1) эту оценку можно усилить. А именно, выполнено неравенство

$$\rho(x_\lambda, R) \leq \frac{1}{3}. \quad (3)$$

Докажем его. Возможны два случая: $\lambda \in [0; 1/3] \cup [2/3; 1]$ и $\lambda \in [1/3; 2/3]$. В первом из них требуемое неравенство очевидно. В самом деле, $\lambda x_1, (1 - \lambda)x_0 \in R$, поэтому

$$\rho(x_\lambda, R) \leq \min\{\lambda\|x_1\|, (1 - \lambda)\|x_0\|\} \leq \frac{1}{3}.$$

Во втором можно приблизить x_λ функцией

$$\frac{2}{3}x_0 = \frac{2}{3w_1} \in R,$$

и требуемое неравенство получится. А именно,

$$\rho(x_\lambda, R) \leq \left\| x_\lambda - \frac{2}{3w_1} \right\| \leq \frac{1}{3}.$$

Докажем последнее неравенство. Имеем

$$-\frac{1}{3}x_0 \leq (1 - \lambda)x_0 - \frac{2}{3}x_0 \leq (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 - \frac{2}{3}x_0 \leq (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_0 - \frac{2}{3}x_0 = \frac{1}{3}x_0.$$

При доказательстве теоремы 2, используя определение мультипликативной ε -выборки и применяя неравенство (2), имеем

$$\|\Phi(x_\lambda) - x_\lambda\| \leq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon).$$

Используя явный вид x_λ , получаем

$$\left| \frac{1}{w_1(\tau_0)} - \frac{a_\lambda}{w_1(\tau_0)} \right| \leq \frac{1}{2}(1 + \varepsilon),$$

откуда следует неравенство

$$|a_\lambda| \geq 1 - \frac{1}{2}|w_1(\tau_0)|(1 + \varepsilon).$$

Поэтому при $\varepsilon < 1$ выполнено $(1 + \varepsilon)/2 < 1$, и согласно утверждению А) леммы 2 можно выбрать w_1 так, что

$$\frac{1}{2}|w_1(\tau_0)|(1 + \varepsilon) < 1.$$

Итак, при всех $\lambda \in [0; 1]$ выполнено

$$|a_\lambda| \geq \beta_0,$$

где $\beta_0 > 0$ и не зависит от выбора M .

Аналогичным образом при доказательстве теоремы 1, используя определение мультипликативной ε -выборки, неравенство (3) и явный вид x_λ , получим, что при любом $\varepsilon < 2$ согласно утверждению В) леммы 2 можно выбрать w_1 так, что

$$\frac{1}{3}w_1(\tau_0)(1 + \varepsilon) < 1.$$

И, следовательно, при всех $\lambda \in [0; 1]$ выполнено

$$a_\lambda \geq \beta_0,$$

где $\beta_0 > 0$ не зависит от выбора M .

В дальнейшем доказательство теорем 1 и 2 проходит одинаково. Из наших рассуждений следует существование константы $C > 0$, не зависящей от параметра M , такой, что для любых $\lambda, \mu \in [0; 1]$

$$\left\| \frac{1}{w_1 + p_\lambda} - \frac{1}{w_1 + p_\mu} \right\| \leq C\omega(|\lambda - \mu|). \quad (4)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |a_\lambda| \cdot \left\| \frac{1}{w_1 + p_\lambda} - \frac{1}{w_1 + p_\mu} \right\| - |a_\lambda - a_\mu| \cdot \left\| \frac{1}{w_1 + p_\mu} \right\| &\leq \left\| \frac{a_\lambda}{w_1 + p_\lambda} - \frac{a_\mu}{w_1 + p_\mu} \right\| \\ &\leq 2\omega(|\lambda - \mu|). \end{aligned}$$

Введем важную величину

$$t_\lambda = \inf \{ t > 0 : \|p_\lambda\|_{C[\tau_0; \tau_0+t]} = 1, |p_\lambda(s)| < 1 \ \forall s : 0 \leq s < t \},$$

если этот $\inf$ существует и принадлежит интервалу $(0; 1 - \tau_0]$, в противном случае $t_\lambda := 1 - \tau_0$. Разумеется, мы предполагаем (и это не ограничивает общности), что $\tau_0 \neq 1$. Вспомним, что $p_\lambda(\tau_0) = 0$, поэтому если требуемый $\inf$ существует, то он не равен нулю.

Пусть $t_\lambda > t_\mu$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{w_1 + p_\lambda} - \frac{1}{w_1 + p_\mu} \right\| &\geq \left\| \frac{p_\lambda - p_\mu}{(w_1 + p_\lambda)(w_1 + p_\mu)} \right\|_{C[\tau_0; \tau_0+t_\mu]} \\ &\geq \frac{\|p_\lambda - p_\mu\|_{C[\tau_0; \tau_0+t_\mu]}}{(n_1 + 1)^2} \geq \gamma(1 - \|p_\lambda\|_{C[\tau_0; \tau_0+t_\mu]}), \end{aligned}$$

где $n_1 = \|w_1\|_{C[0;1]}$, а $\gamma > 0$ не зависит от выбора M . Итак, мы получили, что при $t_\lambda > t_\mu$ выполнено неравенство

$$\|p_\lambda\|_{C[\tau_0; \tau_0+t_\mu]} \geq 1 - A\omega(|\lambda - \mu|),$$

где $A > 0$ не зависит от M, λ, μ . Вспомним, что в лемме 1 фактически построена монотонно возрастающая функция $\delta = \delta(\varepsilon)$ (при фиксированном $a > 0$). Мы применяем эту лемму к $\langle w_2, \dots, w_n \rangle$. Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[0; 1]$ на N частей

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 = \frac{1}{N} < \dots < \lambda_N = 1.$$

Число N мы выберем достаточно большим для того, чтобы для всех $0 \leq j < N$ было выполнено $a := 1 - A\omega(|\lambda_j - \lambda_{j+1}|) > 0$.

Чтобы не использовать двойные индексы, будем писать p_j вместо p_{λ_j} и t_j вместо t_{λ_j} . Заметим, что $t_0 = 1 - \tau_0$ и $t_N \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. В самом деле, так как множество нулей w_2 нигде не плотно на $[0; 1]$, на любом интервале $(0; d)$ найдется точка $\hat{\tau}$ такая, что $|w_2(\tau_0 + \hat{\tau})| > 0$, поэтому из $M > 1/|w_2(\tau_0 + \hat{\tau})|$ следует $t_N \in (0; \hat{\tau})$. Используя лемму 1 (монотонность функции $\delta(\varepsilon)$, построенной в этой лемме), получим

$$t_1 > \delta(t_0), \quad t_2 > \delta(t_1) > \delta \circ \delta(t_0).$$

Учитывая, что $t_0 = 1 - \tau_0$, имеем

$$t_N > \delta \circ \delta \circ \dots \circ \delta(1 - \tau_0) > 0.$$

В последнем неравенстве правая часть не зависит от M , а левая стремится к 0 при $M \rightarrow \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Автор благодарит С. В. Конягина за постановку задач и общее руководство работой; В. М. Тихомирова и И. Г. Царькова за помощь в редактировании и большое количество замечаний, которые способствовали значительному улучшению текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Конягин С. В. О непрерывности операторов обобщенного рационального приближения // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 3. С. 404.
- [2] Царьков И. Г. Свойства множеств, обладающих непрерывной выборкой из оператора P^δ // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 122–131.
- [3] Альбрехт П. В. Порядки модулей непрерывности операторов почти наилучшего приближения // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 3–28.
- [4] Маринов А. В. Оценки устойчивости непрерывной селекции для метрической почти-проекции // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 4. С. 47–53.
- [5] Конягин С. В. О равномерной непрерывности операторов рационального приближения. Теория приближений и задачи вычислительной математики. Т. 108. Днепропетровск, 1993.
- [6] Рютин К. С. Липшицевость ретракций и оператор обобщенного рационального приближения // Фундамент. и прикл. матем. 2000. Т. 6. № 4. С. 1205–1220.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: rutin@mccme.ru

Поступило
10.04.2000
Исправленный вариант
04.12.2000