Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, η -инвариант и двойственность Понтрягина в K -теории, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 271–291

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:14:27

УДК 517.9

η -ИНВАРИАНТ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПОНТРЯГИНА В K -ТЕОРИИ

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин

В работе исследуется топологический смысл спектрального η -инварианта Атьи–Пато́ди–Зингера. Показано, что удвоенная дробная часть инварианта вычисляется как индекс зацепления в K -теории с ориентирующим пучком многообразия. Из двойственности Понтрягина вытекает невырожденность спаривания, определяемого индексом зацепления. Построен пример нетривиальной дробной части для оператора четного порядка.

Библиография: 24 названия.

Введение

Гилки заметил [1], что η -инвариант Атьи–Пато́ди–Зингера [2] является жестким в классе дифференциальных операторов на замкнутых многообразиях при условии

$$\text{ord } A + \dim M \equiv 1 \pmod{2}.$$

Более точно, дробная часть спектрального η -инварианта эллиптического самосопряженного дифференциального оператора A в этом случае определяется его главным символом и является гомотопическим инвариантом главного символа.

В таких рамках η -инвариант геометрических операторов первого порядка на четномерных многообразиях был изучен в работе [3]. Оказалось, что в этом случае инвариант принимает только двоично-рациональные значения. Причем нетривиальные дробные части отличные от $1/2$ возникают только на неориентируемых многообразиях. Типичным примером является (самосопряженный) оператор Дирака на многообразиях с pin^c структурой в касательном расслоении. Такие операторы определены, например, на проективных пространствах $\mathbb{RP}^{2n}$. В этом случае дробная часть спектрального η -инварианта является важным инвариантом pin^c кобордизма [4]. Ситуация с общими дифференциальными операторами оставалась открытой. Более того, в случае операторов четного порядка на нечетномерных многообразиях до недавнего времени не был выяснен даже вопрос о нетривиальности дробной части η -инварианта. В настоящей работе эти пробелы заполняются.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-01100, № 99-01-01254 и № 00-01-00161, и Институтом математики Потсдамского Университета.

При вычислении дробного гомотопического инварианта возникает естественный вопрос: в каких терминах может быть получена формула для такого инварианта? Одним из кандидатов является выражение инварианта при помощи *индексов зацепления* [5], [6]. В теории гомологий эти индексы определяют билинейное отображение

$$\mathrm{Tor} H_i(M) \times \mathrm{Tor} H_{n-i-1}(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

элементов конечного порядка для ориентированного замкнутого n -мерного многообразия. Индекс зацепления имеет многочисленные приложения (см. [7]–[11]).

В настоящей работе по аналогии с теорией гомологий исследуется форма зацепления в K -теории и в эллиптической теории (последняя возникла также в работе [12]). Двойственность Понтрягина в K -теории позволяет доказать невырожденность формы зацепления. Основным результатом работы является равенство удвоенной дробной части η -инварианта и индекса зацепления главного символа эллиптического оператора с ориентирующим пучком многообразия. Используя это равенство и свойства формы зацепления, доказывается нетривиальность дробной части η -инварианта для некоторых операторов четного порядка.

Доказательства указанных результатов основаны на редукции рассматриваемого спектрального инварианта к гомотопическому инварианту размерности подпространств, определяемых псевдодифференциальными проекторами, который рассматривался в [13], [14]. Общая формула индекса эллиптических операторов в подпространствах из этих работ позволяет выразить дробную часть функционала размерности через индекс операторов в эллиптической теории с коэффициентами в конечной циклической группе $\mathbb{Z}_n$, что вместе с соответствующей теоремой об индексе по модулю n дает выражение рассматриваемого дробного инварианта в топологических терминах.

Коротко о содержании работы. В первом разделе для удобства читателей напоминает связь η -инварианта и функционала размерности подпространств, определяемых псевдодифференциальными проекторами. Здесь кратко излагаются необходимые результаты работ [13]–[15]. Приводится также выражение дробной части этих функционалов через индекс эллиптических операторов в подпространствах. В начале второго раздела кратко излагаются основные результаты работы [16] о теории индекса по конечному модулю. Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству двойственности Понтрягина в K -теории. Далее, в третьем разделе вводится спаривание зацепления. В четвертом разделе вычисляется действие антиподальной инволюции в K -группах вещественных векторных расслоений. Здесь используется описание [17] этих групп в терминах алгебр Клиффорда. Далее сформулирована основная теорема работы, выражающая удвоенную дробную часть функционала размерности через коэффициент зацепления. Обсуждаются примеры. В частности, на основе “скрещенного произведения” [18] эллиптических операторов построено четное подпространство, на котором функционал размерности принимает значение с ненулевой дробной частью. Это дает положительный ответ на вопрос о нахождении оператора четного порядка с ненулевой дробной частью η -инварианта, который был поставлен Гилки.

Мы признательны проф. П. Гилки за плодотворную дискуссию по полученным результатам.

1. η-инвариант и индекс в подпространствах

1. Пусть E – векторное расслоение на гладком многообразии M . Линейное подпространство $\hat{L} \subset C^\infty(M, E)$ называется *псевдодифференциальным*, если оно определяется некоторым псевдодифференциальным проектором P порядка нуль следующим образом:

$$\hat{L} = \text{Im } P, \quad P: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E).$$

Векторное расслоение $L = \text{Im } \sigma(P) \subset \pi^*E$ на многообразии косфер S^*M называется *символом* подпространства.

Рассмотрим на кокасательном расслоении T^*M антиподальную инволюцию

$$\alpha: T^*M \rightarrow T^*M, \quad \alpha(x, \xi) = (x, -\xi).$$

Подпространство $\hat{L} \subset C^\infty(M, E)$ называется *четным* (*нечетным*), если его символ L инвариантен (антиинвариантен) относительно инволюции:

$$L = \alpha^*L \quad \text{или} \quad L \oplus \alpha^*L = \pi^*E. \quad (1)$$

Обозначим через $\widehat{\text{Even}}(M)$ (соответственно $\widehat{\text{Odd}}(M)$) полугруппы всех четных (соответственно нечетных) псевдодифференциальных подпространств относительно операции прямой суммы.

Псевдодифференциальные подпространства можно задавать также при помощи самосопряженных эллиптических операторов. При этом понятие четности подпространств соответствует четности порядка дифференциальных операторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – эллиптический самосопряженный оператор неоприцательного порядка. Тогда подпространство $\hat{L}_+(A)$, порожденное собственными векторами оператора A с неотрицательными собственными значениями, является псевдодифференциальным, а его символ $L_+(A)$ равен неотрицательному спектральному подрасслоению главного символа $\sigma(A)$:

$$L_+(A) = L_+(\sigma(A)) \in \text{Vect}(S^*M).$$

Если оператор A является дифференциальным или удовлетворяет более слабому условию

$$\alpha^*\sigma(A) = \pm\sigma(A)$$

на главный символ, то подпространство $\hat{L}_+(A)$ является четным (нечетным).

Доказательство этого утверждения можно найти в [19] или [14].

На множестве четных подпространств на нечетномерных многообразиях и нечетных – на четномерных определен гомотопически инвариантный функционал, являющийся аналогом понятия размерности конечномерных пространств.

ТЕОРЕМА 1 [13], [14]. *Существует аддитивный гомотопически инвариантный функционал*

$$d: \widehat{\text{Even}}(M^{\text{odd}}) \rightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad \text{и} \quad d: \widehat{\text{Odd}}(M^{\text{ev}}) \rightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right],$$

который однозначно определяется следующими свойствами:

- 1) (относительная размерность)

$$d(\widehat{L} + L_0) - d(\widehat{L}) = \dim L_0$$

для пары $\widehat{L} + L_0$, $\widehat{L}$ подпространств, отличающихся на конечномерное пространство L_0 ;

- 2) (дополнительность)

$$d(\widehat{L}) + d(\widehat{L}^\perp) = 0, \quad (2)$$

где $\widehat{L}^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к подпространству $\widehat{L}$.

Оказывается, что спектральный η -инвариант Атьи–Патоуди–Зингера выражается через функционал размерности подпространств.

ТЕОРЕМА 2 [13], [14]. *Для неотрицательного спектрального подпространства $\widehat{L}_+(A)$ эллиптического самосопряженного дифференциального оператора A положительного порядка имеет место формула*

$$\eta(A) = d(\widehat{L}_+(A)) \quad (3)$$

при условии, что порядок оператора и размерность многообразия имеют противоположные четности.

Равенство (3) имеет место и для псевдодифференциальных операторов при условии их допустимости в смысле [1].

2. Функционал размерности псевдодифференциальных подпространств входит в формулу индекса эллиптических операторов, действующих в подпространствах.

В самом деле, рассмотрим два псевдодифференциальных подпространства $\widehat{L}_{1,2} \subset C^\infty(M, E_{1,2})$ и псевдодифференциальный оператор

$$D: C^\infty(M, E_1) \rightarrow C^\infty(M, E_2).$$

Если выполнено включение $D\widehat{L}_1 \subset \widehat{L}_2$, то ограничение

$$D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2 \quad (4)$$

называется оператором, действующим в подпространствах. Ограничение

$$\sigma(D): L_1 \rightarrow L_2 \quad (5)$$

главного символа $\sigma(D)$ на символы подпространств над косферами S^*M называется символом оператора в подпространствах. Известно, что замыкание оператора (4) по норме пространств Соболева определяет фредгольмов оператор тогда и только тогда, когда символ (5) является эллиптическим, т.е. устанавливает изоморфизм расслоений.

Для эллиптических операторов в подпространствах справедлива следующая формула индекса [13], [14].

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\widehat{L}_{1,2} \in \widehat{\text{Even}}(M^{\text{odd}}) \quad \text{или} \quad \widehat{\text{Odd}}(M^{\text{ev}}). \quad (6)$$

Тогда индекс эллиптического оператора $D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2$ равен

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D} + d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2), \quad (7)$$

где в случае нечетных подпространств

$$\widetilde{D}: C^\infty(M, E_1) \rightarrow C^\infty(M, E_2)$$

– обычный (т.е. действующий в сечениях расслоений, определенных на базе M) эллиптический оператор с главным символом $\sigma(\widetilde{D})$, равным

$$\sigma(\widetilde{D}) = \sigma(D) \oplus \alpha^* \sigma(D): L_1 \oplus \alpha^* L_1 \rightarrow L_2 \oplus \alpha^* L_2;$$

для четных подпространств

$$\widetilde{D}: C^\infty(M, E_1) \rightarrow C^\infty(M, E_1)$$

– также обычный эллиптический оператор с главным символом $\sigma(\widetilde{D})$, равным

$$\sigma(\widetilde{D}) = [\alpha^* \sigma(D)]^{-1} \sigma(D) \oplus 1: L_1 \oplus L_1^\perp \rightarrow L_1 \oplus L_1^\perp.$$

3. Из формулы индекса (7) непосредственно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Удвоенная дробная часть функционала d зависит от символа подпространства $\widehat{L}$ лишь как от элемента группы $K(S^*M)/K(M)$.

Применим теперь формулу индекса в подпространствах (7) для вычисления дробной части инварианта d . Для этого воспользуемся следующим свойством четных (нечетных) подпространств.

ТЕОРЕМА 4. Символ подпространства $\widehat{L}$ при условиях четности (6) определяет элемент 2-кручения в группе $K(S^*M)/K(M)$. Другими словами, для некоторого числа N и расслоения $F \in \text{Vect}(M)$ на базе имеет место изоморфизм

$$\sigma: 2^N L \rightarrow \pi^* F, \quad 2^N L = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{2^N \text{ экземпляров}}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы для четных подпространств см. в [1], для нечетных – в [14].

Применим к эллиптическому оператору (в подпространствах)

$$\widehat{\sigma}: 2^N \widehat{L} \rightarrow C^\infty(M, F) \quad (9)$$

с символом (8) формулу индекса (7). Заметим, что в силу (2) пространство сечений расслоения имеет нулевую “размерность”: $d(C^\infty(M, F)) = 0$. Таким образом, формула индекса приводит к равенству

$$\text{ind}(\widehat{\sigma}, 2^N \widehat{L}, C^\infty(M, F)) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{\sigma} + 2^N d(\widehat{L}). \quad (10)$$

Переносим операторы $\widehat{\sigma}$ и $\widetilde{\sigma}$ под знак индекса, нетрудно получить следующее выражение для удвоенной дробной части значения функционала размерности (ср. с [16]):

$$\{2d(\widehat{L})\} = \frac{1}{2^N} \bmod 2^N\text{-ind} [(1 \pm \alpha^*)\widehat{\sigma}], \quad (11)$$

где $\bmod 2^N\text{-ind } D \in \mathbb{Z}_{2^N}$ означает индекс фредгольмова оператора D , приведенный по модулю 2^N , а через $\alpha^*\widehat{\sigma}$ обозначен оператор

$$\widehat{\alpha^*\sigma}: 2^N \widehat{\alpha^*L} \rightarrow C^\infty(M, F).$$

Отметим, что индекс оператора (9), а также индекс в формуле (11) как вычет по модулю 2^N определяется главным символом оператора. В следующем разделе будет показано, как этот индекс может быть вычислен.

2. Индекс по модулю n и двойственность Понтрягина в K -теории

Напомним некоторые сведения о теории индекса по модулю n из работы [16].

1. Фиксируем некоторое натуральное число n . *Эллиптическим оператором по модулю n* называется эллиптический оператор вида

$$D: n\widehat{L}_1 \oplus C^\infty(M, E_1) \rightarrow n\widehat{L}_2 \oplus C^\infty(M, F_1), \quad (12)$$

где

$$\widehat{L}_1 \subset C^\infty(M, E), \quad \widehat{L}_2 \subset C^\infty(M, F)$$

– подпространства. Прямые суммы

$$n(\widehat{L}_1 \oplus C^\infty(M, E_1)) \xrightarrow{nD} n(\widehat{L}_2 \oplus C^\infty(M, F_1)) \quad (13)$$

будем называть *тривиальными* операторами по модулю n . Группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов по модулю тривиальных обозначается через $\text{Ell}(M, \mathbb{Z}_n)$. В работе [16] показано, что эта группа определяет K -теорию с коэффициентами в $\mathbb{Z}_n$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеет место изоморфизм групп*

$$\mathrm{Ell}(M, \mathbb{Z}_n) \stackrel{\chi_n}{\cong} K_c(T^*M, \mathbb{Z}_n).$$

Здесь K_c – K -теория с компактными носителями.

Дадим явную формулу для изоморфизма χ_n . Прежде всего напомним, что K -теория с коэффициентами $\mathbb{Z}_n$ определяется при помощи так называемого *пространства Мура* M_n . Это некоторое топологическое пространство с K -группами, равными

$$\tilde{K}^0(M_n) = \mathbb{Z}_n, \quad K^1(M_n) = 0.$$

В качестве пространства Мура можно, например, взять двумерный комплекс, получаемый из диска D^2 отождествлением точек на границе по действию группы $\mathbb{Z}_n$:

$$M_n = \{D^2 \subset \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\} / \{e^{i\varphi} \sim e^{i(\varphi + 2\pi k/n)}\}.$$

Обозначим векторное расслоение, являющееся образующей группы $\tilde{K}^0(M_n) = \mathbb{Z}_n$, через γ_n . Зафиксируем также некоторую тривиализацию β прямой суммы $n\gamma_n$

$$n\gamma_n \stackrel{\beta}{\rightarrow} \mathbb{C}^n.$$

Для топологического пространства X его K -группы с коэффициентами $\mathbb{Z}_n$ определяются по формуле

$$K^*(X, \mathbb{Z}_n) = K^*(X \times M_n, X \times pt). \quad (14)$$

Далее, произвольный оператор вида (12) стабильно гомотопен (см. [16]) некоторому оператору

$$n\hat{L} \stackrel{D}{\rightarrow} C^\infty(M, F), \quad (15)$$

для которого определено следующее семейство эллиптических символов на многообразии M , параметризованное пространством Мура M_n :

$$\begin{aligned} & \chi_n[D] \\ &= [\pi^*F \stackrel{\sigma^{-1}(D)}{\rightarrow} nL \stackrel{\beta^{-1} \otimes 1_L}{\rightarrow} \gamma_n \otimes nL \stackrel{1_\gamma \otimes \sigma(D)}{\rightarrow} \gamma_n \otimes \pi^*F] \in K_c(T^*M \times M_n, T^*M \times pt) \end{aligned} \quad (16)$$

(здесь используется разностная конструкция для эллиптических семейств). Отметим, что индекс эллиптического оператора по модулю n определяется его главным символом как вычет

$$\text{mod } n\text{-ind } (n\hat{L} \stackrel{D}{\rightarrow} C^\infty(M, F)) \in \mathbb{Z}_n.$$

Для этого индекса-вычета справедлива теорема об индексе, которую можно переформулировать в виде коммутативности треугольника

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ell}(M, \mathbb{Z}_n) & & \\ \swarrow \chi_n & & \searrow \text{mod } n\text{-ind} \\ K_c(T^*M, \mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{p!} & \mathbb{Z}_n \end{array}, \quad (17)$$

где через $p_! : K_c(T^*M, \mathbb{Z}_n) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ обозначено отображение прямого образа в K -теории с коэффициентами $\mathbb{Z}_n$.

Ниже будет использована точная последовательность, связывающая эллиптические операторы по модулю n с обычными эллиптическими операторами.

Для этого обозначим группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов через $\text{Ell}(M)$ (см. [18]), а группу стабильных гомотопических классов псевдодифференциальных подпространств через $\text{Ell}_1(M)$ (см. [16]).

Отображения, сопоставляющие операторам и подпространствам их главные символы, осуществляют изоморфизмы с соответствующими K -группами

$$\text{Ell}(M) \xrightarrow{\chi_0} K_c(T^*M), \quad \text{Ell}_1(M) \xrightarrow{\chi_1} K_c^1(T^*M);$$

напомним (см. [2] или [16]), что второе отображение определяется как композиция

$$\chi_1 : \text{Ell}_1(M) \rightarrow K(S^*M)/K(M) \xrightarrow{\delta} K_c^1(T^*M),$$

где сначала подпространству сопоставляется его символ, а затем применяется изоморфизм δ , индуцированный кограничным отображением в K -теории,

$$\delta : K(S^*M) \rightarrow K_c^1(T^*M).$$

Имеет место коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Ell}(M) & \xrightarrow{\times n} & \text{Ell}(M) & \xrightarrow{i} & \text{Ell}(M, \mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ell}_1(M) & \xrightarrow{\times n} & \text{Ell}_1(M) \\ \downarrow \chi_0 & & \downarrow \chi_0 & & \downarrow \chi_n & & \downarrow \chi_1 & & \downarrow \chi_1 \\ K_c(T^*M) & \xrightarrow{\times n} & K_c(T^*M) & \xrightarrow{i'} & K_c(T^*M, \mathbb{Z}_n) & \xrightarrow{\partial'} & K_c^1(T^*M) & \xrightarrow{\times n} & K_c^1(T^*M) \end{array} \quad (18)$$

здесь отображения $\times n$ сопоставляют элементу x абелевой группы его кратное nx , отображение i индуцировано вложением обычных эллиптических операторов в множество операторов по модулю n , а гомоморфизм Бокштейна ∂ определяется формулой

$$\partial[n\hat{L}_1 \oplus C^\infty(M, E_1)] \xrightarrow{D} n\hat{L}_2 \oplus C^\infty(M, F_1) = [\hat{L}_1] - [\hat{L}_2].$$

Для пары натуральных чисел n, m рассмотрим естественные вложения $\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{Z}_{mn}$. Прямой предел

$$\varinjlim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_n = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

определяет K - и Ell -группы с коэффициентами в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$K_c(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim K_c(T^*M, \mathbb{Z}_n), \quad \text{Ell}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim \text{Ell}(M, \mathbb{Z}_n).$$

При этом диаграмма (18) переходит в диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Ell}(M) & \rightarrow & \text{Ell}(M) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{i} & \text{Ell}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ell}_1(M) & \rightarrow & \text{Ell}_1(M) \otimes \mathbb{Q} \\ \downarrow \chi_0 & & \downarrow \chi_0 \otimes 1 & & \downarrow \chi_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} & & \downarrow \chi_1 & & \downarrow \chi_1 \otimes 1 \\ K_c(T^*M) & \rightarrow & K_c(T^*M) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{i'} & K_c(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial'} & K_c^1(T^*M) & \rightarrow & K_c^1(T^*M) \otimes \mathbb{Q} \end{array} \quad (19)$$

2. Рассмотрим форму пересечения

$$K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K_c^i(M) \rightarrow K_c^0(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{p!} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (20)$$

которая индуцирована умножением и отображением $p!$ прямого образа в K -теории. Пересечение элементов x и y будем обозначать через $x \cap y$.

Напомним, что спаривание

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: G_1 \times G_2 \rightarrow G_3$$

абелевых групп G_1, G_2 со значениями в абелевой группе G_3 называется *невыврожденным*, если отображения

$$\langle x, \cdot \rangle: G_2 \rightarrow G_3 \quad \text{и} \quad \langle \cdot, y \rangle: G_1 \rightarrow G_3,$$

получаемые фиксированием одного из аргументов, являются нулевыми только в случае, когда $x = 0$ (соответственно $y = 0$).

ТЕОРЕМА 6 (двойственность Понтрягина). *Спаривание (20) является невырожденным. Более того, фиксируя первый аргумент, получаем изоморфизм*

$$K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(K^i(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что невырожденность спаривания следует из изоморфизма (21).

Так же, как и двойственность Пуанкаре (см., например, [20]), двойственность Понтрягина может быть доказана при помощи принципа Майера–Виеториса. Для произвольного открытого множества $U \subset M$ рассмотрим отображение

$$K_c^i(T^*U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(K^i(U), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (22)$$

Согласно принципу Майера–Виеториса для проверки изоморфности отображения при $U = M$ достаточно

- а) проверить его для стягиваемого множества U ;
- б) доказать индуктивный переход: если отображение является изоморфизмом для двух множеств U, V и пересечения $U \cap V$, то оно является изоморфизмом для объединения.

Рассмотрим стягиваемое множество U . Тогда

$$K_c^*(T^*U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = K^*(pt) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus 0$$

и

$$K^*(U) = \mathbb{Z} \oplus 0,$$

а соответствующее отображение

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

является изоморфизмом. Справедливость требования а) установлена.

Для доказательства свойства б) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow K_c^{i-1}(T^*(U \cap V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & K_c^i(T^*(U \cup V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & K_c^i(T^*U \sqcup T^*V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \rightarrow \text{Hom}(K^{i-1}(U \cap V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Hom}(K^i(U \cup V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow & \text{Hom}(K^i(U \sqcup V), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \rightarrow &
 \end{array}$$

в которой верхняя строка является точной последовательностью Майера–Виеториса, а нижняя получается из аналогичной последовательности применением функтора $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (этот функтор сохраняет точность последовательностей). Вертикальные отображения индуцированы спариванием пересечения. Эта диаграмма является коммутативной с точностью до знака. Предположим, что отображение (22) является изоморфизмом для U , V и пересечения $U \cap V$. В силу леммы о пяти гомоморфизмах, примененной к указанной диаграмме, получаем изоморфность над объединением $U \cup V$. Свойство б) доказано.

Таким образом, оба условия применения принципа Майера–Виеториса выполнены. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя K -теорию с коэффициентами в топологической группе $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (ее определение см. в [2]), этим методом можно установить двойственность по Понтрягину групп $K_c^i(T^*M, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ и $K^i(M)$:

$$K_c^i(T^*M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(K^i(M), \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \quad K^i(M) \simeq \text{Hom}(K_c^i(T^*M, \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

т.е. в этом случае каждая из них является группой характеров другой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичным методом можно доказать двойственность Понтрягина для произвольного K -ориентированного замкнутого многообразия или многообразия с краем (т.е. многообразия со spin^c структурой в касательном расслоении). С этих более общих позиций в теореме 6 получена двойственность Понтрягина–Лефшеца в K -теории на почти комплексном многообразии T^*M групп с компактными носителями и абсолютных групп.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно также установить невырожденность спаривания

$$K_c^i(T^*M) \times K^i(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow K_c^0(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_!} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Как и в теории (ко)гомологий (см. [5]), двойственность Понтрягина влечет двойственность Пуанкаре для подгрупп кручения. Билинейная форма, определяющая эту двойственность, называется *формой зацепления*.

3. Форма зацепления в K -теории

1. Рассмотрим гомоморфизм Бокштейна

$$\partial: K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow K_c^{i-1}(T^*M)$$

(см. диаграмму (19)). Образ этого отображения состоит из элементов конечного порядка. Будем обозначать через $\text{Tor } G$ подгруппу элементов конечного порядка абелевой группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Формой зацепления* называется спаривание

$$\begin{aligned} \cap: \operatorname{Tor} K_c^{i-1}(T^*M) \times \operatorname{Tor} K^i(M) &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (x, y) &\mapsto x' \cap y, \end{aligned}$$

где $x' \in K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ – произвольный элемент K -теории с коэффициентами такой, что $\partial x' = x$, а $x' \cap y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – индекс пересечения из предыдущего раздела.

Так же, как и форма пересечения, форма зацепления определяется умножением

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor} K_c^{i-1}(T^*M) \times \operatorname{Tor} K^i(M) &\rightarrow K_c(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ (x, y) &\mapsto x'y, \quad \partial x' = x. \end{aligned} \tag{23}$$

ЛЕММА 1. *Умножение (23) и форма зацепления корректно определены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо проверить, что случайный выбор элемента x' не приводит к изменению произведения $x'y$. Пусть $x = \partial x''$. Для разности $x' - x''$ имеем $\partial(x' - x'') = 0$. Следовательно, $x' - x'' = i(z)$ для некоторого элемента $z \in K_c^i(T^*M) \otimes \mathbb{Q}$. Но произведение $zy \in K_c^0(T^*M) \otimes \mathbb{Q}$ является элементом кручения, поэтому $zy = 0$. Таким образом, $x'y = x''y$. Лемма доказана.

Форму зацепления можно определить аналогичным образом, используя принадлежность второго аргумента подгруппе кручения. Для этого надо рассмотреть гомоморфизм Бокштейна ∂ в коэффициентной последовательности

$$\cdots \rightarrow K^{i-1}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} K^i(M) \rightarrow K^i(M) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \cdots.$$

В качестве индекса зацепления элементов $x \in \operatorname{Tor} K_c^{i-1}(T^*M)$, $y \in \operatorname{Tor} K^i(M)$ положим

$$x \cap' y = x \cap y'.$$

Оказывается, что эти два способа определяют спаривания зацепления, которые отличаются только знаком. А именно, имеет место равенство

$$x \cap' y = (-1)^{\deg x + 1} x \cap y.$$

Указанная формула вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для элементов $x' \in K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, $y' \in K^j(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ выполнено равенство*

$$\partial x' y' = (-1)^{\deg x' + 1} x' \partial y'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что элементы x', y' происходят из K -групп с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_n$ для достаточно большого n :

$$x' = I_* x_0, \quad y' = n_* y_0, \quad x_0 \in K_c^i(T^*M, \mathbb{Z}_n), \quad y_0 \in K^j(M, \mathbb{Z}_n), \quad (24)$$

где через I обозначено вложение $\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}_{n^2} \xrightarrow{\text{mod } n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0$$

и отвечающую ей последовательность в K -теории

$$\dots \rightarrow K_c^{i+j}(T^*M, \mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\partial''} K_c^{i+j+1}(T^*M, \mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\times n} K_c^{i+j+1}(T^*M, \mathbb{Z}_{n^2}) \rightarrow \dots$$

Применим к произведению $x_0 y_0 \in K_c^{i+j}(T^*M, \mathbb{Z}_n)$ гомоморфизм Бокштейна. Имеем

$$\partial''(x_0 y_0) = \partial x_0 y_0 + (-1)^{\deg x_0} x_0 \partial y_0. \quad (25)$$

С другой стороны, в силу точности $\times n \circ \partial''(x_0 y_0) = 0$. Следовательно, и

$$I_* \partial''(x_0 y_0) = 0. \quad (26)$$

Из (24)–(26) получаем требуемое:

$$\partial x' y' + (-1)^{\deg x'} x' \partial y' = 0.$$

ТЕОРЕМА 7 (двойственность Пуанкаре для групп кручения). *Форма зацепления*

$$\text{Tor } K_c^{i-1}(T^*M) \times \text{Tor } K^i(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

является невырожденной. В частности, она определяет изоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Tor } K_c^{i-1}(T^*M) &\simeq \text{Hom}(\text{Tor } K^i(M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \\ \text{Tor } K^i(M) &\simeq \text{Hom}(\text{Tor } K_c^{i-1}(T^*M), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Группы $\text{Tor } K_c^{i-1}(T^*M)$ и $\text{Tor } K^i(M)$ являются изоморфными.*

Это следует из (неканонического) изоморфизма $G \simeq \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ для конечной абелевой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Сначала докажем невырожденность по второму аргументу. Предположим, что $x \cap y = 0$ для произвольного $x \in \text{Tor } K_c^{i-1}(T^*M)$. Это означает, что для любого $x' \in K_c^i(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ также получаем $x' \cap y = 0$. Из двойственности Понтрягина следует, что в этом случае $y = 0$.

Невырожденность формы по первому аргументу следует из двойственности Понтрягина, отвечающей форме пересечения

$$K_c^{i-1}(T^*M) \times K^i(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

(см. замечание 3).

Второе утверждение теоремы следует из конечности подгрупп кручения. Теорема доказана.

2. Изоморфизм эллиптической теории и K -теории из первого пункта предыдущего раздела позволяет построить форму зацепления в терминах эллиптических операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Формой зацепления в эллиптической теории* называется билинейное спаривание

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor} \, \mathrm{Ell}_1(M) \times \mathrm{Tor} \, K^0(M) &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{ind} \, x'y, \quad \partial x' = x. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Формы зацепления в эллиптической и K -теории изоморфны, т.е. следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor} \, \mathrm{Ell}_1(M) \times \mathrm{Tor} \, K^0(M) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow \chi_1 \times 1 & & \downarrow \mathrm{Id.} \\ \mathrm{Tor} \, K_c^1(T^*M) \times \mathrm{Tor} \, K^0(M) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor} \, \mathrm{Ell}_1(M) \times \mathrm{Tor} \, K^0(M) & \longrightarrow & \mathrm{Ell}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{ind}} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{Tor} \, K_c^1(T^*M) \times \mathrm{Tor} \, K^0(M) & \longrightarrow & K_c(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{p_!} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

Коммутативность левого квадрата вытекает из изоморфности коэффициентных последовательностей в K -теории и в эллиптической теории (см. (19)), а коммутативность правого квадрата составляет формулу для индекса по модулю n (см. (17)). Предложение доказано.

Выпишем явное выражение для формы зацепления в эллиптической теории. Рассмотрим $x = [\hat{L}]$, $y = [G_1] - [G_2]$ для некоторого псевдодифференциального подпространства $\hat{L}$ и векторных расслоений $G_{1,2} \in \mathrm{Vect}(M)$. Тогда согласно первому определению для некоторого элемента

$$x' = [n\hat{L} \xrightarrow{\hat{\sigma}} C^\infty(M, F)] \in \mathrm{Ell}(M, \mathbb{Z}_n)$$

индекс зацепления равен

$$x \cap y = \mathrm{ind} \, x'y = \frac{1}{n} \bmod n - \mathrm{ind} (\hat{\sigma} \otimes 1_{G_1 - G_2}), \quad (27)$$

где через $\hat{\sigma} \otimes 1_{G_1 - G_2}$ обозначен оператор $\hat{\sigma}$ с коэффициентами в векторном расслоении $G_1 - G_2$. В соответствии со вторым определением для элемента

$$y' = [mG_1 \xrightarrow{g} mG_2] \in K^1(M, \mathbb{Z}_m)$$

(см. [2]) этот индекс определяется формулой

$$x \cap y = \mathrm{ind} \, xy' = \frac{1}{m} \bmod m - \mathrm{ind} (1_{\hat{L}} \otimes g),$$

где оператор в подпространствах $1_{\hat{L}} \otimes g$ имеет главный символ $mL \otimes G_1 \xrightarrow{1_L \otimes g} mL \otimes G_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Применяя изоморфизм Пуанкаре в комплексной K -теории к многообразию T^*M (см. [21]), имеем

$$K_c^1(T^*M) \simeq K_1(M);$$

следовательно, спаривание зацепления можно рассматривать как *невыврожденное* спаривание K -гомологий с K -когомологиями многообразия M :

$$\mathrm{Tor} K_1(M) \times \mathrm{Tor} K^0(M) \xrightarrow{\cap} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Отметим внешнее сходство формулы (27) для индекса зацепления и формулы (11) для дробной части функционала размерности. Отличие состоит в том, что в последней формуле рассматривается действие антиподальной инволюции, а не умножение на расслоение. В следующем разделе показывается, что антиподальная инволюция на K -группах действует как тензорное умножение на ориентирующий пучок расслоения (ср. с [22] в ориентируемом случае).

4. Антиподальная инволюция и ориентируемость

Пусть V – вещественное векторное расслоение над компактом X . Рассмотрим антиподальную инволюцию

$$\begin{aligned} \alpha: V &\rightarrow V, \\ v &\mapsto -v. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 8. *Индукцированная инволюция α^* в K -теории действует по формуле*

$$\alpha^* = (-1)^n \Lambda^n(V): K_c^*(V) \rightarrow K_c^*(V), \quad (28)$$

где через $\Lambda^n(V)$, $n = \dim V$, обозначен ориентирующий пучок расслоения V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать расслоение V четномерным: $n = \dim V = 2k$. Будем рассматривать также действие инволюции α^* только на четных K -группах $K_c^0(V)$ (нечетный случай сводится к рассматриваемому умножением на одномерное тривиальное расслоение, так как при этом обе части равенства (28) изменяются на -1).

Каруби в [17], [22] было найдено описание элементов групп вида $K_c^0(V)$ в терминах алгебр Клиффорда. Напомним основные определения. Над пространством X рассмотрим расслоение $\mathrm{Cl}(V)$ алгебр Клиффорда векторного расслоения V . Над каждой точкой x базы X алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V_x)$ мультипликативно порождена векторным пространством V_x , при этом выполнены соотношения

$$v_1 v_2 + v_2 v_1 = 2\langle v_1, v_2 \rangle$$

для некоторого фиксированного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в расслоении V .

Будем рассматривать четверки (E, c, f_1, f_2) , где E – комплексное расслоение над X , c – гомоморфизм расслоений

$$c: \mathrm{Cl}(V) \rightarrow \mathrm{Hom}(E, E),$$

который является гомоморфизмом расслоений алгебр. Говорят, что c устанавливает на E структуру *клиффордова модуля*. Инволюции f_1 и f_2 расслоения E антикоммутируют с умножением Клиффорда:

$$f_i c(v) + c(v) f_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

На множестве четверок (E, c, f_1, f_2) вводится отношение стабильной гомотопической эквивалентности. Соответствующую группу классов обозначим через $K^V(X)$. В [17] доказано, что получаемая группа изоморфна группе $K_c^0(V)$. Для изоморфизма

$$t: K^V(X) \rightarrow K_c^0(V)$$

может быть дана следующая явная формула

$$t[E, c, f_1, f_2] = [\pi^* \ker(f_1 - 1) \xrightarrow{(1-c(v)f_2)(1+c(v)f_1)} \pi^* \ker(f_2 - 1)], \quad \text{где } \pi: SV \rightarrow X. \quad (29)$$

Здесь через SV обозначено расслоение единичных сфер векторного расслоения V , а элемент в правой части равенства понимается в смысле разностной конструкции (см., например, [23]) для относительной группы $K(BV, SV) \simeq K_c(V)$.

Из формулы (29) видно, что антиподальная инволюция α^* на четверках определяется формулой

$$\alpha^*[E, c, f_1, f_2] = [E, -c, f_1, f_2].$$

Покажем, что четверка $[E, -c, f_1, f_2]$ отличается от четверки $[E, c, f_1, f_2] \otimes \Lambda^{2k}(V)$ на изоморфизм векторных расслоений (ср. [3]).

Для этого в каждой тривиализующей окрестности расслоения V рассмотрим ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ и определим элемент

$$\beta = i^k c(e_1) \cdots c(e_{2k}).$$

Нетрудно видеть, что $\beta^2 = 1$ и элемент β антикоммутирует с клиффордовой структурой c и перестановочен с инволюциями f_1 и f_2 :

$$\beta c(v) + c(v) \beta = 0, \quad f_i \beta = \beta f_i, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Прямое вычисление показывает, что при замене ортонормированного базиса элемент β изменяется на знак определителя матрицы перехода от одного базиса к другому. Следовательно, глобально этот элемент определяет изоморфизм векторных расслоений

$$\beta: E \rightarrow E \otimes \Lambda^{2k}(V)$$

(который для краткости обозначается тем же символом). При этом коммутационные соотношения (30) переходят в

$$\beta^{-1}(c \otimes 1_{\Lambda^{2k}(V)})\beta = -c, \quad \beta^{-1}(f_i \otimes 1_{\Lambda^{2k}(V)})\beta = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, изоморфность четверок

$$\alpha^*[E, c, f_1, f_2] \quad \text{и} \quad [E, c, f_1, f_2] \otimes \Lambda^{2k}(V)$$

установлена. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедлива аналогичная формула для K -теории с коэффициентами в $\mathbb{Z}_n$:*

$$\alpha^* = (-1)^n \Lambda^n(V): K_c^*(V, \mathbb{Z}_n) \rightarrow K_c^*(V, \mathbb{Z}_n).$$

Действительно, K -теория с коэффициентами определяется при помощи пространства Мура M_n по формуле

$$K_c^*(V, \mathbb{Z}_n) = K_c^*(V \times M_n, V \times pt).$$

Применяя доказанную теорему к пространству $X \times M_n$ и поднятию расслоения V на него, получаем требуемую формулу в K -теории с коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае, когда пространство X является гладким многообразием с кокасательным расслоением $V = T^*X$, формула (29) указывает класс эллиптических символов, к которым произвольные символы могут быть приведены стабильными гомотопиями.

5. Основная теорема

ТЕОРЕМА 9. *Удвоенная дробная часть $\{2d(\widehat{L})\}$ значения функционала d на подпространстве $\widehat{L}$ равна коэффициенту зацепления символа подпространства с ориентирующим пучком $\Lambda^n(M)$, $n = \dim M$, многообразия*

$$\{2d(\widehat{L})\} = [L] \cap (1 - [\Lambda^n(M)]) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] / \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним формулу (11) для дробной части функционала d :

$$\{2d(\widehat{L})\} = \frac{1}{2^N} \bmod 2^N\text{-ind} [(1 \pm \alpha^*)\widehat{\sigma}], \quad [\sigma] \in K_c^0(T^*M, \mathbb{Z}_{2^N}),$$

где $\sigma: 2^N L \rightarrow \pi^* F$ – изоморфизм векторных расслоений. Согласно теореме 8 из предыдущего раздела имеем

$$(1 \pm \alpha^*)[\sigma] = [1 - \Lambda^n(M)][\sigma].$$

Поэтому

$$\{2d(\widehat{L})\} = \frac{1}{2^N} \bmod 2^N\text{-ind} [(1 - \Lambda^n(M))\widehat{\sigma}],$$

что совпадает с определением индекса зацепления в разделе 3, см. формулу (27).

Заметим также, что элемент $[L] \in K_c^1(T^*M)$ является элементом кручения в силу теоремы 4, конечность порядка разности $[1 - \Lambda^n(M)] \in K(M)$ доказывается в предложении 4. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *На ориентируемом многообразии функционал размерности является полуцелочисленным, т.е.*

$$\{2d(\widehat{L})\} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. На неориентируемом многообразии M размерности $2k$ или $2k+1$ имеет место следующая оценка для порядка дробной части инварианта d :

$$\{2^{k+1}d(\widehat{L})\} = 0. \quad (31)$$

Аналогичные утверждения имеют место для η -инварианта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Ориентирующий пучок $\Lambda^n(M^n)$ является одномерным расслоением со структурной группой $\mathbb{Z}_2$. Следовательно, это векторное расслоение “снимается” с классифицирующего пространства $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^\infty$, т.е. имеет место изоморфизм расслоений

$$\Lambda^n(M^n) \simeq f^*\gamma \quad \text{для отображения } f: M^n \rightarrow \mathbb{RP}^N,$$

здесь γ – линейное расслоение прямых над проективным пространством $\mathbb{RP}^N$. По теореме о клеточной аппроксимации можно выбрать $N = n$. Приведенные K -группы проективных пространств имеют вид

$$\tilde{K}(\mathbb{RP}^{2k}) \simeq \tilde{K}(\mathbb{RP}^{2k+1}) \simeq \mathbb{Z}_{2^k}.$$

Следовательно, выполнено равенство

$$2^k(1 - [\Lambda^n(M^n)]) = 0.$$

Поэтому получаем требуемое

$$\{2^{k+1}d(\widehat{L})\} = [L] \cap [2^k(1 - \Lambda^n(M^n))] = [L] \cap 0 = 0.$$

6. Примеры

1. Рассмотрим четномерное вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^{2n}$. Приведенная K -группа этого многообразия является циклической:

$$\tilde{K}(\mathbb{RP}^{2n}) \simeq \mathbb{Z}_{2^n},$$

а в качестве образующей можно выбрать ориентирующий пучок

$$1 - [\Lambda^{2n}(\mathbb{RP}^{2n})] \in \tilde{K}(\mathbb{RP}^{2n}).$$

С другой стороны, многообразие $\mathbb{RP}^{2n}$ имеет pin^c структуру, а главный символ самосопряженного pin^c оператора Дирака D на нем (этот оператор построен в [3]) является образующей группы

$$[\sigma(D)] \in K_c^1(T^*\mathbb{RP}^{2n}) = \text{Tor } K_c^1(T^*\mathbb{RP}^{2n}) \simeq \mathbb{Z}_{2^n}.$$

Из невырожденности формы зацепления следует, что для указанных образующих имеет место равенство

$$2^{n-1}[\sigma(D)] \cap [1 - [\Lambda^{2n}(\mathbb{RP}^{2n})]] = \frac{1}{2}.$$

Поэтому η -инвариант pin^c оператора Дирака D имеет большую дробную часть (см. [3]):

$$\{2^n \eta(D)\} = 2^{n-1}[\sigma(D)] \cap [1 - [\Lambda^{2n}(\mathbb{RP}^{2n})]] = \frac{1}{2}.$$

Этот пример устанавливает точность оценки (31) знаменателя дробной части η -инварианта на четномерных многообразиях.

2. Построим теперь оператор на нечетномерном многообразии с ненулевой дробной частью η -инварианта. Для этого воспользуемся конструкцией скрещенного произведения эллиптических операторов (ср. [18]).

Пусть D_1 – самосопряженный эллиптический оператор на четномерном многообразии M_1 с нечетным символом:

$$\sigma(D_1)(x, -\xi) = -\sigma(D_1)(x, \xi),$$

а D_2 – эллиптический оператор на нечетномерном многообразии M_2 с символом, удовлетворяющим равенству

$$\sigma(D_2)(x, -\xi) = \sigma(D_2)^*(x, \xi) \quad (32)$$

(предполагается, что оператор D_2 действует в одном и том же расслоении). Через M обозначим декартово произведение многообразий $M_1 \times M_2$. Рассмотрим произведение

$$[\sigma(D_1)] \times [\sigma(D_2)] \in \text{Tor } K_c^1(T^*M)$$

символов этих эллиптических операторов. Здесь

$$[\sigma(D_1)] \in K_c^1(T^*M_1), \quad [\sigma(D_2)] \in K_c^0(T^*M_2).$$

Для (самосопряженного) символа σ этого произведения имеет место формула

$$\sigma(D) = \begin{pmatrix} \sigma(D_1) \otimes 1 & 1 \otimes \sigma(D_2)^* \\ 1 \otimes \sigma(D_2) & -\sigma(D_1) \otimes 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Вычислим индекс зацепления элемента $[\sigma(D_1)] \times [\sigma(D_2)]$ с ориентирующим пучком произведения $M_1 \times M_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть многообразии M_2 является ориентируемым. Тогда имеет место формула

$$([\sigma(D_1)] \times [\sigma(D_2)]) \cap (1 - \Lambda^n(M^n)) = [\sigma(D_1)] \cap (1 - \Lambda^k(M_1)) \text{ ind } D_2, \quad \dim M_1 = k. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_c^0(T^*M_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K_c^0(T^*M_2) & \longrightarrow & K_c^0(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \cap(1-\Lambda^k(M_1)) \times 1 \uparrow & & \uparrow \cap(1-\Lambda^k(M_1)) \\ \text{Tor } K_c^1(T^*M_1) \times K_c^0(T^*M_2) & \longrightarrow & \text{Tor } K_c^1(T^*M) \end{array}.$$

Здесь отображения, действующие по горизонтали, являются умножениями в K -теории. В силу ориентируемости второго многообразия имеем

$$1 - [\Lambda^k(M_1)] = 1 - [\Lambda^n(M)].$$

Поэтому формула (34) вытекает из этой диаграммы применением прямого образа

$$p_! : K_c^0(T^*M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Формула (34) является аналогом известного свойства η -инварианта (см. [2]): η -инвариант скрещенного произведения операторов равен произведению η -инварианта первого сомножителя на индекс второго.

К сожалению, расслоение $L_+(\sigma(D))$ не является четным. В самом деле, для символа σ справедливо равенство

$$\alpha^* \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Следовательно, для спектрального подпространства имеем

$$\alpha^* L_+(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_+(\sigma).$$

Однако это расслоение изоморфно четному расслоению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Существует такое векторное расслоение $L \in \text{Vect}(P^*M)$ над расслоением проективных пространств, что его поднятие p^*L на косферы S^*M при проекции $p: S^*M \rightarrow P^*M$ изоморфно расслоению $L_+(\sigma)$.

Рис. 1. Расслоение проективных пространств P^*M

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем на нечетномерном многообразии M ненулевое векторное поле. Рассмотрим отвечающее ему разложение кокасательного расслоения $T^*M = V \oplus 1$ (относительно некоторой римановой метрики). Тогда для косферического расслоения имеем

$$S^*M = S(V \oplus 1),$$

а его проективизация P^*M диффеоморфна расслоению единичных шаров

$$BV \subset S(V \oplus 1)$$

расслоения V с отождествленными антиподальными точками на границе:

$$P^*M = BV/\{v \sim -v \mid |v| = 1\}$$

(см. рис. 1). Тогда расслоение L над проективизацией P^*M получается аналогичным образом из расслоения $L_+(\sigma)$ над шарами BV при помощи отождествления слоев над антиподальными точками $\pm v$ при помощи инволюции

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изоморфность поднятия расслоения L на сферы S^*M и исходного расслоения $L_+(\sigma)$ проверяется непосредственно. Предложение доказано.

Из этих двух утверждений получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. *Для четного подпространства $\widehat{L}$ с построенным символом L имеет место равенство*

$$\{2d(\widehat{L})\} = \{2d(\widehat{L}_+(D_1))\} \text{ind } D_2. \quad (36)$$

3. Применим полученную формулу в следующем частном случае. Положим $M_1 = \mathbb{RP}^{2k}$, D_1 – pin^c оператор Дирака из первого примера. В качестве второго многообразия рассмотрим окружность $M_2 = S^1$, на которой фиксируем псевдодифференциальный оператор D_2 с главным символом

$$\sigma(D_2)(\varphi, \xi) = \begin{cases} e^{-i\varphi}, & \xi = 1, \\ e^{i\varphi}, & \xi = -1. \end{cases}$$

Имеем $\text{ind } D_2 = 2$ и функционал размерности четного подпространства $\widehat{L}$, получаемого в силу предложения 6, имеет ненулевую дробную часть; более точно,

$$\{2^{k-1}d(\widehat{L})\} = \frac{1}{2}.$$

Отметим также одно следствие. Оно дает ответ на вопрос, поставленный в [1].

СЛЕДСТВИЕ 6. *Существуют дифференциальные операторы четного порядка на нечетномерных многообразиях с произвольной двоично-рациональной дробной частью η -инварианта.*

4. Рассмотрение дифференциальных операторов порядка выше первого может показаться экзотикой для теории индекса, однако известны геометрические операторы второго порядка с интересными спектральными свойствами (см. [1]). Следует также упомянуть, что оператор Хирцебруха на ориентированном многообразии эквивалентен оператору второго порядка. В частности, сигнатура многообразия равна индексу оператора второго порядка. Это наблюдение позволило Конну, Телеману и Сулливану [24] выразить сигнатуру липшицевых и квазиконформных многообразий как индекс ограниченного фредгольмова оператора.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gilkey P. B. The eta invariant of even-order operators // Lecture Notes in Math. 1989. V. 1410. P. 202–211.
- [2] Atiyah M., Patodi V., Singer I. Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 77. P. 43–69; II // 1976. V. 78. P. 405–432; III // 1976. V. 79. P. 315–330.
- [3] Gilkey P. B. The eta invariant for even dimensional Pin^c manifolds // Advances in Math. 1985. V. 58. P. 243–284.
- [4] Bahri A., Gilkey P. The eta invariant, Pin^c bordism, and equivariant Spin^c bordism for cyclic 2-groups // Pacific J. Math. 1987. V. 128. № 1. P. 1–24.
- [5] Pontrjagin L. S. Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze // Math. Ann. 1931. V. 105. № 2. P. 165–205.
- [6] Понтрягин Л. С. Топологические теоремы двойственности // УМН. 1947. Т. 2. № 2. С. 21–44.
- [7] Seifert H., Threlfall W. Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner, 1934.
- [8] Фоменко А., Фукс Д. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [9] Milnor J. Torsion et type simple d'homotopie // Essays Topol. Relat. Top. Mem. dédiés à Georges de Rham, 1970. P. 12–17.
- [10] Brumfiel G., Morgan J. Quadratic functions, the index modulo 8, and a $\mathbb{Z}/4$ -Hirzebruch formula // Topology. 1973. V. 12. P. 105–122.
- [11] Kervaire M., Milnor J. Groups of homotopy spheres, I // Ann. Math. 1963. V. 77. № 3. P. 504–537.
- [12] Moore G., Witten E. Self-duality, Ramond–Ramond fields and K -theory // E-print hep-th/9912279, 1999.
- [13] Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические операторы в четных подпространствах // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 8. С. 125–160.
- [14] Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic Operators in Odd Subspaces. Preprint № 99/11 (Juni 1999). Potsdam: Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, 1999; E-print math.DG/9907039.
- [15] Savin A., Schulze B.-W., Sternin B. Elliptic Operators in Subspaces. Preprint № 00/04 (Februar 2000). Potsdam: Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, 2000.
- [16] Savin A., Schulze B.-W., Sternin B. Elliptic Operators in Subspaces and the Eta Invariant. Preprint № 99/14 (Juni 1999). Potsdam: Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, 1999; E-print math.DG/9907047.
- [17] Karoubi M. K -Theory. An Introduction. Grundlehren Math. Wiss. V. 226. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [18] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators, I // Ann. of Math. 1968. V. 87. P. 484–530.
- [19] Бирман М. С., Соломяк М. З. О подпространствах, допускающих псевдодифференциальный проектор // Вестн. ЛГУ. 1982. № 1. С. 18–25.
- [20] Bott R., Tu L. Differential Forms in Algebraic Topology. Graduate Texts in Math. V. 82. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982.
- [21] Baum P., Douglas R. G. Toeplitz operators and Poincaré duality // Toeplitz Centennial. Proceedings of Toeplitz Memory Conf. (Tel Aviv, 1981). Operator Theory Adv. Appl. 1982. V. 4. P. 137–166.
- [22] Karoubi M. Algèbres de Clifford et K -theorie // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1968. V. 4. № 1. P. 161–270.
- [23] Мищенко А. С. Векторные расслоения и их применения. М.: Наука, 1984.
- [24] Connes A., Sullivan D., Teleman N. Quasiconformal mappings, operators on Hilbert space, and local formulae for characteristic classes // Topology. 1994. V. 33. № 4. P. 663–681.