Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридчук, В. О. Казак, Фазовое пространство
начально-краевой задачи для уравнения Хоффа, *Матем.
заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 292–297

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm347>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:10:27

УДК 517.9

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

Г. А. Свиридюк, В. О. Казак

Уравнение Хоффа $(\lambda + \Delta)u_t = -\alpha u - \beta u^3$ описывает динамику выпучивания двутавровой балки. Показано, что фазовым пространством уравнения Хоффа является простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое подпространством, дополнительным к ядру $\ker(\lambda + \Delta)$.

Библиография: 9 названий.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . Уравнение Хоффа

$$(\lambda + \Delta)u_t = -\alpha u - \beta u^3 \quad (0.1)$$

в случае $n = 1$ моделирует динамику выпучивания двутавровой балки [1]. Функция $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, имеет физический смысл отклонения балки от положения равновесия, параметры $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку (λ) и свойства материала (α, β). Начально-краевая задача

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.2)$$

для уравнения (0.1) впервые исследовалась в [2]. Здесь же была отмечена принципиальная неразрешимость задачи (0.1), (0.2) при произвольных начальных условиях. Изучение множества допустимых начальных значений, понимаемого как фазовое пространство задачи (0.1), (0.2), начато в [3], [4]. Однако в обоих случаях получены лишь частные результаты.

Статья содержит полное описание фазового пространства задачи (0.1), (0.2). Методы исследования аналогичны [4], [5]. В первой части приводятся достаточные условия разрешимости задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа. Все результаты этой части вытекают из [6], [7] и поэтому снабжены лишь набросками доказательств. Во второй части абстрактные результаты прилагаются к задаче (0.1), (0.2). Отметим еще, что все рассуждения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении “спектральных” вопросов вводится их естественная комплексификация. Кроме того, все контуры ориентированы “движением против часовой стрелки”, а символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены соответственно единичный и нулевой операторы, области определения которых ($\text{dom } \mathbb{I}$ и $\text{dom } \mathbb{O}$) ясны из контекста.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 97-01-00444 и Минобразования РФ по направлению “Математика” № 27.

1. Задача Коши. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \text{Cl}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен), оператор $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ (т.е. линейен и непрерывен). Следуя [6], назовем оператор M (L, σ) -ограниченным, если существует число $a \in R_+$ такое, что для всех $\mu \in \mathbb{C}$ таких, что $|\mu| > a$, выполняется условие $(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$.

ЛЕММА 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$, где $\mathcal{U}^0 \supset \ker L$, а $\mathcal{F}^1 \subset \text{im } L$. Искомые расщепления задаются проекторами

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(\mu L - M)^{-1} d\mu$$

соответственно, а контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| = r > a\}$.

Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на множество $\text{dom } L \cap \mathcal{U}^k$ ($\mathcal{U}^k$), $k = 0, 1$.

ЛЕММА 1.2. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда $L_k \in \text{Cl}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$, $M^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$.

Пусть оператор $F \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (1.1)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \quad (1.2)$$

Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, тогда в силу лемм 1.1 и 1.2 задача расщепляется на две задачи

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}F_0(u), \quad u^0 = u_0^0, \quad (1.3)$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}F_1(u), \quad u^1(0) = u_0^1, \quad (1.4)$$

где операторы $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$, $F_0 = (\mathbb{I} - Q)F$, $F_1 = QF$, а $u^0 = (\mathbb{I} - P)u$, $u_1 = Pu$.

Оператор G нильпотентен степени $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда формально дифференцируя уравнения по t и умножая слева на G , получим

$$0 = u^0 + M_0^{-1} \sum_{q=0}^p H^q \frac{d^q}{dt^q} F_0(u), \quad (1.5)$$

где оператор $H = L_0M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Условие (1.5) выполняется точно тогда, когда оператор H нильпотентен степени p .

Пусть существует окрестность $O \in \mathcal{U}$ точки $u_0 \in \mathcal{U}$ такая, что

$$\forall u \in O \quad HF'_{0u} \equiv \mathbb{O}, \quad (1.6)$$

где $F'_{0u} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0)$ – производная Фреше оператора $F_0 \in C^k(\mathcal{U}; \mathcal{F}^0)$ в точке u . Тогда уравнение (1.5) принимает более простой вид

$$0 = u^0 + M_0^{-1}F_0(u). \quad (1.7)$$

Пусть u_0 – решение уравнения (1.7), причем существует оператор

$$(M_0 + F'_{0u}(\mathbb{I} - P))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0). \quad (1.8)$$

Тогда в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $O^0 \subset U^0$ и $O^1 \subset U^1$ точек u_0^0 и u_0^1 соответственно и отображение $\delta \in C^k(O^1; O^0)$ такие, что $u^0 = \delta(u^1)$ есть решение уравнения (1.7) при любом $u^1 \in O^1$, причем $u_0^0 = \delta(u_0^1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если u_0 – решение уравнения (1.7), то, не теряя общности, можно положить $O = O^0 \oplus O^1$.

В окрестности O уравнение (1.4) приобретет вид

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}F_1(\mathbb{I} + \delta)(u^1).$$

Пусть оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, тогда оператор $\delta \in C^\infty(O^1; O^0)$ и в силу классической теоремы Коши [7] для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u^1 \in C^\infty((-T, T); O^1)$ задачи (1.4). Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, а оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} = \{u \in \mathcal{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + F(u)) = 0\}$, и выполнены условия (1.5), (1.7) и (1.8). Тогда для некоторого $T = T(u_0) > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathcal{M})$ задачи (1.1), (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, включение $u_0 \in \mathcal{M}$ означает, что u_0 – решение уравнения (1.7). Поэтому искомое решение $u = u(t)$ имеет вид $u = (\mathbb{I} + \delta)(u^1)$. Отсюда $u(t) \in \mathcal{M}$ при любом $t \in (-T, T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Следуя [3], [4], множество $\mathcal{P} \subset U$ назовем *фазовым пространством* уравнения (1.2), если для любого $u_0 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathcal{P})$ задачи (1.1), (1.2) при некотором $T = T(u_0)$. В условиях теоремы 1.1 множество $\mathcal{M} \cap O$ – фазовое пространство уравнения (1.1), являющееся банаховым C^∞ -многообразием, моделируемым пространством $\mathcal{U}^1$.

2. Фазовое пространство. Чтобы редуцировать задачу (0.1), (0.2) к задаче (1.1), (1.2), положим $\mathcal{U} = L_4$, $\mathcal{F} = W_2^{-1}$ (все пространства определены на области Ω). Операторы L , M , F определим формулами

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_{\Omega} (\lambda uv - u_{x_k} v_{x_k}) dx \quad \forall u, v \in \dot{W}_2^1, \\ \langle Mu, v \rangle &= -\alpha \int_{\Omega} uv dx, \quad \langle F(u), v \rangle = -\beta \int_{\Omega} u^3 v dx \quad \forall u, v \in L_4, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L_2 . Вложение $\dot{W}_2^1 \hookrightarrow L_4$ плотно и непрерывно при $n \leq 4$, поэтому оператор $L \in \text{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$. В [3], [4] показано, что в силу вложения $(L_4)^* \cong L_{4/3} \hookrightarrow W_2^{-1}$ оператор $F \in C^\infty(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

По построению оператор L фредгольмов (т.е. $\text{ind } L = 0$). Кроме того, спектр $\sigma(L)$ оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$. Пусть точка $0 \notin \sigma(L)$, тогда в силу [8] проекторы $P = Q = \mathbb{O}$. Поэтому все условия теоремы 1.1 очевидным образом выполнены и, значит, справедлива

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $0 \notin \sigma(L)$ и $n \leq 4$. Тогда для любого $u_0 \in L_4$ и некоторого $T = T(u_0)$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); L_4)$ задачи (0.1), (0.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как нетрудно заметить, в условиях теоремы 2.1 фазовым пространством уравнения Хоффа является все пространство L_4 .

Теперь, пусть $0 \in \sigma(L)$. В ядре $\ker L$ выберем ортонормальный (в смысле L_2) базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$. В силу [8] достаточным условием (L, σ) -ограниченности оператора является отсутствие M -присоединенных векторов. В нашем случае поскольку $M\psi \notin \text{im } L$ при любом $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, то M -присоединенные векторы оператора L отсутствуют. Далее, проекторы P и Q имеют вид

$$P = Q = \mathbb{I} - \sum_{l=1}^m \langle \cdot, \varphi_l \rangle \varphi_l \quad (2.1)$$

и, значит, операторы $H = G = \mathbb{O}$. Отсюда немедленно вытекает, что условия (1.5) и (1.6) тривиально выполняются. Из (2.1) и (1.8) следует, что в фазовом пространстве уравнения Хоффа лежат те точки $u \in L_4$, для которых

$$\int_{\Omega} (\alpha + \beta u^2) u \varphi_l dx = 0, \quad (2.2)$$

причем определитель

$$\left| \int_{\Omega} (\alpha + 3\beta u^2) \varphi_k \varphi_l dx \right| \neq 0, \quad (2.3)$$

где $k, l = 1, 2, \dots, m$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество решений уравнений (2.2) из пространства L_4 и введем в рассмотрение множество $\mathcal{L} = \{u \in L_4: \langle u, \varphi_l \rangle = 0, l = 1, 2, \dots, m\}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $0 \in \sigma(L)$ и $n \leq 4$. Тогда для любого $v \in \mathcal{L}$ существует единственный вектор $\psi \in \ker L$ такой, что $u = \psi + v \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теорией степени непрерывного отображения. Для этого фиксируем точку $v \in \mathcal{L}$ и, пользуясь (2.2), построим отображение

$$f: \psi \rightarrow \left(\beta \int_{\Omega} (\psi + v)^3 \psi \, dx + \alpha \|\psi\|_2^2 \right) \psi. \quad (2.4)$$

(Здесь и далее $\|\cdot\|_k$ – норма пространства L_k .) Как нетрудно видеть, $f \in C(\ker L, \ker L)$. Далее, из (2.4) в силу неравенства Гёльдера получим

$$\langle f(\psi), \psi \rangle \geq \|\psi\|_2^2 \|\psi\|_4 (\beta \|\psi\|_4^3 - 3\beta \|\psi\|_4^2 \|v\|_4 - 3\beta \|\psi\|_4 \|v\|_4^2 - \beta \|v\|_4^3 - \alpha c^2 \|\psi\|_4^2),$$

где c – константа вложения $L_2 \hookrightarrow L_4$. Отсюда вытекает, что $\langle f(\psi), \psi \rangle > 0$ на сфере радиуса $R > 3(\|v\|_4 + \|v\|_4^2 + \|v\|_4^3 + c^2 \alpha (3\beta)^{-1})$.

Далее, пусть u и v – два решения (2.2) при фиксированном $v \in \mathcal{L}$, т.е. $u = \xi + v$ и $w = \eta + v$. Тогда

$$0 = \alpha \int_{\Omega} (\xi - \eta)^2 \, dx + \beta \int_{\Omega} (\xi - \eta)^2 (u^2 + uw + w^2) \, dx. \quad (2.5)$$

Поскольку $u^2 + uw + w^2 > 0$ кроме случая $u = v = 0$, то из (2.5) вытекает, что $u = w$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $0 \in \sigma(L)$ и $n \leq 4$. Тогда при любом $u_0 \in \mathcal{M}$ и некотором $T = T(u_0) > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathcal{M})$ задачи (0.1), (0.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $A(u)$ матрицу, определитель которой фигурирует в (2.3). Предположим, что $\det A(u) = 0$ для некоторой точки $u \in \mathcal{U}$. Тогда существует вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ такой, что $A(u)\psi = 0$. Однако

$$\langle A(u)\psi, \psi \rangle = \int_{\Omega} (\alpha + 3\beta u^2) \psi^2 \, dx > 0.$$

Поэтому теорема справедлива в силу теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В силу леммы 1.2 и теоремы 2.2 фазовым пространством уравнения Хоффа служит простое C^∞ -многообразие, моделируемое пространством $\mathcal{L}$. (Напомним [5], что гладкое многообразие называется *простым*, если существует его атлас, содержащий единственную карту.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В силу теорем 2.1 и 2.2 точка 0 является стационарным решением задачи (0.1), (0.2) и в любом случае лежит в фазовом пространстве уравнения Хоффа. Это говорит об отсутствии в задаче (0.1), (0.2) бифуркаций типа бифуркации Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Рассмотрим случай $\dim \ker L = 1$, т.е. $\ker L = \text{span}\{\varphi\}$, $\|\varphi\|_2 = 1$. Согласно лемме 2.1 для любого $v \in \mathcal{L}$ существует единственное число $s_0 \in \mathbb{R}$ такое, что вектор $s_0 \varphi + v \in \mathcal{M}$. Другими словами, s_0 – единственный корень уравнения

$$s^3 \|\varphi\|_4^4 + 3s^2 \int_{\Omega} \varphi^3 v \, dx + s \left(\int_{\Omega} \varphi^2 v^2 \, dx + \alpha \beta^{-1} \right) + \int_{\Omega} \varphi v^3 \, dx = 0. \quad (2.6)$$

Множество пар $(s, v) \in \mathbb{R} \times \mathcal{L}$, удовлетворяющих (2.6), названо в [9] *2-сборкой Уитни*. Простота этого множества как гладкого банахова многообразия – удивительный факт по сравнению с результатами [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
- [2] Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1516–1526.
- [3] Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г. Фазовые пространства одного класса операторных полулинейных уравнений типа Соболева // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 250–258.
- [4] Свиридюк Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 192–207.
- [5] Свиридюк Г. А., Якупов М. М. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 11. С. 1538–1543.
- [6] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
- [7] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Волгоград: Платон, 1996.
- [8] Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г., Дудко Л. Л. Относительная σ -ограниченность линейных операторов // Изв. вузов. Матем. 1997. № 7. С. 68–73.
- [9] Бокарева Т. А., Свиридюк Г. А. Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 3–10.

Челябинский государственный университет

E-mail: ridyu@cgu.chel.su, kazak@math.cgu.chel.su

Поступило

26.01.2000