Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Строго выставленные точки разложимых множеств в пространствах интегрируемых по Бохнеру функций, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 2, 298–306

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm348>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:04:43

УДК 517.982

СТРОГО ВЫСТАВЛЕННЫЕ ТОЧКИ РАЗЛОЖИМЫХ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО БОХНЕРУ ФУНКЦИЙ

А. А. Толстоногов

Дается характеристика строго выставленных точек выпуклого замкнутого ограниченного разложимого множества $\Gamma \subset L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, в терминах строго выставленных точек значений отображения $F: T \rightarrow 2^X$, которое является многозначным представлением множества Γ . Как следствие получены необходимые условия, характеризующие строго выставленные точки единичного шара из $L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, в терминах подобных точек единичного шара из X .

Библиография: 16 названий.

Изучение характерных точек выпуклых замкнутых разложимых множеств является актуальной задачей в связи с использованием этих множеств в различных приложениях. Типичным примером разложимого множества является совокупность всех измеримых селекторов измеримого многозначного отображения с непустыми значениями. В приложениях, например в теории дифференциальных включений, теории оптимального управления и т.д., разложимые множества фигурируют как значения многозначного оператора Немыцкого (оператора суперпозиции).

Характеризация экстремальных (крайних) точек совокупности всех измеримых селекторов интегрально ограниченного многозначного отображения с выпуклыми замкнутыми значениями изучалась в [1], а характеристика этих же точек выпуклого замкнутого ограниченного разложимого множества в пространстве интегрируемых по Бохнеру функций рассматривалась в работе [2].

В недавно вышедшей работе [3] изучались острые (denting) точки совокупности всех измеримых селекторов интегрального ограниченного многозначного отображения с выпуклыми замкнутыми значениями, а характеристика строго выставленных точек такого же множества для частного вида интегрально ограниченного многозначного отображения рассмотрена в работе [4].

В настоящей работе мы даем характеристику строго выставленных точек замкнутых выпуклых ограниченных разложимых множеств в достаточно общих пространствах интегрируемых по Бохнеру функций. Наши результаты как следствие включают результаты работы [4], а их доказательство базируется на иных предположениях.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00216.

1. Основные обозначения и предварительные сведения. В обозначениях и определениях мы следуем [5]. Пусть $(Y, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, $(Y', \|\cdot\|)$ – его топологически сопряженное пространство, $\langle y, y' \rangle$ – каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между Y и Y' , Y_σ и Y'_σ – пространства Y и Y' со слабыми $\sigma(Y, Y')$ и $\sigma(Y', Y)$ топологиями соответственно.

Пусть $D \subset Y$ – ограниченное множество и $y' \in Y'$, $y' \neq 0$. Обозначим $M(D, y') = \sup\{\langle y, y' \rangle \mid y \in D\}$. Если $\alpha > 0$, то множество

$$S(D, y', \alpha) = \{y \in D \mid \langle y, y' \rangle > M(D, y') - \alpha\}$$

называется *срезом* (slice [5]) множества D .

Пусть $K \subset Y$ – выпуклое замкнутое ограниченное множество с топологией, индуцированной топологией пространства $(Y, \|\cdot\|)$.

Точка $y_* \in K$ называется *строго выставленной* (strongly exposed [5]) точкой множества K , если существует элемент $y^* \in Y'$ такой, что

- а) $\langle y_*, y^* \rangle = \sup\{\langle y, y^* \rangle \mid y \in K\}$;
- б) множества $\{S(K, y^*, \alpha), \alpha > 0\}$ образуют в множестве K базу окрестностей точки y_* в нормированной топологии.

В этом случае элемент $y^* \in Y'$ называется *строго выставляющим* точку y_* .

Из а), б) следует, что если y_* – строго выставленная точка, то $\langle y_*, y^* \rangle < \langle y, y^* \rangle$, $y \in K$, $y \neq y_*$.

Если diam означает диаметр множества в нормированной топологии, то условие б) эквивалентно условию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \text{diam } S(K, y^*, \alpha) = 0.$$

Другим эквивалентным условием является следующее: если $y_n \in K$, $n \geq 1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n - y_*, y^* \rangle = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y_*\| = 0$.

Из определения строго выставленной точки множества следует, что она является экстремальной (крайней) точкой множества.

В дальнейшем через $\text{strex } K$ мы будем обозначать совокупность всех строго выставленных точек множества K .

Пусть (T, Σ, μ) – измеримое пространство с неотрицательной полной σ -конечной мерой μ и σ -алгеброй Σ μ -измеримых множеств, $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельное банахово пространство, 2^X – совокупность всех подмножеств из X , включая пустое множество, и 2_0^X – совокупность всех непустых подмножеств из X .

Обозначим через $L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, банахово пространство классов эквивалентности интегрируемых по Бохнеру функций $f: T \rightarrow X$ с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_T \|f(t)\|^p d\mu \right)^{1/p}$$

и через $L'_p(T, X)$ пространство, топологически сопряженное к $L_p(T, X)$. Известно, что пространство $L'_p(T, X)$ отождествимо с пространством $L_q(T, X'_\sigma)$, $1/p + 1/q = 1$, скалярно измеримых функций $f': T \rightarrow X'_\sigma$ [6], для которых функция $t \rightarrow \|f'(t)\|$ является элементом пространства $L_q(T, \mathbb{R})$. Каноническая билинейная форма, устанавливающая двойственность между $L_p(T, X)$ и $L_q(T, X')$, имеет вид

$$\langle f, f' \rangle = \int_T \langle f(t), f'(t) \rangle d\mu.$$

Множество $A \subset L_p(T, X)$ называется *разложимым*, если для любых $f, \varphi \in A$ и для любого $E \in \Sigma$ элемент $f \cdot \chi_E + \varphi \cdot \chi_{T \setminus E}$ принадлежит A , где χ_E означает характеристическую функцию множества E .

Отображение $F: T \rightarrow 2^X$ называется *измеримым* (μ -*измеримым*), если $F^{-1}(U) = \{t \in T \mid F(t) \cap U \neq \emptyset\} \in \Sigma$ для любого замкнутого множества $U \subset X$.

Отображение $F: T \rightarrow 2_0^X$ называется *p -интегрально ограниченным*, если существует элемент $\lambda \in L_p(T, \mathbb{R})$ такой, что

$$\|F(t)\| = \sup\{\|x\| \mid x \in F(t)\} \leq \lambda(t) \text{ почти всюду.}$$

Отображение $F: T \rightarrow 2^X$ называется *полунепрерывным снизу*, если множество $F^{-1}(U)$ открыто для любого открытого множества $U \subset X$. Непосредственно из определения следует, что если отображение $F: T \rightarrow 2^X$ полунепрерывно снизу, то отображение $\bar{F}: T \rightarrow 2^X$, $\bar{F}(t) = \overline{F(t)}$, где черта означает замыкание в X , также полунепрерывно снизу.

Для отображения $F: T \rightarrow 2_0^X$ обозначим

$$S^p(F) = \{f \in L_p(T, X) \mid f(t) \in F(t) \text{ почти всюду}\}.$$

Известно [7], что для замкнутого ограниченного разложимого множества $\Gamma \subset L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, существует единственное (с точностью до множества меры нуль) измеримое p -интегрально ограниченное отображение $F: T \rightarrow 2_0^X$ с замкнутыми значениями такое, что

$$\Gamma = S^p(F). \quad (1.1)$$

При этом если множество Γ выпукло, то значениями отображения F являются выпуклые множества.

Отображение $F: T \rightarrow 2_0^X$, удовлетворяющее (1.1), мы будем называть *многозначным представлением* множества Γ .

Очевидно, что если $F: T \rightarrow 2_0^X$ измеримое p -интегрально ограниченное отображение с замкнутыми значениями, то $S^p(F)$ является замкнутым ограниченным разложимым множеством в пространстве $L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$.

2. Характеризация строго выставленных точек. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, (T, Σ, μ) – отделимое локально компактное счетное в бесконечности пространство с неотрицательной мерой Радона μ , которая, как известно, является полной, а X – сепарабельное банахово пространство.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\Gamma \subset L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, – замкнутое выпуклое ограниченное разложимое множество и $F: T \rightarrow 2_0^X$ – его многозначное представление. Точка $f_* \in \Gamma$ является строго выставленной тогда и только тогда, когда $f(t)$ является строго выставленной точкой множества $F(t)$ при почти всех $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f_* – строго выставленная точка множества Γ и $f^* \in L_q(T, X'_\sigma)$, $1/p + 1/q = 1$, – элемент, строго выставляющий точку f_* . Согласно (1.1) $f_*(t) \in F(t)$ почти всюду на T . В соответствии с определением строго выставленной точки

$$\langle f_*, f^* \rangle = \sup_{f \in \Gamma} \int_T \langle f(t), f^*(t) \rangle d\mu. \quad (2.1)$$

Воспользовавшись теоремой 2.2 [7], справедливой для разложимых множеств, получаем

$$\sup_{f \in \Gamma} \int_T \langle f(t), f^*(t) \rangle d\mu = \int_T \sup_{x \in F(t)} \langle x, f^*(t) \rangle d\mu. \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) следует равенство

$$\int_T \langle f_*(t), f^*(t) \rangle d\mu = \int_T \sup_{x \in F(t)} \langle x, f^*(t) \rangle d\mu. \quad (2.3)$$

Так как $f_*(t) \in F(t)$ почти всюду, то

$$\langle f_*(t), f^*(t) \rangle \leq \sup_{x \in F(t)} \langle x, f^*(t) \rangle. \quad (2.4)$$

Поэтому из (2.3), (2.4) вытекает

$$\langle f_*(t), f^*(t) \rangle = \sup_{x \in F(t)} \langle x, f^*(t) \rangle \quad \text{почти всюду.} \quad (2.5)$$

Пусть $s(t) = \sup\{\langle x, f^*(t) \rangle \mid x \in F(t)\}$ и $\lambda \in L_1(T, R)$, $\lambda(t) > 0$, $t \in T$, $\int_T \lambda(t) dt = 1$. Положим

$$F_n(t) = \left\{ x \in F(t) \mid s(t) - \frac{1}{n} \lambda(t) \leq \langle x, f^*(t) \rangle \right\}. \quad (2.6)$$

Так как функция $t \rightarrow s(t)$ измерима, а функция $(x, t) \rightarrow \langle x, f^*(t) \rangle$ типа Каратеодори, то из [8, теорема 6.4] и [7, теорема 1.0] вытекает, что $F_n: T \rightarrow 2_0^X$ является измеримым отображением с замкнутыми выпуклыми значениями.

Пусть

$$\Gamma_n = \left\{ f \in \Gamma \mid \langle f_*, f^* \rangle - \frac{1}{n} \leq \langle f, f^* \rangle \right\}.$$

В соответствии с (2.2), (2.5), (2.6) для любого $f \in S^p(F_n)$

$$\sup_{\varphi \in \Gamma} \langle \varphi, f^* \rangle - \frac{1}{n} \leq \langle f, f^* \rangle.$$

Поэтому $f_* \in S^p(F_n) \subset \Gamma_n$. Так как f_* – строго выставленная точка множества Γ , то $\text{diam } \Gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\text{diam } S^p(F_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $S^p(F_n)$ – замкнутое ограниченное разложимое множество, то в соответствии с [7, теорема 2.2]

$$\sup_{f, \varphi \in S^p(F_n)} \|f - \varphi\|_p^p = \int_T \left\{ \sup_{x, y \in F_n(t)} \|x - y\|^p \right\} d\mu.$$

Поэтому

$$\text{diam } S^p(F_n) = \left(\int_T (\text{diam } F_n(t))^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } S^p(F_n) = 0,$$

то существует подпоследовательность n_k , $k \geq 1$, последовательности $n \geq 1$ такая, что почти всюду

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } F_{n_k}(t) = 0.$$

Из последнего равенства и (2.5) следует, что $f_*(t)$ является строго выставленной точкой $F(t)$ при почти всех $t \in T$, а элемент $f^*(t) \in X'$ строго выставляет точку $f_*(t)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f_* \in \Gamma$ и $f_*(t)$ является строго выставленной точкой $F(t)$ при почти каждом $t \in T$. Обозначим через $x'_*(t)$ элемент из X' , который строго выставляет точку $f_*(t)$. Пусть B'_σ – единичный замкнутый шар из X' со слабой $\sigma(X', X)$ топологией, который является метризуемым компактом. В дальнейшем B'_σ мы рассматриваем как самостоятельное метрическое компактное пространство. Не нарушая общности, можно считать, что $x'_*(t) \in B'_\sigma$.

Из [7, теорема 1.0] следует, что существует счетное семейство измеримых селекторов $g_n(t)$, $n \geq 1$, отображения $F(t)$ такое, что

$$F(t) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n(t)}, \quad t \in T, \quad (2.7)$$

где черта означает замыкание в X .

Воспользовавшись определением измеримых функций из T в X , получаем, что для любого компакта $\mathcal{T} \subset T$, любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $\mathcal{T}_\varepsilon \subset \mathcal{T}$, $\mu(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_\varepsilon) \leq \varepsilon$, на котором функции $f_*(t)$, $g_n(t)$, $n \geq 1$, непрерывны и $f_*(t)$ является строго выставленной точкой $F(t)$ при каждом $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$. Зафиксируем $\mathcal{T}_\varepsilon$. Тогда из (2.7) следует, что $F(t)$ является полунепрерывной снизу на $\mathcal{T}_\varepsilon$ многозначной функцией с непустыми замкнутыми выпуклыми значениями.

Пусть $r(t, x') = \sup\{\langle y, x' \rangle \mid y \in F(t)\}$, $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$, $x' \in B'_\sigma$. Очевидно, что

$$r(t, x') = \sup_{n \geq 1} \{\langle g_n(t), x' \rangle\}.$$

Поэтому функция $(t, x') \rightarrow r(t, x')$ полунепрерывна снизу на $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$.

Рассмотрим функции

$$r_n(t, x') = \sup_{1 \leq k \leq n} \{\langle g_k(t), x' \rangle\}, \quad t \in \mathcal{T}_\varepsilon, \quad x' \in B'_\sigma.$$

Так как каждая из функций $(t, x') \rightarrow \langle g_k(t), x' \rangle$ непрерывна на $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$, то $r_n(t, x')$, $n \geq 1$, – неубывающая последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к $r(t, x')$. Пусть

$$F_m(t, x') = \left\{ x \in F(t) \mid \langle x, x' \rangle \geq r(t, x') - \frac{1}{m} \right\},$$

$$F_m^n(t, x') = \left\{ x \in F(t) \mid \langle x, x' \rangle \geq r_n(t, x') - \frac{1}{m} \right\}.$$

Ясно, что $F_m^n(t, x')$, $n \geq 1$, – убывающая по включению последовательность непустых выпуклых замкнутых множеств и $F_m(t, x') = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_m^n(t, x')$.

Покажем, что многозначное отображение $(t, x') \rightarrow F_m^n(t, x')$ полунепрерывно снизу на $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$. Для этого достаточно показать, что многозначное отображение $\Phi_m^n(t, x')$, задаваемое формулой

$$\Phi_m^n(t, x') = \left\{ x \in F(t) \mid \langle x, x' \rangle > r_n(t, x') - \frac{1}{m} \right\},$$

полунепрерывно снизу, поскольку $F_m^n(t, x') = \overline{\Phi_m^n(t, x')}$.

Пусть $U \subset X$ – открытое множество и $t_0 \in \mathcal{T}_\varepsilon$, $x'_0 \in B'_\sigma$, $x_0 \in \Phi_m^n(t_0, x'_0) \cap U$. Тогда $\langle x, x'_0 \rangle - r_n(t_0, x'_0) + 1/m > 0$. Так как функция $\langle x, x' \rangle - r_n(t, x') + 1/m$ непрерывна на $X \times \mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$, то существуют окрестности $O(x_0), V(t_0), W(x'_0)$ точек x_0, t_0, x'_0 такие, что $\langle x, x' \rangle - r_n(t, x') + 1/m > 0$ для всех $x \in O(x_0), t \in V(t_0), x' \in W(x'_0)$. Из паракомпактности пространства $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$ [9] и теоремы Майкла [10] следует, что существует непрерывный селектор $x(t)$ отображения $F(t)$ такой, что $x(t_0) = x_0$. Поэтому найдется окрестность $V_1(t_0) \subset V(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in V_1(t_0), x' \in W(x'_0)$ будут выполняться соотношения

$$x(t) \in F(t) \cap U, \quad \langle x(t), x' \rangle - r_n(t, x') + \frac{1}{m} > 0.$$

Но это означает, что $x(t) \in \Phi_m^n(t, x') \cap F_m(t) \cap U = \Phi_m^n(t, x) \cap U$ для всех $t \in V_1(t_0), x' \in W(x'_0)$. Следовательно, отображение $(t, x') \rightarrow \Phi_m^n(t, x')$ полунепрерывно снизу в точке (t_0, x'_0) . Таковым будет и отображение $(t, x') \rightarrow F_m^n(t, x')$.

Воспользовавшись теоремой 1.0 из [7], получаем, что существует счетное семейство $q_k^n(t, x'), k \geq 1$, борелевских селекторов отображения $F_m^n(t, x')$ такое, что

$$F_m^n(t, x') = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} q_k^n(t, x')}, \quad t \in \mathcal{T}_\varepsilon, \quad x' \in B'_\sigma.$$

Тогда функция

$$\text{diam } F_m^n(t, x') = \sup\{\|q_k^n(t, x') - q_l^n(t, x')\|, k \geq 1, l \geq 1\}$$

является борелевской на $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$.

Рассмотрим множество

$$V_{m,k}^n = \left\{ (t, x') \in \mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma \mid \text{diam } F_m^n(t, x) \leq \frac{1}{k} \right\},$$

которое является борелевским в $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$. Поэтому множество

$$V = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{m,k}^n$$

борелевское в $\mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$.

Мы утверждаем, что точка $(t, x') \in V$ тогда и только тогда, когда $\text{diam } F_m(t, x') \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

В самом деле, пусть $(t, x') \in V$. Тогда при фиксированном $k \geq 1$ найдутся $m(k), n(k)$ такие, что $(t, x') \in V_{m(k),k}^{n(k)}$. Но это означает, что $\text{diam } F_{m(k)}^{n(k)}(t, x') \leq 1/k$. Так как $F_m(t, x') \subset F_{m(k)}^{n(k)}(t, x')$ при $m \geq m(k)$, то $\text{diam } F_m(t, x') \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Наоборот, пусть $\text{diam } F_m(t, x') \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда для любого $k \geq 1$ найдется $m(k)$ такое, что $\text{diam } F_m(t, x') \leq 1/k$ при $m \geq m(k)$. Для $m(k)$ найдется $n(k)$ такое, что

$$r_{n(k)}(t, x') - \frac{2}{m(k)} \geq r(t, x') - \frac{1}{m(k)}.$$

Поэтому $F_{2m(k)}^{n(k)} \subset F_{m(k)}(t, x')$. Следовательно, $(t, x') \in V_{2m(k), k}^{n(k)}$. Отсюда вытекает, что $(t, x') \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{m, k}^n$ для любого $k \geq 1$. Поэтому $(t, x') \in V$.

Рассмотрим множество

$$W = \{(t, x') \in \mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma \mid \langle f_*(t), x' \rangle = r(t, x')\},$$

которое очевидно совпадает с множеством

$$\{(t, x') \in \mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma \mid r(t, x') - \langle f_*(t), x' \rangle \leq 0\}.$$

Так как функция $(t, x') \rightarrow r(t, x') - \langle f_*(t), x' \rangle$ полунепрерывна снизу, то множество W замкнуто. Поэтому множество $V \cap W \subset \mathcal{T}_\varepsilon \times B'_\sigma$ борелевское.

Из определения множества $V \cap W$ следует, что $(t, x') \in V \cap W$ тогда и только тогда, когда элемент $x' \in X'$ строго выставляет точку $f_*(t)$. Так как $(t, x'_*(t)) \in V \cap W$, $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$, где $x'_*(t) \in X'$ – элемент, строго выставляющий точку $f_*(t)$, то на $\mathcal{T}_\varepsilon$ будет определено отображение $\Phi: \mathcal{T}_\varepsilon \rightarrow 2_0^{B'_\sigma}$ с непустыми значениями, графиком которого является борелевское множество $V \cap W$.

Воспользовавшись [11, следствие 2], получаем, что существует селектор $f^*: \mathcal{T}_\varepsilon \rightarrow B'_\sigma$ отображения $\Phi(t)$ такой, что для любого открытого множества $U \subset B'_\sigma$ множество $\{t \in \mathcal{T}_\varepsilon \mid f^*(t) \in U\}$ является аналитическим. Согласно [12, теорема 2.2.12] любое аналитическое множество из $\mathcal{T}_\varepsilon$ является μ -измеримым. Поэтому $f^*(t)$ является слабо измеримой функцией из $\mathcal{T}_\varepsilon$ в X'_σ [6] и, следовательно, скалярно измеримой. Более того, элемент $f^*(t) \in X'_\sigma$ строго выставляет точку $f_*(t) \in F(t)$, $t \in \mathcal{T}_\varepsilon$.

Так как T – локально компактное счетное в бесконечности пространство, то существует возрастающая по включению последовательность компактов $T_n \subset T$, $n \geq 1$, такая, что $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. На основании доказанного выше существует возрастающая по включению последовательность $\mathcal{T}_n \subset T_n$, $n \geq 1$, компактов с $\mu(T_n \setminus \mathcal{T}_n) \leq 1/n$, $n \geq 1$, и последовательность $f_n^*: \mathcal{T}_n \rightarrow X'_\sigma$ скалярно измеримых функций таких, что $f_n^*(t)$ строго выставляет точку $f_*(t) \in F(t)$ при $t \in \mathcal{T}_n$.

Рассмотрим функцию $\varphi': T \rightarrow X'_\sigma$, определенную по правилу $\varphi'(t) = f_1^*(t)$, $t \in \mathcal{T}_1$, $\varphi'(t) = f_n^*(t)$, $t \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$, $n \geq 2$, $\varphi'(t) = 0$, $t \in T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Так как $\mu(T \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n) = 0$, то функция $\varphi': T \rightarrow X'_\sigma$ скалярно измерима, $\varphi'(t)$ строго выставляет точку $f_*(t)$ при почти каждом $t \in T$ и $\|\varphi'(t)\| \leq 1$.

Пусть $\lambda \in L_q(T, R)$, $\lambda(t) > 0$, $t \in T$. Тогда функция $f^*(t) = \lambda(t) \cdot \varphi'(t)$ является элементом пространства $L_q(T, X'_\sigma)$ и $f^*(t)$ при почти каждом $t \in T$ строго выставляет точку $f_*(t) \in F(t)$. Покажем, что $f_* \in \Gamma$ является строго выставленной точкой множества Γ , а элемент $f^* \in L_q(T, X'_\sigma)$ строго выставляет f_* .

С помощью тех же рассуждений, которые использовались при доказательстве необходимости, получаем

$$\langle f_*, f^* \rangle = \sup\{\langle f_*, \varphi \rangle \mid \varphi \in \Gamma\}. \quad (2.8)$$

Пусть последовательность $f_n \in \Gamma$, $n \geq 1$, такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n - f_*, f^* \rangle = 0.$$

Наша цель – доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_*\|_p = 0.$$

Так как $f_n(t) \in F(t)$ почти всюду, то

$$\langle f_n(t), f^*(t) \rangle \leq \langle f_*(t), f^*(t) \rangle = \sup\{\langle y, f^*(t) \rangle \mid y \in F(t)\}.$$

Поэтому

$$\langle f_* - f_n, f^* \rangle = \int_T |\langle f_*(t) - f_n(t), f^*(t) \rangle| d\mu \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, существует подпоследовательность f_{n_k} , $k \geq 1$, последовательности f_n , $n \geq 1$, такая, что $\langle f_{n_k}(t), f^*(t) \rangle \rightarrow \langle f_*, f^*(t) \rangle$ почти всюду при $k \rightarrow \infty$. Но это означает, что $f_{n_k}(t) \rightarrow f^*(t)$ почти всюду при $k \rightarrow \infty$. Теперь из p -интегральной ограниченности отображения $F(t)$ и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что последовательность $f_{n_k} \in \Gamma$, $k \geq 1$, сходится к f_* в $L_p(T, X)$. Воспользовавшись хорошо известными аргументами, мы получаем, что и сама последовательность f_n , $n \geq 1$, сходится к f_* в $L_p(T, X)$. Принимая во внимание (2.8), мы заключаем, что f_* является строго выставленной точкой множества Γ , а элемент $f^* \in L_q(T, X')$ строго выставляет f_* . Достаточность доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\Gamma \subset L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, – замкнутое выпуклое ограниченное разложимое множество. Тогда $\text{strex} \Gamma$ является разложимым множеством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При доказательстве необходимости в теореме 2.1 мы не использовали топологические свойства пространства T , а использовали только теоремы 1.0, 2.2 из [7] и теорему 6.4 из [8], которые справедливы для произвольного измеримого пространства с полной неотрицательной σ -конечной мерой. Поэтому необходимость утверждения теоремы 2.1 справедлива для любого измеримого пространства (T, Σ, μ) с полной неотрицательной σ -конечной мерой μ .

Воспользовавшись теоремой 2.1, дадим необходимые условия, характеризующие строго выставленные точки единичного шара из $L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$.

В дальнейшем (T, Σ, μ) – измеримое пространство с полной неотрицательной σ -конечной мерой μ , B_p и $B(X)$ – единичные замкнутые шары из пространств $L_p(T, X)$, $1 \leq p < \infty$, и X соответственно. Если $f \in L_p(T, X)$, то $\text{supp } f = \{t \in T \mid \|f(t)\| \neq 0\}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $f_* \in \text{strex} B_p$, $1 \leq p < \infty$, и $f^* \in L_q(T, X')$, $1/p + 1/q = 1$, – элемент, строго выставляющий точку f_* . Тогда $\|f_*\|_p = 1$ и

- $f_*(t)/\|f_*(t)\| \in \text{strex} B(X)$ при почти всех $t \in \text{supp } f_*$;
- элемент $\|f_*(t)\| \cdot f^*(t) \in X'$ при почти всех $t \in \text{supp } f_*$ строго выставляет точку $f_*(t)/\|f_*(t)\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f_* \in \text{ext } B_p$, то $\|f_*\|_p = 1$. Рассмотрим многозначное отображение $F: T \rightarrow 2_0^X$, определенное по правилу $F(t) = \|f_*(t)\| \cdot B(X)$. Тогда $F(t)$ является измеримым многозначным отображением с замкнутыми выпуклыми значениями. Поэтому $S^p(F)$ является замкнутым выпуклым ограниченным разложимым множеством и $f_* \in S^p(F) \subset B_p$. Следовательно, $f_* \in \text{strex } S^p(F)$.

Тогда в соответствии с утверждением теоремы 2.1 и замечанием 2.1

$$f_*(t) \in \text{strex } F(t) \quad \text{почти всюду на } T. \quad (2.9)$$

Теперь утверждения а) и б) леммы с очевидностью вытекают из (2.9).

Подобная характеристика строго выставленных точек множества $S^1(F)$ измеримого интегрально ограниченного отображения $F: T \rightarrow X$ с замкнутыми выпуклыми значениями, где $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой с мерой Лебега, была дана в недавно вышедшей работе [4], но в ней использовались другие аргументы.

Необходимые и достаточные условия для строго выставленных точек множества B_p , $1 < p < \infty$, в терминах утверждения леммы 2.1 для произвольного банахова пространства X были даны в работах [10]–[12].

Утверждения леммы 2.1 дополняют результаты работ [13]–[15] в отношении необходимых условий для случая $p = 1$.

В заключение отметим, что в работе [2] было введено понятие разложимой оболочки множества $\text{strexp } \Gamma$ как наименьшего по включению разложимого множества, содержащего множество $\text{strexp } \Gamma$. В соответствии со следствием 2.1 разложимая оболочка множества $\text{strexp } \Gamma$ совпадает с множеством $\text{strexp } \Gamma$. Этот факт позволяет упростить доказательство ряда результатов из [2], [16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Castaing C., Valadier M. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Lecture Notes in Math. V. 580. Berlin: Springer, 1977.
- [2] Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // *Set-Valued Anal.* 1996. V. 4. P. 173–203.
- [3] Benabdellah H. Denting points in Bochner Banach ideal spaces $X(E)$ // *J. Convex Analysis*. 1999. V. 6. P. 183–194.
- [4] Суслов С. И. Характеризация сильно выступающих точек в $L_1(T, X)$ // *Сиб. матем. ж.* 2000. Т. 41. № 3. С. 692–695.
- [5] Bourgin R. D. *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon–Nikodym Property*. Lecture Notes in Math. V. 993. Berlin: Springer, 1983.
- [6] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения*. М.: Мир, 1969.
- [7] Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // *J. Multivariate Anal.* 1977. V. 7. P. 149–182.
- [8] Himmelberg C. J. Measurable relations // *Fund. Math.* 1975. V. 87. P. 53–72.
- [9] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. М.: Наука, 1968.
- [10] Michael E. Continuous selections, I // *Ann. Math.* 1956. V. 63. P. 361–382.
- [11] Левин В. Л. Измеримые сечения многозначных отображений и проекции измеримых множеств // *Функцион. анализ и его прилож.* 1978. Т. 12. № 2. С. 40–45.
- [12] Федерер Г. *Геометрическая теория меры*. М.: Наука, 1987.
- [13] Greim P. Strongly exposed points in Bochner L^p -spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1983. V. 88. P. 81–84.
- [14] Zhibao Hu, Bor-Luh Lin. Strongly exposed points in Lebesgue–Bochner function spaces // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 120. P. 1159–1165.
- [15] Hensgen W. Exposed points in Lebesgue–Bochner and Hardy–Bochner Spaces // *J. Math. Anal. Appl.* 1996. V. 198. P. 780–795.
- [16] Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A. L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // *Set-Valued Anal.* 1996. V. 4. P. 237–269.