Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Балашов, О P -свойстве выпуклых компактов, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 323–333

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:27:09

УДК 517.977.8

О P -СВОЙСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

М. В. Балашов

В работе рассмотрены выпуклые компакты в конечномерном пространстве, удовлетворяющие специальному свойству (P -свойству). Данное свойство обеспечивает определенную регулярность границы таких множеств. Дано достаточно полное описание таких множеств и показано, что основные операции с множествами не выводят из данного класса. Рассмотрены примеры использования P -свойства; в частности, показано, что всякое порождающее множество обладает P -свойством.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Введем используемые обозначения. *Суммой* множеств A_1 и A_2 называется множество $A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$. *Геометрической разностью* множеств A_1 и A_2 называется множество

$$A_1 \overset{*}{-} A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x + A_2 \subset A_1\} = \bigcap_{a \in A_2} (A_1 - a).$$

Через $\text{int } A$ будем обозначать внутренность множества A , через $\text{ri } A$ – относительную внутренность (см. [1]), через ∂A – границу множества A , через $\partial_{\text{ri}} A$ – относительную границу множества A (см. [1]). Выпуклую оболочку множества A будем обозначать $\text{co } A$, аффинную – $\text{aff } A$, линейную – $\text{lin } A$. Символом $B_r(a)$ обозначим шар радиуса r с центром в точке a . *Расстоянием* в метрике Хаусдорфа между множествами A_1 и A_2 называется число

$$h(A_1, A_2) = \inf\{r > 0 \mid A_1 \subset A_2 + B_r(0), A_2 \subset A_1 + B_r(0)\}.$$

Надграфиком функции $f: \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}$ называется множество $\text{epi } f = \{(x, \mu) \in A \times \mathbb{R} \mid \mu \geq f(x)\}$.

Для выпуклого компакта A и вектора $p \neq 0$ *опорное* подмножество A в направлении p есть $A(p) = \{x \in A \mid \langle p, x \rangle = \max_{a \in A} \langle p, a \rangle\}$.

Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, где L и l – ортогональные подпространства, $\dim L = n-1$, $\dim l = 1$. отождествим l с $\mathbb{R}$, а L с $\mathbb{R}^{n-1}$. Точку из $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде (x, μ) , где $x \in L = \mathbb{R}^{n-1}$, $\mu \in l = \mathbb{R}$.

Пусть $P_L A$ – ортогональная проекция выпуклого компакта A на L . Введем функцию $f: P_L A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall x \in P_L A \quad f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00743, и Конкурсного центра фундаментального естествознания, грант № 97-0-1.9-26.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ таков, что для любого описанного выше разложения $\mathbb{R}^n = L \oplus l$ и для любого отождествления l с $\mathbb{R}$, а L с $\mathbb{R}^{n-1}$ построенная выше функция f оказывается непрерывной на $P_L A$. Тогда будем говорить, что множество A обладает P -свойством, или является P -множеством.

Отметим, что в описанных выше обозначениях функция $g: P_L A \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L A$ $g(x) = \max\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$, также непрерывна, если A — P -множество.

Кроме того, f — выпуклая функция (надграфик выпуклый), а g — вогнутая.

Можно дать геометрическую трактовку P -свойства. Рассмотрим две прямые l_1 и l_2 (одномерные аффинные множества), которые параллельны. P -свойство для множества A означает, что близость l_1 и l_2 в метрике Хаусдорфа влечет близость отрезков $l_1 \cap A_1$ и $l_2 \cap A_2$ в той же метрике (предполагается непустота множеств $l_1 \cap A_1$ и $l_2 \cap A_2$).

В п. 2 будет дано описание множеств, обладающих P -свойством и исследованы операции, не выводящие из данного класса множеств.

В п. 3 рассмотрена связь P -множеств с порождающими множествами и приведены примеры использования свойств P -множеств.

В заключение п. 1 приведем пример множества, не обладающего P -свойством.

ПРИМЕР 1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задано множество A :

$$A = \text{co}\{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3 = 1\} \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Пусть $L = Ox_1x_2$, $l = Ox_3$. Проекция $P_L A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$,

$$\forall (x_1, x_2) \in P_L A \quad f(x_1, x_2) = \min\{x_3 \mid (x_1, x_2, x_3) \in A\}.$$

Имеем $f(0, 0) = 0$, а при $\varphi \in (\pi/2, \pi)$ $f(1 + \cos \varphi, \sin \varphi) = 1$. Таким образом, f не полунепрерывно сверху в точке $(0, 0)$.

2. Описание множеств, обладающих P -свойством. Оказывается, что P -свойством обладают многие важные классы выпуклых компактов и, кроме того, основные алгебраические операции с множествами не выводят из данного класса.

ЛЕММА 2.1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $\dim L = n - 1$, $\dim l = 1$, $l = \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L A$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$. Тогда f полунепрерывна снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что полунепрерывность снизу функции f эквивалентна замкнутости лебеговых множеств f вида $\{x \in P_L A \mid f(x) \leq c\}$, см. теорему 7.1 из [1, § 7]. Поскольку

$$\{x \in P_L A \mid f(x) \leq c\} = P_L(A \cap \{(x, \mu) \mid \mu \leq c\}),$$

а последнее множество замкнуто, то f полунепрерывна снизу на $P_L A$.

Таким образом, P -свойство выпуклого компакта A зависит от того, будет ли (для всякого разложения $\mathbb{R}^n = L \oplus l$) функция f полунепрерывна сверху на $\partial_{\text{н}} P_L A$?

ЛЕММА 2.2. Пусть A — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$ или выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$. Тогда множество A обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $\dim L = n - 1$, $\dim l = 1$, $l = \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L A$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$.

Если A – многогранник, то и $P_L A$ – многогранник, т.е. локально симплицальное множество. Напомним (см. [1, § 10]), что множество S называется *локально симплицальным*, если для любой точки $x \in S$ найдется число $\varepsilon > 0$ и конечное множество симплексов $S_1, \dots, S_m$ из S с вершиной в x таких, что

$$B_\varepsilon(x) \cap S = B_\varepsilon(x) \cap \left(\bigcup_{i=1}^m S_i \right).$$

Если $A \subset \mathbb{R}^2$, то $P_L A$ – отрезок, т.е. также локально симплицальное множество.

По теореме 10.2 из [1, § 10] выпуклая функция полунепрерывна сверху на локально симплицальном множестве, т.е. f полунепрерывна сверху на $P_L A$.

Полунепрерывность снизу f следует из леммы 2.1.

ЛЕММА 2.3. Пусть A – строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество A обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $\dim L = n - 1$, $\dim l = 1$, $l = \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L A$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$.

Напомним, что множество строго выпукло, если его граница не содержит отрезков.

Поскольку выпуклая функция f непрерывна на $\text{ri } P_L A$ (см. теорему 10.1 из [1, § 10]), то с учетом леммы 2.1 достаточно проверить полунепрерывность сверху функции f на $\partial_{\text{ri}} P_L A$.

Фиксируем $x_0 \in \partial_{\text{ri}} P_L A$. Допустим, f не полунепрерывна сверху, т.е. найдется $x_k \in P_L A$, для которой $x_k \rightarrow x_0$ и $\mu_0 = \lim f(x_k) > f(x_0)$. Тогда отрезок $[(x_0, f(x_0)), (x_0, \mu_0)]$ лежит в A . Если допустить, что какая-то точка этого отрезка внутренняя в A , то приходим к противоречию с включением $x_0 \in \partial_{\text{ri}} P_L A$. Таким образом, отрезок $[(x_0, f(x_0)), (x_0, \mu_0)]$ лежит на ∂A , что противоречит строгой выпуклости A .

ЛЕММА 2.4. Пусть выпуклые компакты A_1 и A_2 из $\mathbb{R}^n$ обладают P -свойством. Тогда множество $A = A_1 \cap A_2$ обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $\dim L = n - 1$, $\dim l = 1$, $l = \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L A$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$; $\forall x \in P_L A_1$ $f_1(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A_1\}$; $\forall x \in P_L A_2$ $f_2(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A_2\}$.

Так как $f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$, $x \in P_L A$, то из непрерывности функций f_1 и f_2 на $P_L A \subset P_L A_1 \cap P_L A_2$ получаем непрерывность f .

ЛЕММА 2.5. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ обладает P -свойством, $H \subset \mathbb{R}^n$ – аффинное множество размерности $k < n$. Тогда для любого $x \in A \cap H$ множество $A \cap H$ – обладает P -свойством в несущем подпространстве H .

Доказательство леммы 2.5 очевидно.

ЛЕММА 2.6. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ обладает P -свойством. Если погрузить A в $\mathbb{R}^m$, $m > n$, то A также будет обладать P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^m = L \oplus l$, $N = \text{aff } A$. Если l не параллельно N , то $f: P_L A \rightarrow l$ есть сужение аффинной функции (с графиком N) на $P_L A$, которое, очевидно, непрерывно.

Если l параллельно N , то, переходя в несущее подпространство $N - y$, $y \in N$, со множеством $A - y$, получаем, по условию, непрерывность функции f .

ЛЕММА 2.7. Пусть $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ обладает P -свойством, $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $A = A_1 \overset{*}{-} A_2 \neq \emptyset$. Тогда A также обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $A = \bigcap_{a \in A_2} (A_1 - a)$. Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $f_A(x): P_L A \rightarrow l$, $\forall x \in P_L A$ $f_A(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$.

Легко видеть, что $f_A(x) = \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x)$, где $\forall x \in P_L(A_1 - a)$ $f_{A_1-a}(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A_1 - a\}$.

Непрерывные функции f_{A_1-a} равномерно по $a \in A_2$ равномерно непрерывны на компакте $P_L A \subset P_L(A_1 - a)$, а именно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in P_L A: |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon) \quad \forall a \in A_2 \quad (2.1)$$

$$|f_{A_1-a}(x_1) - f_{A_1-a}(x_2)| \leq \varepsilon.$$

Условие (2.1) следует из того, что функции $f_{A_1-a}(x)$ — сдвиги одной и той же функции $f_{A_1}(x): P_L A_1 \rightarrow l$, $\forall x \in P_L A_1$ $f_{A_1}(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A_1\}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $x_1, x_2 \in P_L A: |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ взято из (2.1). Пусть $a_k \in A_2$ — минимизирующая последовательность для $\sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_1)$. Из условия (2.1) для любого k верно

$$f_{A_1-a_k}(x_1) - f_{A_1-a_k}(x_2) \leq \varepsilon.$$

Переходя к пределу по k , имеем

$$\sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_1) - \overline{\lim} f_{A_1-a_k}(x_2) \leq \varepsilon.$$

Так как $\overline{\lim} f_{A_1-a_k}(x_2) \leq \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_2)$, то

$$\sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_1) - \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_2) \leq \varepsilon.$$

Аналогичное неравенство верно с заменой x_1 на x_2 , т.е., используя $\delta(\varepsilon)$ из (2.1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in P_L A: |x_1 - x_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

$$\left| \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_1) - \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x_2) \right| \leq \varepsilon,$$

что означает равномерную непрерывность $f_A(x) = \sup_{a \in A_2} f_{A_1-a}(x)$ на $P_L A$.

Перейдем к менее тривиальным свойствам.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выпуклые компакты $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ обладают P -свойством. Тогда $A = A_1 + A_2$ также обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, P_L – проектор на L . Легко проверить, что $P_L A = P_L A_1 + P_L A_2$.

Договоримся под i подразумевать числа 1 или 2.

Для любого $x \in P_L A_i$ $f_i(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A_i\}$; по условию функции f_i непрерывны на $P_L A_i$.

Функция $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in A\}$, $x \in P_L A$, может быть представлена в виде

$$f(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x, \ x_i \in P_L A_i\}. \quad (2.2)$$

Напомним, что операция в (2.2) называется *инфинимальной конволюцией* функций f_1 и f_2 (см. [1], [2]), ее геометрический смысл – сумма надграфиков f_1 и f_2 , т.е.

$$\text{epi } f = \text{epi } f_1 + \text{epi } f_2.$$

Покажем, что инфимум в (2.2) достигается для любого $x \in P_L A$. Пусть x_k^i – точки из $P_L A_i$ такие, что $x_k^1 + x_k^2 = x$ и $f_1(x_k^1) + f_2(x_k^2) \rightarrow f(x)$. Так как x_k^i лежат в компактах, то $x_k^i \rightarrow x_i \in P_L A_i$, $x_1 + x_2 = x$. Из непрерывности f_i получаем, что $f_1(x_k^1) + f_2(x_k^2) \rightarrow f_1(x_1) + f_2(x_2) = f(x)$.

По лемме 2.1 f полунепрерывна снизу.

Допустим, f не полунепрерывна сверху на $P_L A$, т.е. существует $t_k \in P_L A$: $t_k \rightarrow t$ и

$$\lim f(t_k) > f(t) = f_1(t_1) + f_2(t_2). \quad (2.3)$$

Заменяя, если нужно, A_1 на $A_1 - (t_1, f_1(t_1))$, а A_2 – на $A_2 - (t_2, f_2(t_2))$, можно без ограничения общности считать, что $t_1 = t_2 = t = 0$ (в L) и $f_1(0) = f_2(0) = f(0) = 0$.

Найдутся точки $x_k^i \in P_L A_i$: $x_k^1 + x_k^2 = t_k$. Выделяя сходящуюся подпоследовательность, получаем, что $x_k^i \rightarrow x_i \in P_L A_i$, $x_1 + x_2 = 0$.

Рассмотрим ситуацию, когда $x_1 \neq 0$.

Покажем, что в $P_L A_i$ найдутся точки d_k^i : $d_k^i \rightarrow 0$ и $d_k^1 + d_k^2 = t_k$.

Рассмотрим A_1 . Пусть $a = (x_1, f_1(x_1))$, $a_k = (x_k^1, f_1(x_k^1))$;

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_1(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_1(\varepsilon) \quad |x_1 - x_k^1| \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Функция f_1 непрерывна, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_2(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_2(\varepsilon) \quad |f_1(x_1) - f_1(x_k^1)| \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Пусть $l_1 = \text{lin}\{a\} = \mathbb{R}$, причем направление возрастания скалярного аргумента l_1 выберем по вектору a , $L_1 = \mathbb{R}^n \ominus l_1$. Введем новую функцию $g: P_{L_1} A_1 \rightarrow l_1$, $\forall z \in P_{L_1} A_1$ $g(z) = \min\{\lambda \mid (z, \lambda) \in A_1\}$. Функция g непрерывна на $P_{L_1} A_1$ по P -свойству A_1 .

Пусть $z_k = P_{L_1} a_k$.

Используя (2.4) и (2.5), получаем для любого $k \geq k_3(\varepsilon) = \max\{k_1(\varepsilon/2), k_2(\varepsilon/2)\}$

$$\begin{aligned} |z_k| &= h(\text{lin}\{a\}, \{a_k + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}) \leq |a - a_k| \\ &\leq |x_1 - x_k^1| + |f_1(x_1) - f_1(x_k^1)| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из непрерывности g имеем

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{|x_1|}{4}\right) \quad \exists k_4(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_4(\varepsilon) \quad |g(0) - g(z_k)| \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

Введем $b_k = (z_k, g(z_k) - g(0))$. Так как $g(0) \leq 0$, то b_k лежит выше (в смысле направления оси l_1), чем точка $(z_k, g(z_k))$. Точки b_k и a_k лежат на одном луче $\{(z_k, g(z_k)) + \lambda a \mid \lambda \geq 0\}$, $|b_k - (z_k, g(z_k))| = |g(0)|$.

При $\varepsilon \in (0, |x_1|/4)$ с учетом (2.6), (2.7) для всех $k \geq \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon), k_3(\varepsilon), k_4(\varepsilon)\}$ имеем

$$\begin{aligned} |a_k - (z_k, g(z_k))| &\geq -|a_k - a| + |a - (0, g(0))| - |(0, g(0)) - (z_k, g(z_k))| \\ &\geq -\varepsilon + |a - (0, g(0))| - |z_k| - |g(0) - g(z_k)| \\ &\geq -3\varepsilon + |a| + |g(0)| \geq -3\varepsilon + |x_1| + |g(0)| > |g(0)|, \end{aligned}$$

т.е. $b_k \in [a_k, (z_k, g(z_k))] \subset A_1$. Кроме того, $|b_k| \leq |z_k| + |g(0) - g(z_k)| \leq 2\varepsilon$.

Таким образом, мы построили последовательность $b_k \in A_1$ такую, что $b_k \rightarrow 0$ и $b_k \in \{a_k + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Пусть $c_k^1 = P_L b_k$. Ясно, что $c_k^1 \in P_L A_1$, $c_k^1 \rightarrow 0$ ($|c_k^1| \leq |b_k|$). Кроме того, $c_k^1 \in \{x_k^1 - \lambda x_1/|x_1| \mid \lambda \geq 0\}$, так как параллельные прямые $\text{lin}\{a\}$ и $\{a_k + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ проектируются на L в параллельные прямые $\text{lin}\{x_1\}$ и $\{x_k + \lambda x_1/|x_1| \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Проведя аналогичные рассуждения для множества A_2 , получаем, что найдется $c_k^2 \in P_L A_2$: $c_k^2 \rightarrow 0$ и $c_k^2 \in \{x_k^2 - \lambda x_2/|x_2| \mid \lambda \geq 0\}$.

Пусть $p = x_1/|x_1| = -x_2/|x_2|$.

Если для данного k $|x_1 - c_k^1| \geq |x_2 - c_k^2|$, то берем $d_k^2 = c_k^2$, $c_k^2 = x_k^2 + \lambda_k p$ для некоторого $\lambda_k \geq 0$; выбираем $d_k^1 = x_k^1 - \lambda_k p \in [x_k^1, c_k^1] \subset P_L A_1$.

Если для данного k $|x_1 - c_k^1| < |x_2 - c_k^2|$, то выбираем $d_k^1 = c_k^1$, $c_k^1 = x_k^1 - \lambda_k p$ для некоторого $\lambda_k \geq 0$; выбираем $d_k^2 = x_k^2 + \lambda_k p \in [x_k^2, c_k^2] \subset P_L A_2$.

По построению последовательности d_k^i бесконечно малые,

$$d_k^i \in P_L A_i \quad \text{и} \quad d_k^1 + d_k^2 = x_k^1 - \lambda_k p + x_k^2 + \lambda_k p = t_k.$$

В силу формулы (2.2) имеем $f(t_k) \leq f_1(d_k^1) + f_2(d_k^2)$; переходя к пределу и учитывая непрерывность f_i , получаем

$$\lim f(t_k) \leq \lim (f_1(d_k^1) + f_2(d_k^2)) = f_1(0) + f_2(0) = f(0),$$

что противоречит (2.3) (напомним, что $t_1 = t_2 = t = 0$).

В заключение докажем, что линейное отображение переводит P -множества в P -множества. При этом как вспомогательный результат докажем одну теорему об открытом отображении.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ обладает P -свойством, $B = TA$. Тогда отображение $T: A \rightarrow B$ открытое в индуцированных в A и B топологиях.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Топология в A понимается как $\tau_A = A \cap \tau_{\mathbb{R}^n}$, т.е. окрестностью точки $a \in A$ является всякое множество вида $(a + U) \cap A$, где U – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$. Топология в B понимается так же: $\tau_B = B \cap \tau_{\mathbb{R}^m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть без ограничения общности $0 \in A$ и $0 \in B$. Достаточно доказать открытость $T: A \rightarrow B$ в нуле.

Докажем, что если $y_k \in B$ и $y_k \rightarrow 0$, то найдется подпоследовательность последовательности y_k (снова y_k) и последовательность $a_k \in A: a_k \rightarrow 0, Ta_k = y_k$ для всех k .

Фиксируем $y_k \in B, y_k \rightarrow 0$. Найдется $x_k \in A: Tx_k = y_k$. В силу компактности A $x_k \rightarrow x$ и $Tx = 0$. Рассмотрим случай, когда $x \neq 0$.

Пусть $l = \text{lin}\{x\}$, $L = \mathbb{R}^n \ominus l$. отождествим l с $\mathbb{R}$; пусть направление возрастания скалярного аргумента l совпадает с x .

Всякий вектор из $\mathbb{R}^n$ будем представлять в виде (z, μ) , $z \in L, \mu \in l = \mathbb{R}$.

Введем $f: P_L A \rightarrow l, \forall z \in P_L A \quad f(z) = \min\{\mu \mid (z, \mu) \in A\}$. Так как A обладает Р-свойством, то функция f непрерывна.

Пусть $z_k = P_L x_k$;

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_1(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_1(\varepsilon) \quad |z_k| \leq |x - x_k| \leq \varepsilon.$$

В силу непрерывности f

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_2(\varepsilon) \quad \forall k \geq k_2(\varepsilon) \quad |f(0) - f(z_k)| \leq \varepsilon.$$

Пусть $a_k = (z_k, f(z_k) - f(0))$;

$$|a_k| \leq |z_k| + |f(z_k) - f(0)| \leq 2\varepsilon \quad \forall k \geq \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon)\},$$

т.е. $a_k \rightarrow 0$.

Так как $f(0) \leq 0$, то a_k лежит выше (относительно l с направлением), чем $(z_k, f(z_k))$, $|a_k - (z_k, f(z_k))| = |f(0)|$.

Выберем $\varepsilon \in (0, |f(0)|/4)$. При любом $k \geq \max\{k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon)\}$ имеем

$$\begin{aligned} |x_k - (z_k, f(z_k))| &\geq |x_k - x| + |x - (0, f(0))| - |(0, f(0)) - (z_k, f(z_k))| \\ &\geq -\varepsilon + |x - (0, f(0))| - |z_k| - |f(0) - f(z_k)| \\ &\geq -3\varepsilon + |x| + |f(0)| > |f(0)|, \end{aligned}$$

т.е. $a_k \in [(z_k, f(z_k)), x_k] \subset A$. Так как $a_k \in x_k + \text{lin}\{x\}$, то найдется $\lambda_k \in \mathbb{R}: a_k = x_k + \lambda_k x$;

$$Ta_k = Tx_k + \lambda_k Tx = y_k,$$

т.е. a_k – искомая последовательность.

Допустим, $T: A \rightarrow B$ не открыто в нуле. Это значит, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого k

$$B_{1/k}(0) \cap B \not\subset T(B_\delta(0) \cap A);$$

иными словами, найдутся $y_k \in B_{1/k}(0) \cap B$:

$$y_k \notin T(B_\delta(0) \cap A). \quad (2.8)$$

Выберем последовательность $a_k \in A: a_k \rightarrow 0$ и $Ta_k = y_k$. При больших k $a_k \in B_\delta(0) \cap A$, что противоречит (2.8).

ПРИМЕР 2.1. Теорема 2.2 неверна без предположения о P -свойстве A . Рассмотрим множество A из примера 1.1. Пусть T – оператор ортогонального проектирования на Ox_1x_2 . Легко видеть, что

$$TA = \{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1, \quad x_3 = 0\}.$$

Взяв $\delta \in (0, 1/2)$, имеем

$$\begin{aligned} T(B_\delta(0) \cap A) &\subset T\left(\operatorname{co}\left\{\left\{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{1}{2}\right\} \cup \{(0, 0, 0)\}\right\}\right) \\ &= \left\{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4}, \quad x_3 = 0\right\}. \end{aligned}$$

Последнее множество не является окрестностью нуля в TA .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейный оператор, выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ обладает P -свойством, $B = TA$. Тогда B обладает P -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{R}^m = L \oplus l$, $l = \mathbb{R}$. Для всех $x \in P_L B$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in B\}$.

Допустим, что существует $x_0 \in P_L B$ и последовательность $x_k \in P_L B: x_k \rightarrow x_0$ и

$$(x_k, f(x_k)) \rightarrow b \neq (x_0, f(x_0)).$$

Введем $b_k = (x_k, f(x_k))$, $b_0 = (x_0, f(x_0))$. По лемме 2.1 можно, не ограничивая общности, считать, что $\lim f(x_k) > f(x_0)$, поэтому вектор $b - b_0$ сонаправлен с l .

Пусть a_0, a – точки из A , для которых $b_0 = Ta_0$, $b = Ta$.

Далее, без ограничения общности считаем, что $a_0 = 0$ (и $b_0 = 0$); отсюда следует, что вектор b сонаправлен с l .

В силу теоремы 2.2 об открытом отображении для $T: A \rightarrow B$ получаем, что существует $a_k \in A: a_k \rightarrow a$ и $Ta_k = b_k$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ $h = \operatorname{lin}\{a\}$, $H = \mathbb{R}^n \ominus h$. отождествим h с $\mathbb{R}$; пусть направление возрастания скалярного аргумента h совпадает с a . Определим функцию $g: P_H A \rightarrow h = \mathbb{R}$, $\forall z \in P_H A$ $g(z) = \min\{\mu \mid (z, \mu) \in A\}$. Пусть $z_k = P_H a_k$.

Пусть $\tilde{a}_k = (z_k, g(z_k) - g(0))$. Имеем $|z_k| \leq |a - a_k| \rightarrow 0$. В силу непрерывности g по P -свойству A $g(z_k) \rightarrow g(0)$, откуда

$$|\tilde{a}_k| \leq |z_k| + |g(z_k) - g(0)| \rightarrow 0.$$

Так как $g(0) \leq 0$, то $\tilde{a}_k$ лежит выше (в смысле направления h), чем $(z_k, g(z_k))$.

Точки $\tilde{a}_k$ и a_k лежат на одном луче $\{(z_k, g(z_k)) + \lambda a \mid \lambda \geq 0\}$ и $|\tilde{a}_k - (z_k, g(z_k))| = |g(0)|$;

$$\begin{aligned} |a_k - (z_k, g(z_k))| &\geq -|a_k - a| + |a - (0, g(0))| - |(0, g(0)) - (z_k, g(z_k))| \\ &\geq -|a_k - a| + |a| + |g(0)| - |z_k| - |g(0) - g(z_k)|; \end{aligned}$$

при больших k последнее выражение больше $|g(0)|$, т.е. $\tilde{a}_k \in [(z_k, g(z_k)), a_k] \subset A$.

Итак, $\tilde{a}_k \in A$, $\tilde{a}_k \rightarrow 0$ и $\tilde{a}_k \in a_k + \operatorname{lin}\{a\}$.

Поскольку $|a_k - \tilde{a}_k| \rightarrow |a| > 0$, то, начиная с некоторого номера k_0 , $\forall k \geq k_0$ $\tilde{a}_k = a_k - \lambda_k a / |a|$, где $\lambda_k \geq |a|/2$.

Для $k > k_0$ имеем

$$T\tilde{a}_k = Ta_k - \lambda_k \frac{Ta}{|a|} = b_k - \lambda_k \frac{b}{|a|},$$

а поскольку вектор b сонаправлен с l , точка $T\tilde{a}_k$ лежит ниже (в смысле l), чем точка $b_k = (x_k, f(x_k))$, что невозможно по определению f .

3. Примеры использования свойств P -множеств. Одно из свойств, представляющих интерес, приведено в теореме 2 п. 2.

В данном пункте мы рассмотрим еще два приложения P -свойства.

Напомним (см. [3]), что выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *порождающим*, если для любого пересечения сдвигов M вида $A = \bigcap_{x \in X} (M + x) \neq \emptyset$ найдется выпуклый компакт B такой, что $A + B = M$.

Порождающие множества и их свойства описаны в [3], они представляют интерес в некоторых задачах выпуклого и многозначного анализа, оптимального управления, аппроксимации множеств (см. [3]–[5]).

ТЕОРЕМА 3.1. *Если выпуклый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ – порождающее множество, то M обладает P -свойством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по размерности.

В $\mathbb{R}^2$ утверждение верно: на плоскости все выпуклые компакты – порождающие множества (см. следствие 2.6 § 2 из [3]), а по лемме 2.2 все выпуклые компакты на плоскости обладают P -свойством. Это база индукции.

Пусть утверждение доказано в пространствах размерности $2, \dots, n-1$. Покажем его справедливость в $\mathbb{R}^n$.

Будем считать, что $\text{int } M \neq \emptyset$ (если это не так, можно перейти в несущее подпространство).

Пусть $\mathbb{R}^n = L \oplus l$, $l = \mathbb{R}$, $\forall x \in P_L M$ $f(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in M\}$.

По лемме 2.1 f полунепрерывна снизу.

Допустим, f не полунепрерывна сверху в некоторой точке относительной границы $P_L M$ (без ограничения общности – в нуле), это можно записать так: найдется $x_k \in P_L M$: $x_k \rightarrow 0 \in \partial_{\text{ri}} P_L M$, $f(x_k) \rightarrow 0$, а $f(0) < 0$.

Можно считать, что $x_k \in \text{ri } P_L M$, так как f непрерывна на отрезках, соединяющих любую точку $z \in P_L M$ с точкой $z_0 \in \text{ri } P_L M \neq \emptyset$ и выполнено включение $(z, z_0] \subset \text{ri } P_L M$ (см. [1]).

Если $x_k \in \text{ri } P_L M$, то f субдифференцируема в точках x_k (см. теорему 23.4 из [1, § 23]); пусть $p_k \in \partial f(x_k)$, $q_k = (p_k, -1)$.

Отрезок $[(0, f(0)), (0, 0)]$ лежит на границе M (иначе он не проектировался бы проектором P_L в точку $0 \in \partial_{\text{ri}} P_L M$). Пусть q_0 – вектор, отделяющий отрезок $[(0, f(0)), (0, 0)]$ от M . Ясно, что q_0 имеет вид $(p_0, 0)$.

Пусть $e_k = (x_k, f(x_k))$.

Пусть

$$A_m = M * \left(\{0\} \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} \{e_k\} \right) = M \cap \bigcap_{k=m}^{\infty} (M - e_k).$$

Отметим, что $0 \in A_m$, поэтому $A_m \neq \emptyset$. Так как множество M порождающее, то для каждого m найдется выпуклый компакт B_m такой, что

$$A_m + B_m = M. \quad (3.1)$$

Поскольку $e_k \rightarrow 0$, то $\{0\} \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} \{e_k\} \rightarrow \{0\}$ в метрике Хаусдорфа.

Из непрерывности геометрической разности при условии непустоты внутренности (следствие 3 из [6, § 4]) получаем, что $A_m \rightarrow M$, $B_m \rightarrow \{0\}$ в метрике Хаусдорфа.

Легко видеть, что для всех m $0 \in \partial A_m$ и

$$\{(0, 0) + \lambda(0, -1) \mid \lambda > 0\} \cap A_m = \emptyset. \quad (3.2)$$

Поясним (3.2): так как q_k , $k \geq m$, – “негоризонтальные” нормальные векторы ко множествам $M - e_k$ в точке нуль, то каждый из них нормальный вектор и к A_m в нуле, откуда следует (3.2).

Пусть $H_0 = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^n \mid \langle q_0, (x, \mu) \rangle = \langle p_0, x \rangle = 0\}$ – опорная гиперплоскость, отделяющая отрезок $[(0, f(0)), (0, 0)]$ от M .

Так как $0 \in A_m$, то $B_m \subset M$ для всех m . Так как $0 \in M$, то $0 \in B_m$ для всех m . Так как q_0 – опорный вектор к M в точке нуль, то (в силу $0 \in B_m$) имеем следующее включение для опорных подмножеств $B_m(q_0)$ и $M(q_0)$:

$$B_m(q_0) \subset M(q_0) \quad \forall m. \quad (3.3)$$

Из (3.1) имеем

$$A_m(q_0) + B_m(q_0) = M(q_0).$$

В силу теоремы 2.2 § 2 из [3] множество $M(q_0)$ также является порождающим в подпространстве H_0 .

Перейдем к рассмотрению в H_0 . Пусть $B_m(q_0) = \overline{\{b_{mj}\}_{j=1}^{\infty}}$. Отметим, что

$$A_m(q_0) = M(q_0) \overset{*}{-} B_m(q_0) = M(q_0) \overset{*}{-} \{b_{mj}\}_{j=1}^{\infty} = \bigcap_{j=1}^{\infty} (M(q_0) - b_{mj}), \quad (3.4)$$

$$B_m(q_0) \rightarrow \{0\}.$$

Пусть $L_0 = L \cap H_0$, $f_0: L_0 \rightarrow l = \mathbb{R}$ ($l \subset H_0$), $\forall x \in P_{L_0} M(q_0)$ $f_0(x) = \min\{\mu \mid (x, \mu) \in M(q_0)\}$. Введем $x_{mj} = P_{L_0} b_{mj}$; так как $b_{mj} \in B_m(q_0) \subset M(q_0)$ (по (3.3)), то $x_{mj} \in P_{L_0} M(q_0)$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть выполнено условие

$$\exists m, \exists c > 0 \quad \forall j \quad |b_{mj} - (x_{mj}, f_0(x_{mj}))| \geq c.$$

Тогда для этого m по верхнему равенству в свойстве (3.4) получаем

$$[c(0, -1), (0, 0)] \subset A_m(q_0) \subset A_m,$$

что противоречит (3.2).

Случай 2. Пусть выполнено условие

$$\forall m, \forall c > 0 \exists j \quad |b_{mj} - (x_{mj}, f_0(x_{mj}))| < c.$$

Выбрав $c = 1/m$, определим j_m , для которого

$$|b_{mj_m} - (x_{mj_m}, f_0(x_{mj_m}))| < \frac{1}{m}.$$

В силу включения $b_{mj_m} \in B_m(q_0)$ и нижнего предельного соотношения в (3.4) получаем, что $b_{mj_m} \rightarrow 0$, откуда $x_{mj_m} \rightarrow 0$ и $f_0(x_{mj_m}) \rightarrow 0$, и в силу предположения индукции имеет место непрерывность f_0 на $P_{L_0}M(q_0)$, т.е.

$$0 = \lim f_0(x_{mj_m}) = f_0(0_{n-2}).$$

Но f_0 есть сужение на L_0 функции f , откуда $f_0(0_{n-2}) = f(0_{n-1}) < 0$. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что в пространстве размерности больше 2 класс порождающих множеств уже гораздо беднее, чем класс P -множеств. Так, многие многогранники и строго выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, не являются порождающими (см. [3]). Тем не менее тот факт, что порождающие множества обладают P -свойством, оказываются полезным при изучении их свойств.

Другое применение P -свойства показано в следующем утверждении о непрерывности геометрической разности двух многозначных отображений. В отличие от известных теорем (см. [6]) здесь не требуется непустота внутренности у геометрической разности.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mathcal{T}$ – метрическое пространство, $F \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый компакт, обладающий P -свойством. Пусть $T(t)$, $t \in \mathcal{T}$, – непрерывная и невырожденная для всех t матрица размера $n \times n$, а $G(t)$ – непрерывное (в метрике Хаусдорфа) многозначное отображение такое, что

$$H(t) = (T(t)F) \overset{*}{-} G(t) \neq \emptyset \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

Тогда многозначное отображение $H(t)$ непрерывно.

Доказательство теоремы 3.2 получается дословным повторением доказательства теорем 3.1 и 3.2 из [7] с учетом того, что функция f , описанная в теореме 3.1 из [7], непрерывна в силу P -свойства F .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
- [2] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [3] Балашов М. В., Половинкин Е. С. M -сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 26–64.
- [4] Иванов Г. Е., Половинкин Е. С. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 10. С. 1641–1648.
- [5] Половинкин Е. С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 103–130.
- [6] Половинкин Е. С. Элементы теории многозначных отображений. Учебн. пособие. М.: Изд. МФТИ, 1982.
- [7] Балашов М. В. О геометрической разности многозначных отображений // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 2. С. 163–169.