Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Басов, Бифуркация положения равновесия в системах с нулевыми корнями характеристического уравнения, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 323–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm35>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 11:49:11

УДК 517.925

БИФУРКАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМАХ С НУЛЕВЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. В. Басов

Рассматривается вещественная автономная система $2d$ дифференциальных уравнений с малым положительным параметром ε :

$$\dot{x}_i = x_{i+d} + X_i^{(n+1)}(x, \varepsilon), \quad \dot{x}_{i+d} = -x_i^{2n-1} + X_{i+d}^{(2n)}(x, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, d,$$

где $d \geq 2$, $n \geq 2$, $X_j^{(k)}$ – непрерывные и достаточное число раз непрерывно дифференцируемые по x, ε в окрестности нуля функции, разложение которых начинается с порядка k , если считать, что переменные x_i имеют первый порядок малости, ε – второй, а переменные x_{i+d} – порядок n . Приводится конечное число явно выписанных условий на коэффициенты младших членов разложения правых частей этой системы, гарантирующих наличие у системы при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ одного или нескольких d -мерных инвариантных торов с бесконечно малыми частотами движений на них.

Библиография: 8 названий.

1. Постановка задачи. Система (1). Рассмотрим вещественную автономную систему $2d$ ($d \geq 2$) дифференциальных уравнений с малым положительным параметром ε , матрица линейной части которой имеет d пар нулевых собственных чисел с непростыми элементарными делителями,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+d} + X_i^{[n+1]}(x, \varepsilon) + X_i^{[n+2]}(x, \varepsilon) + X_i^{*[n+3]}(x, \varepsilon), \\ \dot{x}_{i+d} &= -x_i^{2n-1} + X_{i+d}^{[2n]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{[2n+1]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{*[2n+2]}(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, d$, $d \geq 2$; $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_d)$, $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_{2d})$; $n \geq 2$; $X_\iota^{[k]}(x, \varepsilon)$ – однородные полиномы k -й степени, $\iota = 1, \dots, 2d$, если считать, что переменные x_i имеют первый порядок малости, ε – второй, x_{i+d} – порядок n ; функции $X_\iota^{*[k]}$ непрерывны на множестве $H = \{(x, \varepsilon): \|x\| < x_0, 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0\}$, $X_\iota^{*[k]}(\varepsilon^{1/2}x', \varepsilon^{n/2}x'', \varepsilon) = \varepsilon^k \hat{X}_\iota^{*[k]}(x', x'', \varepsilon)$, $\hat{X}_\iota^{*[k]}$ – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые в H функции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00245.

Выбор порядков для переменных x_i , x_{i+d} и ε обусловлен необходимостью осуществления обобщенной полярной замены Ляпунова (5) и стандартной аффинной замены (7), приведенных в п. 2.

Таким образом, рассматривается ситуация, когда в уравнениях для $\dot{x}''$ системы (1) младшие члены имеют отрицательные знаки и одинаковые нечетные степени, а значит, для нулевого приближения каждой пары уравнений с номерами i и $i + d$ реализуется случай центра.

Полиномы $X_\iota^{[k]}(x, \varepsilon)$ удобно записывать в следующем виде:

$$X_\iota^{[2m+\nu]} = \sum_{\mu=0}^m X_{\iota, 2m+\nu}^{[2\mu+\nu]}(x) \varepsilon^{m-\mu}, \quad X_{\iota, k}^{[\varkappa]} = \sum_{|p'|+n|p''|=\varkappa} X_{\iota, k}^{(p', p'')} x^p, \quad (2)$$

где $m \geq 1$, $\nu = 0, 1$, $\iota = 1, \dots, 2d$, $p = (p_1, \dots, p_{2d})$ имеет целые неотрицательные компоненты, $p' = (p_1, \dots, p_d)$, $|p| = p_1 + \dots + p_{2d}$, $x^p = x_1^{p_1} \dots x_{2d}^{p_{2d}}$.

Целью настоящей работы является получение явных условий на коэффициенты полиномов $X_\iota^{[k]}$, гарантирующих при всех достаточно малых положительных значениях ε рождение у системы (1) d -мерных инвариантных торов, но говорить о бифуркации положения равновесия системы (1) можно только в том случае, когда $X_\iota^{[k]}(0, \varepsilon) \equiv 0$ и $X_\iota^{*[k]}(0, \varepsilon) \equiv 0$.

В работе [1, гл. 1, § 1] поставленная задача решена для случая $n = 1$, когда матрица линейной части системы (1) имеет d пар чисто мнимых собственных чисел. Там же описана процедура нахождения инвариантных торов размерности большей, чем d .

Как будет видно из дальнейших рассуждений, решающую роль при доказательстве существования инвариантных торов у системы (1) при $n \geq 2$ играет наличие положительных решений в алгебраической бифуркационной системе уравнений $V(\alpha) = 0$, вектор-функция $V(\alpha)$ которой при четных n задается формулой (14_{ев}) из п. 4 и содержит только коэффициенты полиномов $X_i^{[n+1]}$ и $X_{i+d}^{[2n]}$ системы (1), а при нечетных n – формулой (12_{од}) из п. 7. Все ограничения на решения бифуркационной системы, а их конечное число, в явном виде представлены в условиях (18) и (16). Согласно теореме 1, доказанной в п. 9, их достаточно для существования у системы (1) при любом достаточно малом значении параметра $\varepsilon > 0$ одного или нескольких инвариантных торов размерности d с бесконечно малыми по отношению к амплитудам частотами движений на них.

Следует отметить важное отличие систем с чисто мнимыми характеристическими корнями из [1], где $n = 1$, от систем, рассматриваемых в настоящей работе, где $n \geq 2$ и, следовательно, все корни равны нулю. При $n = 1$ для реализации процесса осреднения на собственные числа матрицы линейной части исходной системы накладывается условие Зигеля на “малые знаменатели”. Аналогичное условие непосредственно в системе (1) при $n \geq 2$ накладывать не на что. Оказывается, ему должны будут удовлетворять корни бифуркационной системы уравнений – условие (18₂), не имевшие при $n = 1$ подобных ограничений.

В п. 10 и п. 11 рассматриваются два характерных и весьма интересных частных случая для системы (1), в частности, когда она вообще не зависит от малого параметра, что позволяет, наложив пару условий на коэффициенты, найти у нее бесконечные семейства инвариантных торов.

Отметим также, что полученные ниже результаты имеют непосредственное прикладное значение, так как частным случаем системы (1) является система d дифференциальных уравнений второго порядка с малым положительным параметром ε :

$$\ddot{y} + y^{2n-1} = Y(y, \dot{y}, \varepsilon), \quad (3)$$

описывающая колебания d слабосвязанных осцилляторов с восстанавливающими силами порядка $2n - 1$. В (3) $y = (y_1, \dots, y_d)$, $y^k = (y_1^k, \dots, y_d^k)$.

Особенность системы (3) заключается в том, что при $n \geq 2$ невозмущенные колебания каждого из осцилляторов имеют частоты, которые бесконечно малы при стремлении к нулю амплитуд колебаний.

Действительно, замена $y = x'$, $\dot{y}_1 = x''$ преобразует (3) в систему

$$x' = x'', \quad \dot{x}'' = -x'^{2n-1} + Y(x', x'', \varepsilon). \quad (4)$$

Пусть в системе (4) $Y_i = X_{i+d}^{[2n]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{[2n+1]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{*[2n+2]}(x, \varepsilon)$, где $i = 1, \dots, d$, $X_{i+d}^{[k]}$, $X_{i+d}^{*[k]}$ описаны в системе (1). Тогда для системы (3) с указанными правыми частями справедливы все результаты, которые получены ниже для системы (1).

2. Полярная и аффинная замены. Система (8). Сделаем в системе (1) обобщенную полярную замену переменных, предложенную А. М. Ляпуновым в [2, с. 290]:

$$x_i = r_i \text{Cs } \varphi_i, \quad x_{i+d} = -r_i^n \text{Sn } \varphi_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad (5)$$

или в векторной записи: $x' = r \text{Cs } \varphi$, $x'' = -r^n \text{Sn } \varphi$, в которой функции $\text{Cs } \varphi_i$, $\text{Sn } \varphi_i$ определяются уравнениями $\text{Cs}' \varphi_i = -\text{Sn } \varphi_i$, $\text{Sn}' \varphi_i = \text{Cs}^{2n-1} \varphi_i$ и начальными данными $\text{Cs } 0 = 1$, $\text{Sn } 0 = 0$. При таком определении Cs – четная, а Sn – нечетная периодические функции с периодом ω , зависящие от параметра n , и $\text{Cs}^{2n} \varphi_i + n \text{Sn}^2 \varphi_i = 1$.

В результате полярной замены (5) из системы (1) получаем систему

$$\begin{aligned} r_i^{n-1} \dot{r}_i &= r_i^{n-1} \text{Cs}^{2n-1} \varphi_i (X_i^{[n+1]} + \dots) - \text{Sn } \varphi_i (X_{i+d}^{[2n]} + \dots), \\ r_i^n \dot{\varphi}_i &= r_i^{2n-1} - n r_i^{n-1} \text{Sn } \varphi_i (X_i^{[n+1]} + \dots) - \text{Cs } \varphi_i (X_{i+d}^{[2n]} + \dots) \end{aligned}$$

или, что то же самое, систему

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= R_i^{[1]}(r, \varphi, \varepsilon) + R_i^{[2]}(r, \varphi, \varepsilon) + R_i^{*[3]}(r, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi}_i &= r_i^{n-1} + r_i^{-1} (\Phi_i^{[1]}(r, \varphi, \varepsilon) + \Phi_i^{*[2]}(r, \varphi, \varepsilon)), \end{aligned} \quad i = 1, \dots, d, \quad (6)$$

в которой

$$\begin{aligned} R_i^{[1]}(r, \varphi, \varepsilon) &= \text{Cs}^{2n-1} \varphi_i X_i^{[n+1]}(r \text{Cs } \varphi, -r^n \text{Sn } \varphi, \varepsilon) - r_i^{1-n} \text{Sn } \varphi_i X_{i+d}^{[2n]}(\dots), \\ R_i^{[2]}(r, \varphi, \varepsilon) &= \text{Cs}^{2n-1} \varphi_i X_i^{[n+2]}(r \text{Cs } \varphi, -r^n \text{Sn } \varphi, \varepsilon) - r_i^{1-n} \text{Sn } \varphi_i X_{i+d}^{[2n+1]}(\dots), \\ \Phi_i^{[1]}(r, \varphi, \varepsilon) &= -n \text{Sn } \varphi_i X_i^{[n+1]}(r \text{Cs } \varphi, -r^n \text{Sn } \varphi, \varepsilon) - r_i^{1-n} \text{Cs } \varphi_i X_{i+d}^{[2n]}(\dots), \end{aligned}$$

т.е. многочлены $R_i^{[\kappa]}$, $\Phi_i^{[\kappa]}$ имеют суммарный порядок $n + \kappa$ по r_j и $\varepsilon^{1/2}$, а функции $R_i^{*[3]}$, $\Phi_i^{*[2]}$ являются непрерывными и гладкими функциями r_j , ε , ω -периодическими по φ_j и начинаются по r_j , $\varepsilon^{1/2}$ не ниже чем с порядков $n + 3$ и $n + 2$ соответственно, $j = 1, \dots, d$.

Сделаем в системе (6) аффинную замену переменных

$$r_i = \varepsilon^{1/2}(\alpha_i + u_i), \quad i = 1, \dots, d, \quad (7)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – постоянный вектор, $\alpha_i > 0$, $|u_i| < \alpha_i$.

В результате аффинной замены (7) из (6) получаем систему

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \dot{u}_i &= R_i^{[1]}(\varepsilon^{1/2}(\alpha + u), \varphi, \varepsilon) + R_i^{[2]}(\dots) + R_i^{*[3]}(\dots), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon^{n/2-1/2}(\alpha_i + u_i)^{n-1} + \varepsilon^{-1/2}(\alpha_i + u_i)^{-1}(\Phi_i^{[1]}(\dots) + \Phi_i^{*[2]}(\dots)) \end{aligned}$$

или, учитывая структуру R и Φ , систему

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon_n(\varepsilon^{1/2} R_i^{[1]}(\alpha + u, \varphi, 1) + \varepsilon R_i^{[2]}(\alpha + u, \varphi, 1) + O(\varepsilon^{3/2})), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n((\alpha_i + u_i)^{n-1} + \varepsilon^{1/2}(\alpha_i + u_i)^{-1} \Phi_i^{[1]}(\alpha + u, \varphi, 1) + O(\varepsilon)), \end{aligned} \quad (8)$$

в которой $\varepsilon_n = \varepsilon^{n/2-1/2}$.

3. Первичное осреднение системы (8). Система (10). В дальнейшем любые функции, зависящие от $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, будут ω -периодическими функциями φ_i . Введем разложение

$$\Upsilon(\varphi) = \bar{\Upsilon} + \tilde{\Upsilon}(\varphi), \quad \bar{\Upsilon} = \omega^{-d} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega \Upsilon(\varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_d \text{ – среднее } \Upsilon.$$

Тогда $\int \tilde{\Upsilon}(\varphi) d\varphi$, имея подынтегральную функцию с нулевым средним, будет периодической функцией, которая выбором нижних пределов интегрирования однозначно определяется из условия $\int_{\varphi_0}^\varphi \tilde{\Upsilon}(\varphi) d\varphi = \tilde{v}(\varphi)$, т.е. имеет нулевое среднее значение. Обозначаем $\Upsilon^{(j)}(\alpha, \varphi) = \partial \Upsilon(\alpha, \varphi) / \partial \alpha_j$, $\Upsilon^{(jk)}(\alpha, \varphi) = \partial^2 \Upsilon(\alpha, \varphi) / (\partial \alpha_j \partial \alpha_k)$.

Возвращаясь к системе (8), покажем, что существует замена

$$u_i = v_i + \varepsilon^{1/2} \left(\tilde{f}_i(\alpha, \varphi) + \sum_{j=1}^d \tilde{f}_i^{(j)}(\alpha, \varphi) v_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \tilde{f}_i^{(jk)}(\alpha, \varphi) v_j v_k \right), \quad (9)$$

переводящая (8) в систему

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_i &= \varepsilon_n \left(\varepsilon^{1/2} \left(V_i(\alpha) + \sum_{j=1}^d V_i^{(j)}(\alpha) v_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d V_i^{(jk)}(\alpha) v_j v_k \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \left(W_i(\alpha, \varphi) + \sum_{j=1}^d W_i^{(j)}(\alpha, \varphi) v_j \right) + O(\varepsilon^{1/2}|v|^3 + \varepsilon|v|^2 + \varepsilon^{3/2}) \right), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n \left((\alpha_i + v_i)^{n-1} + \varepsilon^{1/2} \left(\Phi_i(\alpha, \varphi) + \sum_{j=1}^d \Phi_i^{(j)}(\alpha, \varphi) v_j \right) \right. \\ &\quad \left. + O(\varepsilon^{1/2}|v|^2 + \varepsilon) \right). \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Продифференцируем замену (9) $u = v + \varepsilon^{1/2} \tilde{f}(v, \alpha, \varphi)$ в силу систем (8) и (10) и сократим полученные равенства на ε_n ; тогда

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{1/2} R_i^{[1]}(\alpha + v + \varepsilon^{1/2} \tilde{f}, \varphi, 1) + \varepsilon R_i^{[2]}(\alpha + v + \varepsilon^{1/2} \tilde{f}, \varphi, 1) + O(\varepsilon^{3/2}) \\
 &= \varepsilon^{1/2} \left(V_i + \sum_{j=1}^d V_i^{(j)} v_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d V_i^{(jk)} v_j v_k \right) \\
 &+ \varepsilon \left(W_i + \sum_{j=1}^d W_i^{(j)} v_j \right) + O(\varepsilon^{1/2} |v|^3 + \varepsilon |v|^2 + \varepsilon^{3/2}) \\
 &+ \varepsilon^{1/2} \left(\sum_{j=1}^d \tilde{f}_i^{(j)} + \sum_{j,k=1}^d \tilde{f}_i^{(jk)} v_k \right) \left(\varepsilon^{1/2} \left(V_j + \sum_{k=1}^d V_j^{(k)} v_k \right) + O(\varepsilon^{1/2} |v|^2 + \varepsilon) \right) \\
 &+ \varepsilon^{1/2} \sum_{\nu=1}^d \left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \varphi_\nu} + \sum_{j=1}^d v_j \frac{\partial \tilde{f}_i^{(j)}}{\partial \varphi_\nu} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d v_j v_k \frac{\partial \tilde{f}_i^{(jk)}}{\partial \varphi_\nu} \right) \\
 &\times \left((\alpha_\nu + v_\nu)^{n-1} + \varepsilon^{1/2} \Phi_\nu + \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^d \Phi_\nu^{(j)} v_j + O(\varepsilon^{1/2} |v|^2 + \varepsilon) \right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Приравнявая в (11) слагаемые, стоящие при $\varepsilon^{1/2}$, получаем

$$\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{f}_i(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi_\nu} \alpha_\nu^{n-1} = R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1) - V_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, d. \quad (12)$$

Потребуем, чтобы постоянный вектор α с положительными компонентами из аффинной замены (7) удовлетворял условию

$$\begin{aligned}
 & \exists \gamma > 0, \quad \tau \geq d: \forall q = (q_1, \dots, q_d) \neq 0, \quad q_i - \text{целые} \\
 & \Rightarrow |\alpha_1^{n-1} q_1 + \dots + \alpha_d^{n-1} q_d| > \gamma (|q_1| + \dots + |q_d|)^{-\tau}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Условие (13) означает, что $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ рационально несоизмеримы и вектор α удовлетворяет условию Зигеля на “малые знаменатели”.

Положим

$$V_i(\alpha) = \overline{R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1)} = \omega^{-d} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1) d\varphi_1 \dots d\varphi_d. \quad (14)$$

Тогда правые части (12), являясь полиномами относительно $\text{Cs } \varphi_j$ и $\text{Sn } \varphi_j$, представляют собой вещественно-аналитические ω -периодические с нулевыми средними функции $\varphi_1, \dots, \varphi_d$, сходящиеся в некоторой окрестности вещественной оси, поскольку таковыми являются $\text{Cs } \varphi_j$ и $\text{Sn } \varphi_j$.

В работе [1, с. 16] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА В4. Рассмотрим уравнение $\sum_{\nu=1}^d (\partial \tilde{f}(\varphi) / \partial \varphi_\nu) \alpha_\nu = \tilde{F}(\varphi)$, где F есть 2π -периодическая по всем своим аргументам, аналитическая и ограниченная при $|\operatorname{Im} \varphi| < \delta$ скалярная функция с нулевым средним, удовлетворяющая (13) с $n = 2$. Тогда для любого ρ , $0 < \rho < \delta$, существует 2π -периодическое аналитическое при $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho$ решение уравнения $\tilde{f}(\varphi)$, у которого $\sup_{|\operatorname{Im} \varphi| < \rho} |f| < c(d, \tau, \gamma) \times (\delta - \rho)^{-\tau-1} \sup_{|\operatorname{Im} \varphi| < \delta} |F|$.

Согласно этой лемме уравнения (12) при условиях (13) и выбранных в (14) средних значениях $V_i(\alpha)$ однозначно разрешимы, причем их решения $\tilde{f}_i(\alpha, \varphi)$ обладают теми же свойствами, что и правые части (12).

Если теперь в (11) приравнять слагаемые, стоящие при $\varepsilon^{1/2} v_j$, то для любых $i, j = 1, \dots, d$ получим равенство

$$\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{f}_i^{(j)}(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi_\nu} \alpha_\nu^{n-1} = R_i^{[1](j)}(\alpha, \varphi, 1) - V_i^{(j)}(\alpha) - \frac{\partial \tilde{f}_i(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi_j} (n-1) \alpha_j^{n-2},$$

которое всегда выполняется, так как может быть получено дифференцированием (12) по α_j . Очевидно, что $V_i^{(j)}(\alpha) = \overline{R_i^{[1](j)}(\alpha, \varphi, 1)}$, поскольку последнее слагаемое последнего равенства имеет нулевое среднее значение.

Аналогичным образом равенство, получаемое приравниванием слагаемых при $\varepsilon^{1/2} v_j v_k$, совпадает со второй производной (12) по $\alpha_j \alpha_k$.

В свою очередь, непосредственная подстановка замены (9) в уравнения для $\dot{\varphi}_i$ системы (8) и выделение членов, стоящих при $\varepsilon^{1/2}$, дает

$$\Phi_i(\alpha, \varphi) = (n-1) \alpha_i^{n-2} \tilde{f}_i + \alpha_i^{-1} \Phi_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1), \quad (15)$$

а выделение членов, стоящих при $\varepsilon^{1/2} v_j$, дает такое же равенство, какое можно получить после дифференцирования (15) по α_j .

И, наконец, приравнявая в (11) слагаемые, стоящие при ε и при εv_j , находим функции W_i и $W_i^{(j)}$:

$$W_i(\alpha, \varphi) = R_i^{[2]}(\alpha, \varphi, 1) + \sum_{j=1}^d R_i^{[1](j)}(\alpha, \varphi, 1) \tilde{f}_j - \sum_{j=1}^d \tilde{f}_i^{(j)} V_j - \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \varphi_\nu} \Phi_\nu, \quad (16)$$

а $W_i^{(j)}(\alpha, \varphi)$ получается после дифференцирования (16) по α_j .

Таким образом, первичная осредняющая замена (9) построена. При условии (13) она преобразует (8) в систему (10), в которой $V_i(\alpha)$ вычисляются по формулам (14) и зависят только от $R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1)$ из (6).

4. Бифуркационная система для четных n . Система $(10_{\text{ев}}^*)$. Функции $V_i(\alpha)$ играют решающую роль при нахождении у системы (1) d -мерных инвариантных торov. Ниже будет показано, что величина $V = (V_1, \dots, V_d)$ существенным образом зависит от четности числа n .

Пусть $n = 2m$, $m \geq 1$. Тогда в (6)

$$R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1) = \operatorname{Cs}^{4m-1} \varphi_i \sum_{\mu=0}^m X_{i+2m+1}^{[2\mu+1]} - \alpha_i^{1-2m} \operatorname{Sn} \varphi_i \sum_{\mu=0}^{2m} X_{i+d+4m}^{[2\mu]}, \quad (17)$$

где функции $X_{ik}^{[\varkappa]}$, определенные формулами (2), имеют согласно (5) аргументы $\alpha \text{ Cs } \varphi$, $-\alpha^{2m} \text{ Sn } \varphi$ и порядок $\varkappa$ по $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

Очевидно, что любое слагаемое в (17), содержащее хотя бы один $\text{Sn } \varphi_j$ или $\text{Cs } \varphi_j$ в нечетной степени, имеет нулевое среднее значение и не влияет на величину $V(\alpha)$ в (14). Поэтому выделим из правой части (17) те слагаемые, которые содержат только четные степени обобщенных синусов и косинусов, обозначив их $R_{i,\text{ev}}^{[1]}(\alpha, \varphi)$. При $n = 2m$ имеем

$$R_{i,\text{ev}}^{[1]} = \alpha_i \sum_{\mu=0}^m \sum_{l: |l|=\mu} (\text{Cs}^{4m} \varphi_i X_{i2m+1}^{(2l+e_i,0)} + \text{Sn}^2 \varphi_i X_{i+d4m}^{(2l,e_i)}) \prod_{j=1}^d \alpha_j^{2l_j} \text{Cs}^{2l_j} \varphi_j.$$

Учитывая, что $\overline{R_i^{[1]}} = \overline{R_{i,\text{ev}}^{[1]}}$, а также формулы

$$\text{Cs}^{4m} \varphi_i + 2m \text{Sn}^2 \varphi_i = 1, \quad \int_0^\omega \text{Cs}^{2n+k} \varphi_i d\varphi_i = \frac{k+1}{n+k+1} \int_0^\omega \text{Cs}^k \varphi_i d\varphi_i,$$

при помощи (14) найдем V_i для четных n :

$$V_i(\alpha) = \alpha_i \sum_{l: |l|=0}^m \frac{\varkappa_n^{(l)}}{n+2l_i+1} ((2l_i+1)X_{i2m+1}^{(2l+e_i,0)} + X_{i+d4m}^{(2l,e_i)}) \alpha^{2l}, \quad (14_{\text{ev}})$$

где $i = 1, \dots, d$, $l = (l_1, \dots, l_d)$, $l_i \geq 0$, $\varkappa_n^{(l)} = \frac{1}{\omega^d} \prod_{j=1}^d \int_0^\omega \text{Cs}^{2l_j} \varphi_j d\varphi_j$, $\alpha^{2l} = (\alpha_1^{2l_1}, \dots, \alpha_d^{2l_d})$, $e_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0)$, $n = 2m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебраическая система $V(\alpha) = 0$, где полином V задан формулой (14_{ev}), называется *бифуркационной системой уравнений для системы (1), в которой $n = 2m$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $n = 2m$ бифуркационная система – это алгебраическая система d уравнений степени m относительно $\alpha_1^2, \dots, \alpha_d^2$. В нее входят только коэффициенты полиномов $X_i^{[n+1]}$ и $X_{i+d}^{[2n]}$ системы (1).

Введем матрицу $V_L(\alpha) = \{V_i^{(j)}(\alpha)\}_{i,j=1}^d$, где $V_i^{(j)} = \partial V_i / \partial \alpha_j$. Предположим, что $\exists \alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_d^*) > 0$:

- 1) $V(\alpha^*) = 0$;
- 2) α^* удовлетворяет условию (13);
- 3) $V_L(\alpha^*)$ – некритическая матрица.

Используя (14_{ev}) и (18₁), подсчитаем матрицу $V_L(\alpha^*)$:

$$V_i^{(j)}(\alpha^*) = \sum_{l: |l|=1}^m \frac{2l_j \varkappa_n^{(l)}}{n+2l_i+1} ((2l_i+1)X_{i2m+1}^{(2l+e_i,0)} + X_{i+d4m}^{(2l,e_i)}) (\alpha^*)^{2l+e_i-e_j}. \quad (19)$$

Условия (18) окажется достаточно для доказательства существования у системы (1) при любых малых $\varepsilon > 0$ d -мерных инвариантных торов.

Подставим вектор $\alpha = \alpha^*$, удовлетворяющий (18), в замены (7), (9) и системы (8), (10); тогда условие (18₂) обеспечит существование замены (9), условие (18₁) аннулирует в радиальных уравнениях системы (10) члены, стоящие при $\varepsilon_n \varepsilon$, а условие (18₁)

гарантирует, что матрица линейной части членов, стоящих при той же степени ε , не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью.

В результате система (10) с $n = 2m$ и $\alpha = \alpha^*$ из (18) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \varepsilon_n (\varepsilon^{1/2} V_L(\alpha^*) v + \varepsilon W(\alpha^*, \varphi) + O(\varepsilon^{1/2} |v|^3 + \varepsilon |v| + \varepsilon^{3/2})), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i^* + v_i)^{2m-1} + \varepsilon^{1/2} \Phi_i(\alpha^*, \varphi) + O(\varepsilon^{1/2} |v| + \varepsilon)). \end{aligned} \quad (10_{\text{ev}}^*)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $n = 2m$ в системе (8) для последующих целей было бы достаточно осреднить только свободные и линейные по v члены, стоящие при $\varepsilon_n \varepsilon^{1/2}$, при помощи замены переменных

$$u = v + \varepsilon^{1/2} (\tilde{f}(\alpha, \varphi) + \tilde{f}_L(\alpha, \varphi) v), \quad (9_{\text{ev}})$$

где матрица $\tilde{f}_L = \{\tilde{f}_i^{(j)}(\alpha, \varphi)\}_{i,j=1}^d$. Тогда в первом уравнении (10_{ev}^{*}) вместо $O(\varepsilon^{1/2} |v|^3 + \dots)$ стояло бы $O(\varepsilon^{1/2} |v|^2 + \dots)$.

5. Процесс осреднения системы (10_{ev}^{*}). Система (25). Для того чтобы можно было применить лемму Хейла о существовании при всех достаточно малых положительных значениях ε d -мерного инвариантного ω -периодического многообразия, в системе (10_{ev}^{*}) надо предварительно осреднить члены, стоящие при младших степенях ε и зависящие только от φ как в уравнениях для радиальных, так и в уравнениях для угловых переменных. Благодаря условию (18з) сделать это всегда возможно, поскольку матрица $V_L(\alpha^*)$ имеет обратную.

Покажем сначала, что замена

$$v = w - \varepsilon^{1/2} \bar{g}(\alpha^*) + \varepsilon \tilde{g}(\alpha^*, \varphi) \quad (20)$$

аннулирует в (10_{ev}^{*}) слагаемое $\varepsilon W(\alpha^*, \varphi)$, преобразуя (10_{ev}^{*}) в систему

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \varepsilon_n (\varepsilon^{1/2} V_L(\alpha^*) w + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w| + \varepsilon^{3/2})), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i^* + w_i)^{2m-1} + \varepsilon^{1/2} \Phi_i^0(\alpha^*, \varphi) + O(\varepsilon^{1/2} |w| + \varepsilon)), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\Phi_i^0(\alpha^*, \varphi) = \Phi_i(\alpha^*, \varphi) - (2m-1) \alpha_i^{*2m-2} V_L^{-1}(\alpha^*) \bar{W}(\alpha^*)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Дифференцируя замену (20) в силу систем (10_{ev}^{*}) и (21), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} V_L(w - \varepsilon^{1/2} \bar{g} + \varepsilon \tilde{g}) + \varepsilon \tilde{W} + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w| + \varepsilon^{3/2}) \\ = \varepsilon^{1/2} V_L w + \varepsilon \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi_\nu} ((\alpha_\nu^* + w_\nu)^{2m-1} + O(\varepsilon^{1/2})), \end{aligned}$$

откуда $\sum_{\nu=1}^d \alpha_\nu^{*2m-1} \partial \tilde{g} / \partial \varphi_\nu = W(\alpha^*, \varphi) - V_L(\alpha^*) \bar{g}(\alpha^*)$. Это уравнение однозначно разрешимо благодаря условиям (18) при $\bar{g} = V_L^{-1}(\alpha^*) \bar{W}(\alpha^*)$.

Покажем теперь, что существует замена угловых переменных

$$\varphi_i = \psi_i + \varepsilon^{1/2} \tilde{\theta}_i(\psi), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_d), \quad i = 1, \dots, d, \quad (22)$$

которая преобразует систему (21) в систему

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \varepsilon_n (\varepsilon^{1/2} V_L(\alpha^*) w + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w| + \varepsilon^{3/2})), \\ \dot{\psi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i^* + w_i)^{2m-1} + \varepsilon^{1/2} \bar{\Phi}_i^0(\alpha^*) + O(\varepsilon^{1/2} |w| + \varepsilon)). \end{aligned} \quad (23)$$

Дифференцируя, как обычно, (22) в силу систем (21) и (23) и приравнявая слагаемые при $\varepsilon^{1/2}$, получаем уравнения $\sum_{\nu=1}^d \alpha_\nu^{*2m-1} \partial \tilde{\theta}_i(\psi) / \partial \psi_\nu = \check{\Phi}_i(\alpha^*, \psi) - \bar{\Phi}_i^0(\alpha^*)$, которые однозначно разрешимы.

Остается сделать масштабирующую замену

$$w = \varepsilon z, \quad (24)$$

приводящую систему (23) к требуемому виду:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon_n (\varepsilon^{1/2} V_L(\alpha^*) z + \varepsilon^{1/2} Z(\varepsilon^{1/4} z, \psi, \varepsilon)), \\ \dot{\psi}_i &= \varepsilon_n (\alpha_i^{*2m-1} + \varepsilon^{1/2} \bar{\Phi}_i^0(\alpha^*) + \varepsilon^{3/4} \Psi_i(\varepsilon^{1/4} z, \psi, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (25)$$

где $z = (z_1, \dots, z_d)$; Z, Ψ – непрерывные, непрерывно дифференцируемые по z, ψ_i при малых $|z|, \varepsilon$ векторные функции, ω -периодические по ψ_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функции Z, Ψ из системы (25) будут иметь указанную структуру и гладкость, если потребовать, чтобы в системе (1) при $n = 2m$ функции $\hat{X}_i^{*[n+3]}(x, \varepsilon)$ и $\hat{X}_{i+d}^{*[2n+2]}(x, \varepsilon)$ были непрерывными по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемыми по $x_1, \dots, x_{2d}$ в H .

В работе [1, с. 32] для системы (6) с $k = n$ и $\omega = 2\pi$

$$\dot{z} = \varepsilon^n L z + \varepsilon^n Z(\varepsilon^{1/2} z, \psi, \varepsilon), \quad \dot{\psi} = \mu(\varepsilon) + \varepsilon^{n+1/2} \Psi_i(\varepsilon^{1/2} z, \psi, \varepsilon)$$

при тех же условиях на вектор-функции Z, Ψ и матрицу L , что и в системе (25); в [1, с. 31] доказана теорема, являющаяся одной из модификаций леммы 2.1 работы Хейла [3], согласно которой у системы (6) из [1] при всех достаточно малых положительных значениях ε существует инвариантное многообразие $z = \Gamma(\psi, \varepsilon)$, где функция Γ непрерывная и ω -периодическая по ψ_i .

Система (25) отличается от системы (6) из [1] только тем, что переменная z в аргументах функций Z, Ψ домножается не на $\varepsilon^{1/2}$, а на $\varepsilon^{1/4}$, и сама функция Ψ имеет множителем $\varepsilon^{n+1/4}$, а не $\varepsilon^{n+1/2}$. Однако из доказательства теоремы в [1] легко заметить, что различия в степенях ε в указанных местах несущественны, и теорема остается справедливой, если $\varepsilon^{1/2}$ везде заменить на ε^γ ($\gamma > 0$).

Таким образом, система (25) при любом малом значении параметра имеет непрерывное ω -периодическое d -мерное инвариантное многообразие $z = \Gamma(\psi, \varepsilon)$.

6. Дополнительное осреднение при $n = 2m - 1$. Система ($\check{\delta}_{\text{od}}$). Вернемся к системе (10), входящие в которую функции V, Φ, W описаны формулами (14)–(16), и рассмотрим случай, когда $n = 2m - 1, m \geq 2$. Случай $m = 1$ подробно изучен в [1, гл. 1, § 1].

При нечетных n в системе (6)

$$\begin{aligned} R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1) &= \text{Cs}^{4m-3} \varphi_i \sum_{\mu=0}^m X_{i2m}^{[2\mu]} - \alpha_i^{2-2m} \text{Sn} \varphi_i \sum_{\mu=0}^{2m-1} X_{i+d4m-2}^{[2\mu]}, \\ R_i^{[2]}(\alpha, \varphi, 1) &= \text{Cs}^{4m-3} \varphi_i \sum_{\mu=0}^m X_{i2m+1}^{[2\mu+1]} - \alpha_i^{2-2m} \text{Sn} \varphi_i \sum_{\mu=0}^{2m-1} X_{i+d4m-1}^{[2\mu+1]}, \\ \Phi_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1) &= (1 - 2m) \text{Sn} \varphi_i \sum_{\mu=0}^m X_{i2m}^{[2\mu]} - \alpha_i^{2-2m} \text{Cs} \varphi_i \sum_{\mu=0}^{2m-1} X_{i+d4m-2}^{[2\mu]}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $X_{ik}^{[2\epsilon]}$ имеют аргументы α Cs φ , $-\alpha^{2m-1}$ Sn φ и порядок $\varkappa$ по $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

Нетрудно убедиться в том, что любое слагаемое в $R_i^{[1]}(\alpha, \varphi, 1)$ из (26) содержит какой-либо из Sn φ_j или Cs φ_j в нечетной степени, а значит, имеет нулевое среднее значение. Следовательно, при любых α из замены (7), удовлетворяющих (13), в формуле (14) $V_i(\alpha) \equiv 0$, что приводит к вырождению бифуркационной системы и аннулированию в системе (10) не только свободных, но и линейных по v членов, стоящих при $\varepsilon_n \varepsilon^{1/2}$.

В результате система (10) при нечетных n принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \varepsilon_n \left(\varepsilon W_i(\alpha, \varphi) + \varepsilon \sum_{j=1}^d W_i^{(j)}(\alpha, \varphi) v_j + O(\varepsilon^{1/2} |v|^3 + \varepsilon |v|^2 + \varepsilon^{3/2}) \right), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i + v_i)^{2m-2} + O(\varepsilon^{1/2})). \end{aligned} \quad (10_{\text{od}})$$

Для того чтобы свести ситуацию к стандартной при $n = 2m - 1$, придется сделать дополнительную замену, осредняющую теперь уже функцию $W(\alpha, \varphi)$ из (16), в которой согласно (6) задействованы не только однородные полиномы $X_i^{[n+1]}(x, \varepsilon)$ и $X_{i+d}^{[2n]}(x, \varepsilon)$, но и полиномы старших порядков $X_i^{[n+2]}(x, \varepsilon)$ и $X_{i+d}^{[2n+1]}(x, \varepsilon)$ системы (1).

Покажем, что существует осредняющая замена переменных

$$v_i = \check{v}_i + \varepsilon \tilde{\chi}_i(\alpha, \varphi) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \tilde{\chi}_i^{(j)}(\alpha, \varphi) \check{v}_j, \quad i = 1, \dots, d, \quad (27)$$

переводящая систему (10_{od}) в систему

$$\begin{aligned} \dot{\check{v}}_i &= \varepsilon_n \left(\varepsilon \check{V}_i(\alpha) + \varepsilon \sum_{j=1}^d \check{V}_i^{(j)}(\alpha) \check{v}_j + O(\varepsilon^{1/2} |\check{v}|^3 + \varepsilon |\check{v}|^2 + \varepsilon^{3/2}) \right), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i + \check{v}_i)^{2m-2} + O(\varepsilon^{1/2})). \end{aligned} \quad (\check{8}_{\text{od}})$$

Продифференцируем замену (9) $v = \check{v} + \varepsilon \tilde{\chi}(\check{v}, \alpha, \varphi)$ в силу систем (10_{od}) и ($\check{8}_{\text{od}}$) и сократим полученные равенства на ε_n ; тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon W_i + \varepsilon \sum_{j=1}^d W_i^{(j)}(\check{v}_j + \varepsilon^{1/2} \tilde{\chi}_j) + O(\varepsilon^{1/2} |\check{v}|^3 + \varepsilon |\check{v}|^2 + \varepsilon^{3/2}) \\ = \varepsilon \check{V}_i + \varepsilon \sum_{j=1}^d \check{V}_i^{(j)} \check{v}_j + \varepsilon \sum_{j=1}^d \tilde{\chi}_i^{(j)} \cdot O(\varepsilon^{1/2}) \\ + \varepsilon \sum_{\nu=1}^d \left(\frac{\partial \tilde{\chi}_i}{\partial \varphi_\nu} + \sum_{j=1}^d \check{v}_j \frac{\partial \tilde{\chi}_i^{(j)}}{\partial \varphi_\nu} \right) ((\alpha_\nu + \check{v}_\nu)^{2m-2} + O(\varepsilon^{1/2})). \end{aligned}$$

Приравнявая слагаемые, стоящие при ε , получаем уравнения

$$\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{\chi}_i(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi_\nu} \alpha_\nu^{2m-2} = W_i(\alpha, \varphi) - \check{V}_i(\alpha), \quad i = 1, \dots, d. \quad (28)$$

Аналогично (12) уравнения (28) однозначно разрешимы относительно $\tilde{\chi}_i$, имеющих нулевые средние значения, при уже выполненном предположении (13) на вектор α и при

$$\check{V}_i(\alpha) = \overline{W_i(\alpha, \varphi)} = \omega^{-d} \int_0^\omega \dots \int_0^\omega W_i(\alpha, \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_d. \quad (1\check{2})$$

А приравнявая слагаемые, стоящие при $\varepsilon \check{v}_j$, получаем такие же уравнения, как при дифференцировании (28) по α_j . Следовательно, дополнительная осредняющая замена (27) построена.

7. Бифуркационная система для нечетных n . Система $(\check{8}_{\text{od}}^*)$. Подсчитаем $\check{V}_i(\alpha)$. Согласно (16), (15) и с учетом того, что $V_i(\alpha) \equiv 0$ при $n = 2m - 1$ ($m \geq 2$), имеем

$$W_i(\alpha, \varphi) = R_i^{[2]}(\alpha, \varphi, 1) + P_i^{[1]}(\alpha, \varphi),$$

$$P_i^{[1]} = \sum_{j=1}^d R_i^{[1](j)}(\alpha, \varphi, 1) \tilde{f}_j - \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial \varphi_\nu} ((2m-2)\alpha_\nu^{2m-3} \tilde{f}_\nu + \alpha_\nu^{-1} \Phi_\nu^{[1]}(\alpha, \varphi, 1)); \quad (29)$$

функции $\tilde{f}_i$ определены в (12), а $R_i^{[1]}$, $R_i^{[2]}$, $\Phi_i^{[1]}$ в (26).

Следовательно, функции $P_i^{[1]}(\alpha, \varphi)$ зависят только от однородных полиномов $X_i^{[n+1]}(x, \varepsilon)$, $X_{i+d}^{[2n]}(x, \varepsilon)$, $n = 2m - 1$, системы (1) и тождественно равны нулю, если эти полиномы отсутствуют. Из (29) видно, что $P_i^{[1]}$ могут содержать как положительные, так и отрицательные степени α .

В свою очередь, для вычисления среднего значения из $R_i^{[2]}(\alpha, \varphi, 1)$ выделим те слагаемые, которые содержат только четные степени обобщенных синусов и косинусов, обозначив их $R_{i,\text{ev}}^{[2]}(\alpha, \varphi)$. При $n = 2m - 1$ имеем

$$R_{i,\text{ev}}^{[2]} = \alpha_i \sum_{\mu=0}^m \sum_{l: |l|=\mu} (\text{Cs}^{4m-2} \varphi_i X_{i+2m+1}^{(2l+e_i,0)} + \text{Sn}^2 \varphi_i X_{i+d+4m-1}^{(2l,e_i)}) \prod_{j=1}^d \alpha_j^{2l_j} \text{Cs}^{2l_j} \varphi_j.$$

Учитывая, что $\overline{R_i^{[2]}} = \overline{R_{i,\text{ev}}^{[2]}}$, аналогично (14_{ev}) найдем $\check{V}_i$ из (12):

$$\check{V}_i(\alpha) = \alpha_i \sum_{l: |l|=0}^m \frac{\varkappa_n^{(l)}}{n + 2l_i + 1} ((2l_i + 1) X_{i+2m+1}^{(2l+e_i,0)} + X_{i+d+4m-1}^{(2l,e_i)}) \alpha^{2l} + \overline{P_i^{[1]}(\alpha, \varphi)}, \quad (12_{\text{od}})$$

где функция $P_i^{[1]}$ определена в (29), $n = 2m - 1$ ($m \geq 2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебраическая система $\check{V}(\alpha) = 0$, где векторный полином $\check{V}$ задан формулой (12_{od}), называется *бифуркационной системой уравнений для системы (1), в которой $n = 2m - 1$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При $n = 2m - 1$, $m \geq 2$, если однородные полиномы $X_i^{[n+1]}(x, \varepsilon)$, $X_{i+d}^{[2n]}(x, \varepsilon) \equiv 0$, т.е. в (29) $P_i^{[1]}(\alpha, \varphi) \equiv 0$ и $W_i = R_i^{[2]}$, то бифуркационная система – это алгебраическая система d уравнений степени m относительно $\alpha_1^2, \dots, \alpha_d^2$, определяемая коэффициентами полиномов $X_i^{[n+2]}(x, \varepsilon)$ и $X_{i+d}^{[2n+1]}(x, \varepsilon)$. Если же $P_i^{[1]}(\alpha, \varphi) \neq 0$, то бифуркационная система может иметь более высокую степень и, соответственно, большее число положительных решений.

По аналогии с V_L введем матрицу $\check{V}_L(\alpha) = \{\check{V}_i^{(j)}(\alpha)\}_{i,j=1}^d$ и для $\check{V}$, $\check{V}_L$ сформулируем условия, аналогичные условиям (18). Предположим, что $\exists \alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_d^*) > 0$:

- 1) $\check{V}(\alpha^*) = 0$;
- 2) α^* удовлетворяет условию (13);
- 3) $\check{V}_L(\alpha^*)$ – некритическая матрица.

Для проверки условия (18₃) матрицу $\check{V}_L(\alpha^*)$ легко подсчитать, дифференцируя равенство (12_{od}) по α_j в точке α^* .

В результате система $(\check{8}_{\text{od}})$, в которой $n = 2m - 1$ и $\alpha = \alpha^*$ из (18), принимает вид

$$\check{v} = \varepsilon_n (\varepsilon \check{V}_L(\alpha^*) \check{v} + O(\varepsilon^{1/2} |\check{v}|^3 + \varepsilon |\check{v}|^2 + \varepsilon^{3/2})),$$

$$\check{\varphi}_i = \varepsilon_n ((\alpha_i^* + \check{v}_i)^{2m-2} + O(\varepsilon^{1/2})). \quad (\check{8}_{\text{od}}^*)$$

8. Процесс осреднения системы $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$. Система (35). К системе $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ непосредственно нельзя применить лемму Хейла. Чтобы достичь требуемой структуры, в $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ надо осреднить члены, зависящие только от φ , при младших степенях ε , используя замены, аналогичные заменам (20), (22), (24). Но из-за того, что в $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ в уравнениях для $\check{v}$ линейные по $\check{v}$ члены имеют больший порядок ε , чем такие же члены в (10_{ev}^*) , потребуется осреднять большее число слагаемых.

Покажем сначала, что существует замена

$$\check{v} = w - \varepsilon^{1/2} \bar{g}(\alpha^*) - \varepsilon \bar{h}(\alpha^*) + \varepsilon^{3/2} \check{g}(\alpha^*, \varphi) + \varepsilon^2 \check{h}(\alpha^*, \varphi), \quad (30)$$

которая преобразует $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ в систему

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \varepsilon_n (\varepsilon \check{V}_L(\alpha^*) w + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w|^2 + \varepsilon^{3/2} |w| + \varepsilon^{5/2})), \\ \dot{\varphi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i^* + w_i)^{2m-2} + \varepsilon^{1/2} b_i^{(1)}(\varphi) + \varepsilon b_i^{(2)}(\varphi) + O(\varepsilon^{1/2} |w| + \varepsilon^{3/2})), \end{aligned} \quad (31)$$

где $b_i^{(1)}(\varphi)$, $b_i^{(2)}(\varphi)$ – это функции при соответствующих степенях ε , выделенные в уравнениях для $\dot{\varphi}_i$ системы $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ из функций $O(\varepsilon^{1/2})$ после подстановки в них замены (30).

В свою очередь, функцию $O(\varepsilon^{1/2} |\check{v}|^3 + \varepsilon |\check{v}|^2 + \varepsilon^{3/2})$ системы $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ после подстановки в нее замены (30) можно записать следующим образом:

$$O(\varepsilon^{1/2} |\check{v}|^3 + \dots) = \varepsilon^{3/2} b^{(3)}(\varphi) + \varepsilon^2 b^{(4)}(\varphi) + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w|^2 + \varepsilon^{3/2} |w| + \varepsilon^{5/2}).$$

Поэтому после дифференцирования замены (30) в силу систем $(\check{\delta}_{\text{od}}^*)$ и (31), а также сокращения на ε_n , получаем равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \check{V}_L(\alpha^*) (w - \varepsilon^{1/2} \bar{g} - \varepsilon \bar{h} + \varepsilon^{3/2} \check{g} + \varepsilon^2 \check{h}) + \varepsilon^{3/2} b^{(3)} + \varepsilon^2 b^{(4)} \\ = \varepsilon \check{V}_L(\alpha^*) w + O(\varepsilon^{1/2} |w|^3 + \varepsilon |w|^2 + \varepsilon^{3/2} |w| + \varepsilon^{5/2}) \\ + \sum_{\nu=1}^d \left(\varepsilon^{3/2} \frac{\partial \check{g}}{\partial \varphi_\nu} + \varepsilon^2 \frac{\partial \check{h}}{\partial \varphi_\nu} \right) \\ \times ((\alpha_\nu^* + w_\nu)^{2m-2} + \varepsilon^{1/2} b_\nu^{(1)} + \varepsilon b_\nu^{(2)} + O(\varepsilon^{1/2} |w| + \varepsilon^{3/2})). \end{aligned}$$

Приравняем слагаемые при $\varepsilon^{3/2}$ и ε ; тогда

$$\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \check{g}}{\partial \varphi_\nu} \alpha_\nu^{*2m-2} = b^{(3)} - \check{V}_L \bar{g}, \quad \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \check{h}}{\partial \varphi_\nu} \alpha_\nu^{*2m-2} = b^{(4)} - \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \check{g}}{\partial \varphi_\nu} b_\nu^{(1)} - \check{V}_L \bar{h}.$$

Полученные уравнения стандартным образом однозначно разрешимы благодаря условиям (18₂), (18₃), и замена (30) построена.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Именно для того чтобы было возможно осуществить замену (30), в системе (8) пришлось осреднить члены при $\varepsilon_n \varepsilon^{1/2} v^2$, получая $O(\varepsilon^{1/2} |v|^3 + \dots)$ в (10_{od}) , иначе величины $\check{V}_i(\alpha^*)$ были бы испорчены.

Осредним теперь функции $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, входящие в (31), сделав замену

$$\dot{\varphi}_i = \psi_i + \varepsilon^{1/2} \tilde{\theta}_i(\psi) + \varepsilon \tilde{\eta}_i(\psi), \quad (32)$$

которая преобразует систему (31) в систему

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \varepsilon_n (\varepsilon \check{V}_L(\alpha^*)w + O(\varepsilon^{1/2}|w|^3 + \varepsilon|w|^2 + \varepsilon^{3/2}|w| + \varepsilon^{5/2})), \\ \dot{\psi}_i &= \varepsilon_n ((\alpha_i^* + w_i)^{2m-2} + \varepsilon^{1/2}\bar{b}_i^{(1)} + \varepsilon\check{b}_i^{(2)} + O(\varepsilon^{1/2}|w| + \varepsilon^{3/2})).\end{aligned}\quad (33)$$

Дифференцируя (32) в силу (31) и (33) и сокращая на ε_n , получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1/2}\bar{b}_i^{(1)}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta} + \varepsilon\tilde{\eta}) + \varepsilon b_i^{(2)}(\psi) + O(\varepsilon^{1/2}|w| + \varepsilon^{3/2}) &= \varepsilon^{1/2}\bar{b}_i^{(1)} + \varepsilon\check{b}_i^{(2)} \\ &+ \sum_{\nu=1}^d \left(\varepsilon^{1/2} \frac{\partial \tilde{\theta}_i}{\partial \psi_\nu} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\eta}_i}{\partial \psi_\nu} \right) ((\alpha_\nu^* + w_\nu)^{2m-2} + \varepsilon^{1/2}\bar{b}_\nu^{(1)} + O(\varepsilon^{1/2}|w| + \varepsilon)),\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{\theta}_i(\psi)}{\partial \psi_\nu} \alpha_\nu^{*2m-2} &= b_i^{(1)}(\psi) - \bar{b}_i^{(1)}, \\ \sum_{\nu=1}^d \frac{\partial \tilde{\eta}_i(\psi)}{\partial \psi_\nu} \alpha_\nu^{*2m-2} &= b_i^{(2)}(\psi) + \sum_{\nu=1}^d \left(\frac{\partial b_i^{(1)}(\psi)}{\partial \psi_\nu} \tilde{\theta}_\nu(\psi) - \frac{\partial \tilde{\theta}_i(\psi)}{\partial \psi_\nu} \bar{b}_\nu^{(1)} \right) - \check{b}_i^{(2)},\end{aligned}$$

и величины $\bar{b}^{(1)}(\alpha^*)$, $\check{b}^{(2)}(\alpha^*)$, $\tilde{\theta}_i(\psi)$, $\tilde{\eta}_i(\psi)$ могут быть однозначно найдены.

Остается сделать масштабирующую замену

$$w = \varepsilon^{3/2}z, \quad (34)$$

приводящую систему (33) к виду

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \varepsilon_n (\varepsilon^{1/2}\check{V}_L(\alpha^*)z + \varepsilon Z(\varepsilon^{1/4}z, \psi, \varepsilon)), \\ \dot{\psi}_i &= \varepsilon_n (\alpha_i^{*2m-2} + \varepsilon^{1/2}\bar{b}_i^{(1)}(\alpha^*) + \varepsilon\check{b}_i^{(2)}(\alpha^*) + \varepsilon^{5/4}\Psi_i(\varepsilon^{1/4}z, \psi, \varepsilon)),\end{aligned}\quad (35)$$

где $z = (z_1, \dots, z_d)$; Z, Ψ – непрерывные, непрерывно дифференцируемые по z, ψ_i при малых $|z|, \varepsilon$ векторные функции, ω -периодические по ψ_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Функции Z, Ψ из системы (25) будут иметь указанную структуру и гладкость, если потребовать, чтобы в (1) при $n = 2m - 1$ функции $X_i^{*[n+3]}(x, \varepsilon)$ и $X_{i+d}^{*[2n+2]}(x, \varepsilon)$ были представимы в виде

$$X_i^{*[n+3]} = X_i^{[n+3]} + X_i^{[n+4]} + X_i^{*[n+5]}, \quad X_{i+d}^{*[2n+2]} = X_{i+d}^{[2n+2]} + X_{i+d}^{[2n+3]} + X_{i+d}^{*[2n+4]},$$

где $X_\iota^{*[k]}(\varepsilon^{1/2}x', \varepsilon^{n/2}x'', \varepsilon) = \varepsilon^k \hat{X}_\iota^{*[k]}(x', x'', \varepsilon)$, $\iota = 1, \dots, 2d$, а $\hat{X}_i^{*[n+5]}$ и $\hat{X}_{i+d}^{*[2n+4]}$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по $x_1, \dots, x_{2d}$.

Система (35), как и (25), имеет требуемую в лемме Хейла структуру, поэтому у нее при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует d -мерное инвариантное многообразие $z = \Gamma(\psi, \varepsilon)$, где функция Γ – непрерывная и ω -периодическая по ψ_i .

9. Существование и структура инвариантных торов. Возвращаясь к системе (1), в которой гладкость отмеченных звездочкой функций уточнена в замечаниях 3 и 6, заключаем, что как при четных n , когда выполняется условие (18) для $\alpha = \alpha^*$ из замены (7), $V(\alpha^*)$ из (14_{ev}) и $V_L(\alpha^*)$ из (19), так и при нечетных n , когда выполняется условие (16) с $\check{V}(\alpha^*)$ из (12_{od}), система (1) обладает при всех малых положительных значениях параметра инвариантными поверхностями, которые заменой (5) свернуты в d -мерные торы, т.е. справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что для системы (1) в случае $n = 2m$, $m \geq 1$, выполняется условие (18), а в случае $n = 2m - 1$, $m \geq 2$, выполняется условие (16). Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ эта система имеет d -мерный инвариантный тор с частотами движений на нем близкими к $\varepsilon^{n/2-1/2} \alpha_i^{*n-1} \omega^{-1}$, $i = 1, \dots, d$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В условиях (18), (16), гарантирующих при каждом малом $\varepsilon > 0$ существование хотя бы одного инвариантного тора, используется конечное число коэффициентов исходной системы (1) и выполнение этих условий может быть непосредственно проверено. При этом определенная в (14_{ev}) функция $V(\alpha)$, которая при четных n задает бифуркационную систему $V(\alpha) = 0$, зависит только от полиномов $X_i^{[n+1]}$, $X_{i+d}^{[2n]}$ системы (1), а функция $\check{V}(\alpha)$, при нечетных n определенная в (12_{od}), зависит как от указанных полиномов, так и от полиномов $X_i^{[n+2]}$, $X_{i+d}^{[2n+1]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Если правые части (1) не содержат функций, зависящих только от ε , то можно говорить о бифуркации рождения d -мерного инвариантного тора, ибо нулевое решение сохраняется при всех $\varepsilon > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Система (1) при каждом ε может обладать несколькими d -мерными инвариантными торами, количество которых зависит от числа положительных решений α^{*2} бифуркационной системы, удовлетворяющих, например, при четных n условиям (18₂) и (18₃). Если же при каком-то α^* условие (18₃) нарушается, можно продолжать процесс осреднения теперь уже системы (25) в поисках у системы (1) инвариантных торов большей размерности, как это делалось в сходных ситуациях в работах [5, гл. 1] и [2]. Те же рассуждения верны и для нечетных n .

Поскольку доказательство теоремы 1 конструктивно, во всяком случае при четных n непосредственно для системы (1) можно в явном виде выписать главные по ε члены инвариантной поверхности, тем самым, указав ее структуру. При нечетных n формулы становятся менее наглядными.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть в системе (1) $n = 2m$ и выполняется условие (18). Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ инвариантная поверхность системы (1), наличие которой гарантирует теорема 1, имеет вид*

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon^{1/2} \alpha^* \text{Cs } \psi + \varepsilon ((\tilde{f}(\psi) - \bar{g}) \text{Cs } \psi - \alpha^* \tilde{\theta}(\psi) \text{Sn } \psi) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x'' &= -\varepsilon^m \alpha^{*2m} \text{Sn } \psi - \varepsilon^{m+1/2} (2m \alpha^{*2m-1} (\tilde{f}(\psi) - \bar{g}) \text{Sn } \psi \\ &\quad + \alpha^{*2m} \tilde{\theta}(\psi) \text{Cs } \psi) + O(\varepsilon^{m+1}), \end{aligned} \quad (36)$$

где вектор α^* из замены (7) удовлетворяет условию (18), ω – периодические функции $\tilde{f}(\psi)$ и $\tilde{\theta}(\psi)$ определены в заменах (9_{ev}) и (22), а $\bar{g}$ – в замене (20), $\text{Cs } \varphi$ и $\text{Sn } \varphi$

используются в замене (5). При этом функция $\Gamma(\psi, \varepsilon)$, задающая инвариантная поверхность, существование которой для системы (25) гарантируется леммой Хейла, входит в первое уравнение (36), имея множитель $\varepsilon^{3/2}$, а во второе – множитель ε^{m+1} .

В самом деле, при $n = 2m$, $m \geq 2$, суперпозиция шести замен (5), (7), (9_{ev}) , (20), (22), (24), где в последней вместо переменной z подставлена функция $\Gamma(\psi, \varepsilon)$ из леммы Хейла, представляет собой инвариантный тор системы (1), имеющий вид

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon^{1/2}(\alpha^* + \varepsilon\Gamma - \varepsilon^{1/2}\bar{g} + \varepsilon\tilde{g}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) + \varepsilon^{1/2}\tilde{f}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) \\ &\quad + \varepsilon^{1/2}\tilde{f}_L(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) \cdot (\varepsilon\Gamma - \varepsilon^{1/2}\bar{g} + \varepsilon\tilde{g}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}))) \text{Cs}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}), \\ x'' &= -\varepsilon^{n/2}(\alpha^* + \varepsilon\Gamma - \varepsilon^{1/2}\bar{g} + \varepsilon\tilde{g}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) + \varepsilon^{1/2}\tilde{f}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) \\ &\quad + \varepsilon^{1/2}\tilde{f}_L(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}) \cdot (\varepsilon\Gamma - \varepsilon^{1/2}\bar{g} + \varepsilon\tilde{g}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta})))^n \text{Sn}(\psi + \varepsilon^{1/2}\tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Выделяя в правых частях полученных равенств члены, стоящие при двух младших степенях параметра ε , получаем уравнения (36), в которых, как обычно, произведение, например, векторов $\alpha^{*2m}\tilde{\theta}(\psi) \text{Cs}^{4m-1}\psi$ означает вектор с компонентами $\alpha_i^{*2m}\tilde{\theta}_i(\psi) \text{Cs}^{4m-1}\psi_i$.

10. Первый частный случай. Система (37). Применим полученные выше результаты для случая, когда в системе (1) $n = 2$, т.е. $n = 2m$ при $m = 1$. Тогда переменные x'' и параметр ε имеют второй порядок малости, а переменные x' – первый.

Система (1) с учетом замечания 3 принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+d} + X_i^{[3]}(x, \varepsilon) + X_i^{[4]}(x, \varepsilon) + X_i^{*[5]}(x, \varepsilon), \\ \dot{x}_{i+d} &= -x_i^3 + X_{i+d}^{[4]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{[5]}(x, \varepsilon) + X_{i+d}^{*[6]}(x, \varepsilon), \end{aligned} \quad i = 1, \dots, d, \quad (37)$$

где $x = (x_1, \dots, x_{2d})$, $X_i^{[k]}(x, \varepsilon)$ – однородные полиномы порядка k по x и ε в указанном выше смысле, $i = 1, \dots, 2d$; функции $X_i^{*[k]}(\varepsilon^{1/2}x', \varepsilon x'', \varepsilon) = \varepsilon^k \hat{X}_i^{*[k]}(x, \varepsilon)$, причем $\hat{X}_i^{*[k]}$ – непрерывные и непрерывно дифференцируемые по $x_1, \dots, x_{2d}$ функции.

Таким образом, согласно обозначениям (2)

$$\begin{aligned} X_i^{[3]} &= X_{i3}^{[1]}(x)\varepsilon + X_{i3}^{[3]}(x), \quad X_{i+d}^{[4]} = X_{i+d4}^{[0]}\varepsilon^2 + X_{i+d4}^{[2]}(x)\varepsilon + X_{i+d4}^{[4]}(x), \\ X_{i3}^{[1]} &= \sum_{j=1}^d X_{i3}^{(e_j, 0)} x_j, \quad X_{i3}^{[3]} = \sum_{|l|=3} X_{i3}^{(l, 0)} x'^l + \sum_{j,k=1}^d X_{i3}^{(e_j, e_k)} x_j x_{k+d}, \\ X_{i4}^{[0]} &= c_0, \quad X_{i4}^{[2]} = \sum_{|l|=2} X_{i4}^{(l, 0)} x'^l + \sum_{k=1}^d X_{i4}^{(0, e_k)} x_{k+d}, \\ X_{i4}^{[4]} &= \sum_{|l|=4} X_{i4}^{(l, 0)} x'^l + \sum_{|l|=2} \sum_{k=1}^d X_{i4}^{(l, e_k)} x'^l + \sum_{|l|=2} X_{i4}^{(0, l)} x''^l. \end{aligned}$$

Но далеко не все из выписанных коэффициентов задействованы в предположениях (18) теоремы 1 и оказывают влияние на существование инвариантных торов у системы (37).

В полярной замене (5), когда $n = 2$, $\text{Cs } \varphi_i$ и $\text{Sn } \varphi_i$ представляют собой эллиптические функции при модуле $2^{-1/2}$: $\text{Cs } \varphi_i = \text{cn } \varphi_i$, $\text{Sn } \varphi_i = \text{dn } \varphi_i$. Их период $\omega = 4\sqrt{2} \int_0^1 (1 - \zeta^4)^{-1/2} d\zeta$ и $\text{Cs } \varphi_i^4 + 2 \text{Sn } \varphi_i^2 = 1$.

Кроме того, при $m = 1$ в (14_{ev}) $\varkappa_2^0 = 1$, $\varkappa_2^{(e_i)} = \omega^{-1} \int_0^\omega \text{Cs}^2 \varphi_i d\varphi_i = v$.

Введем матрицу $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^d$ и вектор $b = (b_1, \dots, b_d)$, у которых

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (v/3)(X_{i3}^{(e_i+2e_j,0)} + X_{i+d4}^{(2e_j,e_i)}), \quad \text{если } i \neq j, \\ a_{ii} &= (v/5)(3X_{i3}^{(3e_i,0)} + X_{i+d4}^{(2e_i,e_i)}), \quad b_i = (1/3)(X_{i3}^{(e_i,0)} + X_{i+d4}^{(0,e_i)}). \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть также матрица $E_\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$, вектор $\alpha^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_d^2)$. Тогда формула (14_{ev}) при $m = 1$ принимает вид

$$V(\alpha) = E_\alpha(A\alpha^2 + b), \quad (39)$$

и система бифуркационных уравнений для (37)

$$A\alpha^2 + b = 0 \quad (40)$$

— это линейная алгебраическая система относительно вектора α^2 .

Предположим, что вектор α^* удовлетворяет системе (40), обращая в (39) $V(\alpha)$ в нуль. Тогда в формуле (19) $V_i^{(j)}(\alpha^*) = 2a_{ij}\alpha_i^*\alpha_j^*$, откуда

$$V_L(\alpha^*) = \{V_i^{(j)}(\alpha^*)\}_{i,j=1}^d = 2E_{\alpha^*} A E_{\alpha^*}. \quad (41)$$

Обозначая через A_j^b , $j = 1, \dots, d$, матрицу A , в которой столбец с номером j заменен на вектор $-b$, наложим на коэффициенты системы (37), входящие в формулы (38), следующие ограничения:

$$b \neq 0, \quad \frac{\det A_j^b}{\det A} > 0, \quad j = 1, \dots, d. \quad (42)$$

Положим

$$\alpha^* = \left(\left(\frac{\det A_1^b}{\det A} \right)^{1/2}, \dots, \left(\frac{\det A_d^b}{\det A} \right)^{1/2} \right). \quad (43)$$

Тогда α^* — единственное положительное решение бифуркационной системы (40) и из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для системы (37) с $d \geq 2$ выполняется условие (42), вектор α^* , определенный в (43), удовлетворяет условию (13) и матрица $E_{\alpha^*} A E_{\alpha^*}$ из (41) некритическая. Тогда при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ система (37) имеет d -мерный инвариантный тор с частотами движений на нем близкими к $\varepsilon^{1/2}\alpha_1^*\omega^{-1}, \dots, \varepsilon^{1/2}\alpha_d^*\omega^{-1}$.

11. Второй частный случай. Система (44). Предположим теперь, что система (37) не зависит от малого положительного параметра ε и в ней $d = 2$. Последнее предположение не существенно и делается для большей наглядности результатов. Тем самым в (37) $X_{\iota}^{[k]} = X_{\iota k}^{[k]}$, $\iota = 1, 2, 3, 4$, т.е. $X_{\iota k}^{[k-2\nu]} = 0$ при $1 \leq \nu \leq k/2$.

Итак, пусть четырехмерная система (37) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 + X_1^{[3]}(x) + X_1^{*[4]}(x), & \dot{x}_3 &= -x_1^3 + X_3^{[4]}(x) + X_3^{*[5]}(x), \\ \dot{x}_2 &= x_4 + X_2^{[3]}(x) + X_2^{*[4]}(x), & \dot{x}_4 &= -x_2^3 + X_4^{[4]}(x) + X_4^{*[5]}(x), \end{aligned} \quad (44)$$

где $X_i^{*[4]}(x) = X_i^{[4]}(x) + X_i^{*[5]}(x)$, $X_i^{*[5]}(\delta x_1, \delta x_2, \delta^2 x_3, \delta^2 x_4) = \delta^5 \hat{X}_i^{*[5]}(x, \delta)$, функции $\hat{X}_i^{*[5]}(x, \delta)$ непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемы по x при $\|x\| < x_0$, $0 \leq \delta < \delta_0$, $i = 1, 2$. И аналогично устроены функции $X_{i+2}^{*[5]}(x)$.

Тогда для системы (44) определенный в (38) вектор $b = 0$, в формуле (39) функция $V(\alpha) = E_{\alpha} A \alpha^2$, а бифуркационная система (40) – это линейная однородная система $A \alpha^2 = 0$ или в координатной форме

$$a_{11} \alpha_1^2 + a_{12} \alpha_2^2 = 0, \quad a_{21} \alpha_1^2 + a_{22} \alpha_2^2 = 0, \quad (45)$$

где $a_{11} = (3X_1^{(3,0,0,0)} + X_3^{(2,0,1,0)})v/5$, $a_{22} = (3X_2^{(0,3,0,0)} + X_4^{(0,2,0,1)})v/5$, $a_{12} = (X_1^{(1,2,0,0)} + X_3^{(0,2,1,0)})v/3$, $a_{21} = (X_2^{(2,1,0,0)} + X_4^{(2,0,0,1)})v/3$.

Система (45) разрешима и имеет однопараметрическое семейство решений, если существует такое $\beta > 0$, что

$$-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} = \beta^2 > 0. \quad (46)$$

Пусть условие (46) выполняется. Положим

$$\alpha_c^* = (c, \beta c) = c \left(1, \left(-\frac{a_{11}}{a_{12}} \right)^{1/2} \right) = c \left(1, \left(-\frac{a_{21}}{a_{22}} \right)^{1/2} \right), \quad c > 0. \quad (47)$$

Тогда при любом значении c вектор α_c^* будет являться положительным решением бифуркационной системы (45).

Указанный вектор α_c^* удовлетворяет условию (13), если

$$\exists \gamma > 0, \quad \tau \geq 2: \quad \forall q_1, q_2 - \text{целых}, \quad q_1^2 + q_2^2 \neq 0 \Rightarrow |q_1 + \beta q_2| > \gamma(|q_1| + |q_2|)^{-\tau}. \quad (48)$$

Действительно, условие (48) непосредственно выполняется для α_c^* с $c = 1$, а при других c в (48) γ надо заменить на γc^{-1} .

Далее, в формуле (41) с учетом (46) и (47) матрица $V_L(\alpha_c^*)$ равна

$$2 \begin{pmatrix} a_{11} \alpha_{c1}^{*2} & a_{12} \alpha_{c1}^* \alpha_{c2}^* \\ a_{21} \alpha_{c1}^* \alpha_{c2}^* & a_{22} \alpha_{c2}^{*2} \end{pmatrix} = 2c^2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}(-a_{11}/a_{12})^{1/2} \\ a_{21}(-a_{11}/a_{12})^{1/2} & a_{22}(-a_{21}/a_{22}) \end{pmatrix};$$

очевидно, при этом элемент $V_1^{(2)} = 2c^2(-a_{11}a_{12})^{1/2} \text{sign } a_{12}$. Следовательно, собственные числа λ_1 и λ_2 матрицы $V_L(\alpha_c^*)$ удовлетворяют уравнению $\lambda^2 - (a_{11} - a_{21})\lambda +$

$a_{21}|a_{11}|\text{sign } a_{12} = 0$, откуда $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = -a_{21}$, а значит, $V_L(\alpha_c^*)$ – некритическая матрица при любом $c > 0$.

Таким образом, для выполнения условий (18) теоремы 1 применительно к системе (44) для коэффициентов, входящих в бифуркационную систему (45), достаточно потребовать выполнения условий (46) и (48) при любом векторе α^* из (47). Фактически это означает, что коэффициенты однородных полиномов $X_i^{[3]}$, $X_{i+2}^{[4]}$ системы (44), входящие в систему (45), должны удовлетворять условию, вытекающему из (46):

$$\begin{aligned} & \text{существует такое } \beta > 0, \text{ удовлетворяющее (48), что} \\ & 3(3X_1^{(3,0,0,0)} + X_3^{(2,0,1,0)}) = -5\beta^2(X_1^{(1,2,0,0)} + X_3^{(0,2,1,0)}), \\ & 5(X_2^{(2,1,0,0)} + X_4^{(2,0,0,1)}) = -3\beta^2(3X_2^{(0,3,0,0)} + X_4^{(0,2,0,1)}). \end{aligned} \quad (49)$$

Остается разобраться в зависимости между c и ε . Для этого надо последовательно применить к системе (44) замены, описанные в п.п. 2–4.

Пусть в (6) функции $R^{*[3]}$, $\Phi^{*[2]}$ непрерывно дифференцируемы по r_i и вещественно аналитичны по φ_i при $|r_i| < r_0$. Тогда согласно (47) для всякого $c > 0$ в замене (7) с $\alpha = \alpha_c^*$ должно выполняться неравенство $\varepsilon < \varepsilon_c^\beta = r_0^2/(2c\beta^0)^2$, $\beta^0 = \max\{1, \beta\}$. Кроме того, лемма Хейла может быть применена к системе (25), если $\varepsilon < \varepsilon_c^0$. Возьмем $\varepsilon_c = \min\{\varepsilon_c^\beta, \varepsilon_c^0\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Любая система (44), удовлетворяющая условию (49), при всяком $c > 0$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ имеет однопараметрическое семейство двумерных инвариантных торов вида*

$$\begin{aligned} x_1 &= \varepsilon^{1/2} c C s \psi_1 + \varepsilon((\tilde{f}_1(\psi) - \bar{g}_1) C s \psi_1 - c \tilde{\theta}_1(\psi) S n \psi_1) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_2 &= \varepsilon^{1/2} c \beta C s \psi_2 + \varepsilon((\tilde{f}_2(\psi) - \bar{g}_2) C s \psi_2 - c \beta \tilde{\theta}_2(\psi) S n \psi_2) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ x_3 &= -\varepsilon c^2 S n \psi_1 - \varepsilon^{3/2}(2c(\tilde{f}_1(\psi) - \bar{g}_1) S n \psi_1 + c^2 \tilde{\theta}_1(\psi) C s^3 \psi_1) + O(\varepsilon^2), \\ x_4 &= -\varepsilon c^2 \beta^2 S n \psi_2 - \varepsilon^{3/2}(2c\beta(\tilde{f}_2(\psi) - \bar{g}_2) S n \psi_2 + c^2 \beta^2 \tilde{\theta}_2(\psi) C s^3 \psi_2) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

с частотами движений на них близкими к $\varepsilon^{1/2} c \omega^{-1}$, $\varepsilon^{1/2} c \beta \omega^{-1}$.

Теорема 3 является очевидным следствием теоремы 1, а формула для семейства инвариантных торов системы (44) вытекает из формулы (36).

12. Заключение. Отметим, что бифуркация положения равновесия системы (1) при $n = 1$ исследована в работе [1]. А в работе [4] также при $n = 1$ конструктивно построены классы вещественных систем, в том числе полиномиальных, в которых при всех малых значениях параметра происходит бифуркация рождения инвариантного тора размерности на единицу меньшей, чем размерность системы, совпадающей с произвольной степенью числа два.

Кроме того, система (1), в которой $d = 2$ и четвертое уравнение имеет вид $\dot{x}_4 = -x_2^{n+1} + X_4^{2n+2}(x, \varepsilon) + X_4^{*2n+3}(x, \varepsilon)$, при $n = 1$ изучалась в работах [5]–[7], а при $n \geq 2$ – в работе [8]. Для системы типа (48) это означает, что два слабосвязанных осциллятора имеют восстанавливающие силы ближайших, но различных нечетных порядков $2n - 1$ и $2n + 1$.

Комбинирование используемых в перечисленных работах результатов и методов в принципе позволяет исследовать любую систему с нулевым приближением $(\lambda_1 x_{d+1}, \dots, \lambda_d x_{2d}, -\lambda_1 x_1^{2n_1-1}, \dots, -\lambda_d x_d^{2n_d-1})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бибииков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1991.
- [2] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 272–331.
- [3] Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Math. 1961. V. 73. № 3. P. 496–531.
- [4] Басов В. В. Бифуркация инвариантного тора коразмерности единица // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 1. С. 3–17.
- [5] Басов В. В. Об устойчивости положения равновесия в критическом случае двух чисто-мнимых и двух нулевых корней характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 10. С. 1313–1318.
- [6] Басов В. В., Бибииков Ю. Н. Бифуркация положения равновесия системы дифференциальных уравнений в критическом случае двух чисто мнимых и двух нулевых корней характеристического уравнения, I // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 26–32.
- [7] Басов В. В. Бифуркация положения равновесия системы дифференциальных уравнений в критическом случае двух чисто мнимых и двух нулевых корней характеристического уравнения, II // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 4. С. 435–438.
- [8] Басов В. В. Бифуркация положения равновесия системы дифференциальных уравнений в критическом случае двух пар нулевых корней характеристического уравнения // Тр. МИ-РАН. 2002. Т. 236. С. 45–60.

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: basov@VB2674.spb.edu

Поступило
24.12.2002
Исправленный вариант
11.06.2003