Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Акишев, О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:13:33

О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой

Г. А. Акишев

В статье рассмотрено анизотропное пространство Лоренца периодических функций. Установлена точная оценка порядка приближения класса О. В. Бесова тригонометрическими полиномами в пространствах Лоренца с анизотропной нормой.

Библиография: 18 названий.

Пусть $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с действительными координатами, $I^m = [0, 2\pi)^m$ – m -мерный куб и даны $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $q_j, \theta_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца измеримых по Лебегу (2π) -периодических функций $f(\bar{x})$, для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m} - 1} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} (f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m))^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1} - 1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{q_2}} \dots \right]^{\frac{\theta_{m-1}}{q_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (сначала по x_1 , затем по x_2 и т.д., см. [1], [2]). $L_{\bar{q}, \infty}(I^m)$ – пространство (Марцинкевича) функций, для которых

$$\|f\|_{\bar{q}, \infty} = \sup_{\bar{t} \in I^m} \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{1}{q_j}} f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m) < +\infty.$$

Пространство Лебега $L_{\bar{p}}(I^m)$, $p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$, со смешанной нормой состоит из всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, для которых (см. [3], [4])

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int_0^{2\pi} \left[\dots \left[\int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty.$$

$L_{\bar{p}}^0(I^m)$ – множество всех функций $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\bar{x}) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим класс С. М. Никольского $H_{\bar{r}}^{\bar{r}}$, состоящий из всех функций $f \in L_{\bar{r}}(I^m)$, для которых

$$\Omega_{\bar{l}}(f, \bar{t})_{\bar{r}} \leq \prod_{j=1}^m t_j^{r_j}, \quad \bar{t} \in [0, 1]^m,$$

где $l_j > r_j$, $j = 1, \dots, m$, $\Omega_{\bar{l}}(f, \bar{t})_{\bar{r}}$ – смешанный модуль гладкости функции $f \in L_{\bar{r}}(I^m)$ (см. [3]).

В дальнейшем

$$\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle},$$

где

$$\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad \rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\},$$

$a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}$.

Пусть дан вектор $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$. Положим $\bar{\gamma} = \bar{r}/r_1$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, и

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \bigcup_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle \leq n} \rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \left\{ t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle} \right\};$$

$E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$.

Через $C(\alpha, \beta, \dots)$ будем обозначать положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, различные, вообще говоря, в разных формулах.

Для краткости будем пользоваться записью $A \asymp B$, которая означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что $c_1 \cdot A \leq B \leq c_2 \cdot A$.

Теория вложения функциональных пространств $H_{\bar{r}}^{\bar{r}}$ исследованы С. М. Никольским [3], Т. И. Амановым [4] и другими математиками (см. библиографию в [3], [4]). В пространствах Лебега с изотропной нормой порядка приближения H -классов тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов изучены в [5]–[12], а в пространствах со смешанной нормой в [13], [14]. В настоящей заметке предлагаются оценки приближения классов $H_{\bar{r}}^{\bar{r}}$ в пространствах Лоренца и Марцинкевича с анизотропной нормой.

ЛЕММА А (см. [15]). Пусть даны положительные числа $0 < \theta < +\infty$ и a_k, b_k , $k = 1, 2, \dots$.

а) Если $\sum_{k=1}^n b_k \leq C \cdot b_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{\theta}.$$

б) Если $\sum_{k=n}^{\infty} b_k \leq C \cdot b_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^{\theta} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n^{\theta}.$$

ЛЕММА Б (см. [3; с. 133] и [16]). Пусть $1 \leq p_j < \infty, j = 1, \dots, m$. Для любого тригонометрического полинома $T_{\bar{n}}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \leq \bar{n}} a_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$ имеет место неравенство

$$\max_{\bar{x} \in I^m} |T_{\bar{n}}(\bar{x})| \leq C \cdot \prod_{j=1}^m n_j^{\frac{1}{p_j}} \cdot \|T_{\bar{n}}\|_{\bar{p}}.$$

Теперь докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Положим

$$G_e(\bar{n}) = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{N}^m : s_j \leq n_j, j \in e; \quad s_j > n_j, j \notin e\},$$

где $e \subset \{1, \dots, m\}$;

$$U_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}).$$

Пусть даны числа $\theta_j \in [1, +\infty), j = 1, \dots, m$. Через $\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)$ обозначают пространство всех числовых последовательностей $\{a_{\bar{s}}\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m}$, для которых

$$\|\{a_{\bar{s}}\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} = \left\{ \sum_{s_m=0}^{\infty} \left[\dots \left\{ \sum_{s_1=0}^{\infty} |a_{\bar{s}}|^{\theta_1} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}} < +\infty.$$

Положим

$$Y^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n\},$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m), 1 \leq \theta_j < +\infty, j = 1, \dots, m, \alpha \in [0, +\infty)$,

$$b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = \begin{cases} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} & \text{для } \bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}), \\ 0 & \text{для } \bar{s} \notin Y^m(n, \bar{\gamma}). \end{cases}$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} \leq C \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму методом математической индукции по размерности m . При $m = 1$ утверждение леммы очевидно.

Пусть $m = 2$. Из определения множества $Y^m(n, \bar{\gamma})$ и чисел $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})$ получим

$$\begin{aligned} & \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^2)} \\ &= \left\{ \sum_{s_2 < \frac{n}{\gamma_2}} \left[\sum_{s_1 > \frac{1}{\gamma_1} (n - \gamma_2 s_2)} |b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})|^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \sum_{s_2 \geq \frac{n}{\gamma_2}} \left[\sum_{s_1=0}^{\infty} |b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})|^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &= \left\{ \sum_{s_2 < \frac{n}{\gamma_2}} \left[\sum_{s_1 > \frac{1}{\gamma_1} (n - \gamma_2 s_2)} 2^{-\alpha(s_1 \gamma_1 + s_2 \gamma_2) \theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \sum_{s_2 \geq \frac{n}{\gamma_2}} \left[\sum_{s_1=0}^{\infty} 2^{-\alpha(s_1 \gamma_1 + s_2 \gamma_2) \theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \\ &\leq C(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot \left\{ \sum_{s_2 < \frac{n}{\gamma_2}} 1 + 1 \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \leq C(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\frac{1}{\theta_2}}. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что утверждение леммы верно для $m = \nu$, т.е.

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu})} \leq C \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}. \quad (1)$$

Докажем, что утверждение леммы верно для $m = \nu + 1$. Для краткости записи положим $\bar{s}(\nu) = (s_1, \dots, s_{\nu})$. Тогда по определению нормы имеем

$$\begin{aligned} \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu+1})} &= \left\{ \sum_{s_{\nu+1}=0}^{\infty} \|\{b_{\bar{s}(\nu), s_{\nu+1}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu})}^{\theta_{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}} \\ &= \left\{ \sum_{s_{\nu+1} \leq \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} \|\{b_{\bar{s}(\nu), s_{\nu+1}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu})}^{\theta_{\nu+1}} + \sum_{s_{\nu+1} > \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} \|\{b_{\bar{s}(\nu), s_{\nu+1}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu})}^{\theta_{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $s_{\nu+1} \leq n/\gamma_{\nu+1}$, то по определению

$$b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j s_j < n - \gamma_{\nu+1} \cdot s_{\nu+1}, \\ 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} & \text{при } \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j s_j > n - \gamma_{\nu+1} \cdot s_{\nu+1}. \end{cases}$$

Поэтому в силу предположения (1) получим

$$\begin{aligned} \sum_{s_{\nu+1} \leq \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} \|\{b_{\bar{s}(\nu), s_{\nu+1}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu})}^{\theta_{\nu+1}} &\leq C \cdot 2^{-n\alpha\theta_{\nu+1}} \sum_{s_{\nu+1} \leq \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} (n - s_{\nu+1}\gamma_{\nu+1})^{\theta_{\nu+1} \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} \\ &\leq C \cdot 2^{-n\alpha\theta_{\nu+1}} \cdot n^{1 + \sum_{j=2}^{\nu} \frac{\theta_{\nu+1}}{\theta_j}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $s_{\nu+1} > n/\gamma_{\nu+1}$, то $\sum_{j=1}^{\nu+1} s_j \gamma_j > n$ для всех $(s_1, \dots, s_{\nu}) \in \mathbb{Z}_{+}^{\nu}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{s_{\nu+1} > \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu+1})}^{\theta_{\nu+1}} &= C(\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu}, \theta_1, \dots, \theta_{\nu}) \sum_{s_{\nu+1} > \frac{n}{\gamma_{\nu+1}}} 2^{-s_{\nu+1}\alpha\gamma_{\nu+1}\theta_{\nu+1}} \\ &\leq C(\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu}, \theta_1, \dots, \theta_{\nu}) 2^{-n\alpha\theta_{\nu+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из неравенств (2)–(4) следует, что

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma})\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^{\nu+1})} \leq C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu+1} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $1 \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ такие, что $\gamma_1 = \dots = \gamma_{\nu} = \gamma'_1 = \dots = \gamma'_{\nu} = 1 < \gamma'_j < \gamma_j$ для любого $j = \nu + 1, \dots, m$, и

$$b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = \begin{cases} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle}, & \text{если } \bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}'), \\ 0 & \text{для } \bar{s} \notin Y^m(n, \bar{\gamma}'), \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_{+}^m)} \leq C(\theta, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $Y^m(n, \bar{\gamma}')$ представим в виде

$$Y^m(n, \bar{\gamma}') = \left\{ \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j < n \text{ и } \sum_{j=1}^{\nu} s_j \gamma'_j > n - \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j \right\} \\ \cup \left\{ \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j \geq n, s_1, \dots, s_{\nu} \geq 0 \right\} = Y_1^m(\bar{\gamma}') \cup Y_2^m(\bar{\gamma}').$$

Определим числа $b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ и $b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ следующим образом:

$$b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = \begin{cases} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle}, & \bar{s} \in Y_1^m(\bar{\gamma}'), \\ 0, & \bar{s} \in Y_2^m(\bar{\gamma}'), \end{cases} \quad b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') - b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}').$$

Ясно, что $b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') + b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$.

Положим $Y_3^{m-\nu}(\bar{\gamma}', n) = \{(s_{\nu+1}, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^{m-\nu} : \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j < n\}$.

Так как $\gamma_1 = \gamma'_1 = \dots = \gamma_{\nu} = \gamma'_{\nu}$, $\gamma'_j < \gamma_j$ для каждого $j = \nu + 1, \dots, m$ и $\alpha > 0$, в силу леммы 1 (с заменой m на ν и n на $n - \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j$) получим

$$\|\{b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} \\ = \left\| \left\{ 2^{-\alpha \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma_j} \left\| \left\{ 2^{-\alpha \sum_{j=1}^{\nu} s_j \gamma_j} \right\} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(Y^{\nu}(\bar{\gamma}', n - \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j))} \right\} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(Y_3^{m-\nu}(\bar{\gamma}', n))} \\ \leq C(\theta, \gamma) 2^{-n\alpha} \left\| \left\{ \left(n - \sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j \right)^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} 2^{-\alpha \sum_{j=\nu+1}^m s_j (\gamma_j - \gamma'_j)} \right\} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(Y_3^{m-\nu}(\bar{\gamma}', n))} \\ \leq C(\theta, \gamma) 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}} \cdot \prod_{j=\nu+1}^m \left\{ \sum_{s_j=0}^{\infty} 2^{-\alpha s_j \theta_j (\gamma_j - \gamma'_j)} \right\}^{\frac{1}{\theta_j}} \\ = C(\theta, \gamma) 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}. \quad (5)$$

Далее, по определению $b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ для всех $(s_{\nu+1}, \dots, s_m)$ таких, что $\sum_{j=\nu+1}^m s_j \gamma'_j > n$, имеет место оценка

$$b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}') = 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \leq 2^{-n\alpha} 2^{-\alpha \sum_{j=1}^{\nu} s_j \gamma_j} 2^{-\alpha \sum_{j=\nu+1}^m s_j (\gamma_j - \gamma'_j)}.$$

Поэтому в силу монотонности нормы и, учитывая $\gamma'_j < \gamma_j$ для всех $j = \nu + 1, \dots, m$, имеем

$$\|\{b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} = 2^{-n\alpha} \left\| \left\{ 2^{-\alpha \sum_{j=1}^{\nu} s_j \gamma_j} \cdot 2^{-\alpha \sum_{j=\nu+1}^m s_j (\gamma_j - \gamma'_j)} \right\} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(Y_2^m(\bar{\gamma}', n))} \\ \leq 2^{-n\alpha} \cdot \prod_{j=1}^{\nu} \left\{ \sum_{s_j=0}^{\infty} 2^{-\alpha \theta_j s_j} \right\}^{\frac{1}{\theta_j}} \cdot \prod_{j=\nu+1}^m \left\{ \sum_{s_j=0}^{\infty} 2^{-\alpha \theta_j s_j (\gamma_j - \gamma'_j)} \right\}^{\frac{1}{\theta_j}} = C(\gamma, \theta) \cdot 2^{-n\alpha}. \quad (6)$$

Теперь в силу (5) и (6)

$$\begin{aligned} \|\{b_{\bar{s}}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} &\leq \|\{b_{\bar{s}}^{(1)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} + \|\{b_{\bar{s}}^{(2)}(n, \bar{\gamma}, \bar{\gamma}')\}\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} \\ &\leq C(\theta, \gamma) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\bar{\theta}_j}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\theta_1 = \dots = \theta_m$ из лемм 1 и 2 следуют леммы Б и В из [7].

Положим

$$\bar{f}(\bar{t}) = \sup_{|E_m| \geq t_m} \frac{1}{|E_m|} \int_{E_m} \dots \sup_{|E_1| \geq t_1} \frac{1}{|E_1|} \int_{E_1} |f(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \dots dx_m,$$

где $|E_j|$ – мера Лебега множества $E_j \in [0, 2\pi)$.

Теперь докажем основные утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда для любой функции $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ имеет место неравенство

$$\bar{f}(\bar{t}) \leq C(p, m) \left\{ \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{p_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}} + \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}$$

для любых $t_j \in (2^{-n_j-1}, 2^{-n_j}]$, $n_j = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_j \subset [0, 2\pi]$ – измеримые по Лебегу множества. Тогда по свойству интеграла имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(x_1, \dots, x_m)| dx_1 \dots dx_m &\leq \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| dx_1 \dots dx_m \\ &\quad + \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| d\bar{x}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера, получим

$$\int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \leq \prod_{j=1}^m |E_j|^{\frac{1}{p'_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}}, \quad (8)$$

где $p'_j = p_j/(p_j - 1)$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $e = \{1, \dots, i\} \subset \{1, \dots, m\}$. Тогда по переменным $x_1, \dots, x_i$, применяя неравенство разных метрик для полиномов по тригонометрической системе (см. лемму Б), а по остальным переменным неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \left| \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) \right| d\bar{x} \leq \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \\
 & = \int_{E_m} \dots \int_{E_1} \sum_{s_1=1}^{n_1} \dots \sum_{s_i=1}^{n_i} \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} |\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})| d\bar{x} \\
 & \leq C \cdot \sum_{s_1=1}^{n_1} \dots \sum_{s_i=1}^{n_i} \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \dots \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \prod_{j=1}^i 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \cdot \prod_{j=1}^i |E_j| \cdot \prod_{j=i+1}^m |E_j|^{\frac{1}{p_j'}} \\
 & = C \cdot \prod_{j \in e} |E_j| \cdot \prod_{j \notin e} |E_j|^{\frac{1}{p_j'}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Для остальных множеств $e \subset \{1, \dots, m\}$ неравенство (9) доказывается аналогично.

В определении функции $\bar{f}$ меры $|E_j| \geq t_j$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому из неравенств (7)–(9) получим

$$\begin{aligned}
 \prod_{j=1}^m \frac{1}{|E_j|} \int_{E_m} \dots \int_{E_1} |f(\bar{x})| d\bar{x} & \leq C \cdot \left\{ \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{p_j}} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{e \subset \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда по определению точной верхней грани множества получим утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p_j < q_j < +\infty$, $1 \leq \theta_j < +\infty$. Если $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ и величина

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, то функция $f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$ и имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\theta}) \cdot \sigma(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Блозински [1; с. 161] доказал соотношение

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp \|\bar{f}\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}, \quad 1 \leq q_j < +\infty, \quad 1 \leq \theta_j < +\infty, \quad j = 1, \dots, m.$$

Пользуясь этим соотношением, имеем

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} & \leq C \|\bar{f}\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} = C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \int_{2^{-n_m-1}}^{2^{-n_m}} t_m^{\frac{\theta_m}{m}-1} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{2^{-n_1-1}}^{2^{-n_1}} t_1^{\frac{\theta_1}{1}-1} \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. \times (\bar{f}(t_1, \dots, t_m))^{\theta_1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Далее, применяя теорему 1 и учитывая соотношение

$$\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} t^{\beta-1} dt \asymp 2^{-n\beta}, \quad (11)$$

из (10) получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}}^{\theta_1} \dots \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\ &\quad + \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \int_{2^{-n_m-1}}^{2^{-n_m}} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{2^{-n_1-1}}^{2^{-n_1}} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} \left(\sum_{e \in \{1, \dots, m\}} \prod_{j \notin e} t_j^{-\frac{1}{p_j}} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \sum_{\bar{s} \in G_e(\bar{n})} \prod_{j \in e} 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $e = \{1, \dots, i\}$, $i \leq m$. Тогда, используя соотношение (11) и последовательно применяя неравенство треугольника, имеем

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \int_{2^{-n_m-1}}^{2^{-n_m}} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{2^{-n_1-1}}^{2^{-n_1}} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} \left(\prod_{j=i+1}^m t_j^{-\frac{1}{p_j}} \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \dots \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \sum_{s_i=1}^{n_i} \dots \sum_{s_1=1}^{n_1} \prod_{j=1}^i 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left[\dots \sum_{n_{i+1}=0}^{\infty} 2^{n_{i+1} \theta_{i+1} (\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{q_{i+1}})} \right. \right. \\ &\quad \times \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} 2^{-n_i \frac{\theta_i}{q_i}} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{-n_1 \frac{\theta_1}{q_1}} \left(\sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \dots \sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \sum_{s_i=1}^{n_i} \dots \sum_{s_1=1}^{n_1} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left. \prod_{j=1}^i 2^{\frac{s_j}{p_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m (\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})} \left(\sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \left[\sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} 2^{n_{m-1} \theta_{m-1} (\frac{1}{p_{m-1}} - \frac{1}{q_{m-1}})} \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{s_{m-1}=n_{m-1}+1}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_{i+1}=0}^{\infty} 2^{n_{i+1} \theta_{i+1} (\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{q_{i+1}})} \left(\sum_{s_{i+1}=n_{i+1}+1}^{\infty} \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} 2^{-n_i \frac{\theta_i}{q_i}} \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{s_i=1}^{n_i} 2^{\frac{s_i}{p_i}} \left[\sum_{n_{i-1}=0}^{\infty} 2^{-n_{i-1} \frac{\theta_{i-1}}{q_{i-1}}} \left(\sum_{s_{i-1}=1}^{n_{i-1}} 2^{\frac{s_{i-1}}{p_{i-1}}} \dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{-n_1 \frac{\theta_1}{q_1}} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \times \left(\sum_{s_1=1}^{n_1} 2^{\frac{s_1}{p_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_{i-1}}{\theta_{i-2}}} \dots \right]^{\frac{\theta_{i-1}}{\theta_{i-2}}} \right]^{\frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}} \right]^{\frac{\theta_{i+1}}{\theta_i}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \theta_m \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \end{aligned}$$

(к сумме по индексам n_j , $j = 1, \dots, i$, применяем часть а), а к сумме по n_j , $j = i + 1, \dots, m$, — часть б) леммы А)

$$\begin{aligned}
 &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{n_{i+1}=0}^{\infty} 2^{n_{i+1} \theta_{i+1} \left(\frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{q_{i+1}} \right)} \left[\sum_{n_i=0}^{\infty} 2^{-n_i \frac{\theta_i}{q_i}} \left(\sum_{s_i=1}^{n_i} 2^{\frac{s_i}{p_i}} \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\sum_{n_{i-1}=0}^{\infty} 2^{-n_{i-1} \frac{\theta_{i-1}}{q_{i-1}}} \left(\sum_{s_{i-1}=1}^{n_{i-1}} 2^{\frac{s_{i-1}}{p_{i-1}}} \dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{-n_1 \frac{\theta_1}{q_1}} \left(\sum_{s_1=1}^{n_1} 2^{\frac{s_1}{p_1}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right)^{\theta_1} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right. \right. \\
 &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} 2^{n_{m-1} \theta_{m-1} \left(\frac{1}{p_{m-1}} - \frac{1}{q_{m-1}} \right)} \dots \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{p}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (12) и (13) следует

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} &\leq C \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \right. \right. \\
 &\quad \times \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{p}} \left. \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \left. \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 &+ \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\sum_{n_{m-1}=0}^{\infty} 2^{n_{m-1} \theta_{m-1} \left(\frac{1}{p_{m-1}} - \frac{1}{q_{m-1}} \right)} \dots \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{p}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \left. \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Так как

$$f(\bar{x}) - U_{\bar{n}}(f, \bar{x}) = \sum_{s_m=n_m+1}^{\infty} \dots \sum_{s_1=n_1+1}^{\infty} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}),$$

по свойству нормы и лемме А

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|f - U_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{p}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 &\leq \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} 2^{n_m \theta_m \left(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1 \theta_1 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|\delta_{\bar{n}}(f)\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{p}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \left. \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Из неравенств (14) и (15) следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Известно, что в случае $1 < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, пространство $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$ имеет абсолютно непрерывные нормы. Поэтому сопряженное ему пространство $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}^*(I^m)$ совпадает с двойственным пространством $L_{\bar{q}', \bar{\theta}'}(I^m)$, где $\bar{q}' = (q'_1, \dots, q'_m)$, $\bar{\theta}' = (\theta'_1, \dots, \theta'_m)$, $q'_j = q_j/(q_j - 1)$, $\theta'_j = \theta_j/(\theta_j - 1)$, $j = 1, \dots, m$ (см. [1; с. 161]).

Теперь, используя принцип двойственности, как в [7], и теорему 2, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < q_j < \tau_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Если $f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$,

$$f(\bar{x}) \sim \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} b_{\bar{s}} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle},$$

то имеет место неравенство

$$\|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \geq C \cdot \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau_m} - \frac{1}{q_m} \right)} \left[\dots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{q_1} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\frac{\theta_1}{\tau}}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

Далее рассмотрим порядок приближения функционального класса $H_{\bar{p}}^{\bar{\tau}}$.

Сначала отметим, что оператор частичной суммы

$$S_{Q_n^{\bar{\tau}}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in Q_n^{\bar{\tau}}} a_{\bar{k}}(f) \cdot e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}$$

ограничен в пространстве $L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$, $1 < q_j < +\infty$, $1 < \theta_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, т.е.

$$\|S_{Q_n^{\bar{\tau}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C \cdot \|f\|_{\bar{q}, \bar{\theta}}, \quad f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m). \quad (16)$$

Это утверждение следует из теоремы Марцинкевича о множителях (см. [17; с. 239] и [2; следствие 1, с. 106]).

Из неравенства (16) получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\tau}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C(q, \theta) \cdot E_n^{(\bar{\tau})}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}}, \quad f \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m). \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$1 \leq p_j < q_j < +\infty, \quad 1 \leq \theta_j < +\infty, \quad \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m, \quad \gamma_j = \frac{r_j}{r_1}, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \quad j = 1, \dots, \nu, \quad r_1 \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) < r_j \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \quad j = \nu + 1, \dots, m.$$

Тогда имеет место соотношение

$$\sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{\tau}}} E_n^{(\bar{\tau})}(f)_{\bar{q}, \bar{\theta}} \asymp 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для любой $f \in H_{\bar{p}}^{\bar{\tau}}$ имеет место неравенство

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\tau}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}. \quad (18)$$

Применяя теорему 2 к функции $f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f) \in L_{\bar{q}, \bar{\theta}}(I^m)$, имеем

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C \cdot \left\{ \sum_{s_m=0}^{\infty} 2^{s_m(\frac{1}{p_m} - \frac{1}{q_m})\theta_m} \left[\dots \left[\sum_{s_1=0}^{\infty} 2^{s_1(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})\theta_1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \|\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f))\|_{\bar{p}}^{\frac{\theta_1}{\theta_1}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m}}. \quad (19)$$

Так как

$$\delta_{\bar{s}}(f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)) = \begin{cases} 0 & \text{для любого } \bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n), \\ \delta_{\bar{s}}(f) & \text{для любого } \bar{s} \notin Y^m(\bar{\gamma}, n), \end{cases}$$

из неравенства (19) получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)} \\ \leq C \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j})} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(\bar{\gamma}, n)} \right\|_{\ell_{\bar{\theta}}(\mathbb{Z}_+^m)}. \quad (20)$$

В лемме 2 положим

$$\alpha = r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} > 0, \quad \gamma_j = \frac{r_j + 1/q_j - 1/p_j}{r_1 + 1/q_1 - 1/p_1}, \quad \gamma'_j = \frac{r_j}{r_1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда условие $r_1 = \dots = r_\nu$ влечет $\gamma'_j = 1$, $j = 1, \dots, \nu$, и

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \dots = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu} \implies \gamma_j = 1, \quad j = 1, \dots, \nu, \\ r_1 \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) < r_j \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right) \implies \gamma'_j < \gamma_j, \quad j = \nu + 1, \dots, m.$$

В силу леммы 2 из (20) следует, что

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \leq C \cdot 2^{-n(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1})} \cdot n^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}$$

для любой функции $f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}$. Оценка (18) доказана.

Докажем оценку снизу. Для этого рассмотрим функцию

$$f_0(\bar{x}) = \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j + 1 - \frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho(\bar{s})} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}.$$

Известно, что $(1/C_0)f_0 \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}$, $1 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, где C_0 – некоторая положительная постоянная.

Выберем число $\tau \in (1, p_j)$ для всех $j = 1, \dots, m$ и применим теорему 3 к функции $f_0 - S_{Q_n^\tau}(f_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \|f_0 - S_{Q_n^\tau}(f_0)\|_{\bar{q}, \bar{\theta}} \\
 & \geq C \cdot \left\{ \sum_{s_m=0}^{\infty} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q_m}\right)} \left[\dots \left[\sum_{s_1=0}^{\infty} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q_1}\right)} \right. \right. \right. \\
 & \quad \times \left. \left. \left. \|\delta_{\bar{s}}(f_0 - S_{Q_n^\tau}(f_0))\|_{\tau}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}} \right\} \\
 & \geq C \cdot \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} 2^{s_m \theta_m \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q_m}\right)} \left[\sum_{s_{m-1} \leq \frac{1}{\gamma_{m-1}} (n - s_m \gamma_m)} 2^{s_{m-1} \theta_{m-1} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q_{m-1}}\right)} \dots \right. \right. \\
 & \quad \times \left. \left. \left[\sum_{s_1 \leq (n - \sum_{j=2}^m s_j \gamma_j)} 2^{s_1 \theta_1 \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{q_1}\right)} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\tau}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}} \right\}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношение

$$\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{\tau} \asymp \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau} - r_j\right)},$$

из (21) и (17) получим

$$\begin{aligned}
 E_n^{(\bar{\gamma})}(f_0)_{\bar{q}, \bar{\theta}} & \geq C \cdot \left\{ \sum_{s_m \leq \frac{n}{\gamma_m}} 2^{-s_m \theta_m \left(r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}\right)} \right. \\
 & \quad \times \left[\sum_{s_{m-1} \leq \frac{1}{\gamma_{m-1}} (n - s_m \gamma_m)} 2^{-s_{m-1} \theta_{m-1} \left(r_{m-1} + \frac{1}{q_{m-1}} - \frac{1}{p_{m-1}}\right)} \dots \right. \\
 & \quad \times \left. \left. \left[\sum_{s_1 \leq n - \sum_{j=2}^m s_j \gamma_j} 2^{-s_1 \theta_1 \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \dots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} \right]^{\frac{1}{\theta_m}} \\
 & \geq C \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum_{j=2}^m \frac{1}{\theta_j}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$\begin{aligned}
 1 \leq p_j < q_j < +\infty, \quad j = 1, \dots, m, \quad \bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}, \quad r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m, \\
 \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} = \dots = \frac{1}{p_\nu} - \frac{1}{q_\nu}, \quad r_1 \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) < r_j \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \quad j = \nu + 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$\sup_{f \in H_{\bar{p}}^{\bar{r}}} E_n^{\bar{\gamma}}(f)_{\bar{q}, \infty} \leq C(p, r, q) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\nu-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения пространства Марцинкевича, теоремы 1 и с учетом условия $1/p_j - 1/q_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, имеем

$$\|f\|_{\bar{q}, \infty} \leq C(p, q) \cdot \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right)} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}}.$$

Из предыдущего неравенства для любой функции $f \in H_{\bar{p}}^{\bar{\gamma}}$ получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q}, \infty} \leq C(p, q) \cdot \sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle > n} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right)}. \quad (22)$$

Положим

$$\gamma'_j = \frac{r_j + 1/q_j - 1/p_j}{r_1 + 1/q_1 - 1/p_1}.$$

Тогда $\gamma_j < \gamma'_j$ для всех $j = \nu + 1, \dots, m$, потому что по условию теоремы

$$r_1 \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} \right) < r_j \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \right), \quad j = \nu + 1, \dots, m.$$

Теперь пользуясь оценкой (см. [7; лемма B])

$$\sum_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle > n} 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle} \leq C(\gamma) \cdot 2^{-n\alpha} \cdot n^{\nu-1},$$

из неравенства (22) получим

$$\|f - S_{Q_n^{\bar{\gamma}}}(f)\|_{\bar{q}, \infty} \leq C(p, q) \cdot 2^{-n \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)} n^{\nu-1}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в случае $q_1 = \dots = q_m$, $\theta_1 = \dots = \theta_m$, $p_1 = \dots = p_m$ из теорем 2–4 следуют некоторые результаты Темлякова [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Оценки значения невозрастающей перестановки функции одной переменной через ее наилучшее приближение тригонометрическими полиномами установила Э. А. Стороженко [18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. P. Blozinski, “Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 146–167.
- [2] Е. Д. Нурсултанов, “О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 95–122.
- [3] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [4] Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Алма-Ата, 1976.
- [5] Я. С. Бугров, “Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной”, *Матем. сб.*, **64** (106) (1964), 410–418.

- [6] Н. С. Никольская, “Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p ”, *Сиб. матем. ж.*, **15** (1974), 395–412.
- [7] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986.
- [8] Н. Н. Пустовойтов, “Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности”, *Anal. Math.*, **20**:1 (1994), 35–48.
- [9] Э. М. Галеев, “Линейные поперечники классов Гёльдера–Никольского периодических функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 189–199.
- [10] Динь Зунг, “Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами”, *Матем. сб.*, **131 (173)**:2 (10) (1986), 251–271.
- [11] К. И. Бабенко, “О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами”, *Докл. АН СССР*, **132**:5 (1960), 982–985.
- [12] С. А. Теляковский, “Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами”, *Матем. сб.*, **63 (105)** (1964), 426–444.
- [13] Г. Акишев, “О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца со смешанной нормой”, *Тр. центра им. Н. И. Лобачевского (Казань)*, **8** (2001), 10–11.
- [14] Г. А. Акишев, М. И. Усербеков, “О порядках приближения функций многих переменных в пространстве со смешанной нормой”, *Вестн. КарГУ*, 2002, № 3, 4–13.
- [15] Н. Johansson, “Embedding of H_p^ω in some Lorentz spaces”, *Research Report*, **6**, Univer. Umea, 1975.
- [16] А. П. Унинский, “Неравенства для целых функций и тригонометрических полиномов со смешанной нормой”, *Тр. Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения*, 1966.
- [17] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [18] Э. А. Стороженко, “Теоремы вложения и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **97 (139)**:2 (6) (1975), 230–241.

Г. А. Акишев

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова, Республика Казахстан

E-mail: akishev@kargu.krg.kz

Поступило

16.05.2003