Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Брюнинг, Р. В. Некрасов, А. И. Шафаревич, Квантование периодических движений на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны в магнитном поле, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 32–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:09:11

Квантование периодических движений на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны в магнитном поле

Й. Брюнинг, Р. В. Некрасов, А. И. Шафаревич

Для изучения спектральной задачи для оператора Шрёдингера заряженной частицы, удерживаемой на двумерной компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны, используется квазиклассический подход. Проведена классификация режимов классического движения в интегрируемой области $E < E_{\text{cr}}$ и, как следствие, классификация квазиклассических решений. Построена спектральная серия (часть спектра, аппроксимируемая квазиклассическими собственными значениями), отвечающая значениям энергии, не превышающим порогового E_{cr} ; для каждого собственного значения вычислена кратность вырождения.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

Движение заряженной частицы на плоскости Лобачевского L в магнитном поле удовлетворяет стандартной системе Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = 1, 2, & \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y. \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

Магнитное поле задается замкнутой 2-формой на плоскости Лобачевского; будем считать, что она пропорциональна форме объема с коэффициентом w . Тогда гамильтониан в модели верхней полуплоскости имеет вид

$$H = \frac{y^2}{2}(p_x - A_x)^2 + \frac{y^2}{2}(p_y - A_y)^2, \quad A_x = \frac{w}{y}, \quad A_y = 0, \quad w > 0. \quad (1)$$

Изометрии плоскости Лобачевского отображают траектории в траектории, поэтому движение может быть “факторизовано”, т.е. рассмотрено на любой фактор-поверхности M плоскости L по свободно (без неподвижных точек) действующей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00968а, и фонда DFG-RAS, грант № 436 RUS 113/572.

подгруппе Γ группы изометрий. Мы будем рассматривать только компактные ориентируемые поверхности M ; т.е. поверхности постоянной отрицательной кривизны $K = -1$; род g такой поверхности больше 1.

Движение в соответствующем фазовом пространстве определяется гамильтоновой системой с гамильтонианом $H_M = p^2/2$ в T^*M с симплектической структурой [1]:

$$\Omega = dp_i \wedge dx^i + w\pi^* dS,$$

где dS – форма площади на M , π – естественная проекция.

Квантовая система задается магнитным оператором Шрёдингера. На плоскости Лобачевского он определен на функциях и имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{y^2}{2} \left\{ \left(ih \frac{\partial}{\partial x} + \frac{w}{y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} : L_2(L) \rightarrow L_2(L), \quad (2)$$

здесь h – параметр, возникающий далее для построения квазиклассического приближения.

“Факторизованная” квантовая система на M определяется оператором, действующим на сечениях $U(1)$ -расслоения над M с формой связности α , кривизна которой равна $iw dS$. Такая связность существует, если выполнено условие целочисленности суммарного магнитного потока через M [2]:

$$n = \frac{w(2g-2)}{h} \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

при этом число n определяет первый класс Чженя выбранного расслоения. Помимо этого, расслоение зависит от $2g$ параметров λ_i из $H^1(M, U(1)) \simeq U^{2g}(1)$, называемых *вихрями Ааронова–Бома* (см., например, [2]), каждому расслоению соответствует своя связность α ; таким образом, с поверхностью M связано семейство операторов $\hat{H}_M = h^2 \hat{H}_{M,n}(\lambda_i)$, каждый из которых действует на L_2 -сечения соответствующего расслоения. Достаточно малые связные области на L являются картами многообразия M , в которых оператор $\hat{H}_M$ для связности $\alpha = i\mathbf{A}$ с выбранным в (1) потенциалом $\mathbf{A}$ имеет вид (2). Поскольку рассматриваемые спектральные серии зависят только от магнитного поля [3], для удобства выкладок мы будем пользоваться также другими связностями, а для сокращения записи будем опускать параметры λ_i в записи операторов.

Движение заряженной частицы на плоскости Лобачевского совпадает с движением по кривым постоянной кривизны (см., например, [4]), которые описаны в [5]. Задача о классическом движении на замкнутой ориентируемой поверхности M постоянной отрицательной кривизны в магнитном поле, заданном формой объема, изучена в статье [1]. В частности, там доказано, что система интегрируема при $E < E_{\text{cr}} = w^2/2$.

Спектр, резольвента и собственные функции оператора $\hat{H}$ на плоскости Лобачевского изучены в [4], [6]. В работе [3] получены точные формулы для серий собственных значений операторов $\hat{H}_M$, удовлетворяющих условию $E < E_{\text{cr}}$.

Основным результатом этой работы является построение квазиклассического приближения для описания спектра и его вырождения квантового гамильтониана $\hat{H}_M$ (в интегрируемой области $E < E_{\text{cr}}$). Соответствующие формулы могут быть полезны как для классификации спектральных серий и состояний оператора $\hat{H}_{M,n}$,

так и в качестве основы для изучения возмущенной задачи (например, с малым электрическим потенциалом).

2. Квазиклассическое приближение

Известно, что множеству инвариантных изотропных подмногообразий гамильтоновой системы можно сопоставить квазиклассические решения; соответствующая процедура дается теорией канонического оператора и комплексного ростка Маслова [7]–[9].

2.1. Геометрия расслоения фазового пространства на классические траектории и инвариантные подмногообразия. Как описано в [1], все траектории в T^*M замкнуты при $0 < E < E_{\text{cr}}$, а их естественные проекции в M имеют постоянную геодезическую кривизну, равную $k_g = w/\sqrt{2E}$. Поэтому система не только интегрируема при $0 \leq E < E_{\text{cr}}$, так как при $0 \leq E < E_{\text{cr}}$ существует дополнительный к H_M интеграл движения, но и вырождена.

Предлагается [1] в качестве дополнительного интеграла $F: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ выбрать функцию, зависящую только от центра траектории, и, тем самым, задаваемую произвольной функцией $F_0: M \rightarrow \mathbb{R}$; будем считать, что F_0 – аналитическая функция Морса.

Множество фиксированного значения $H_M = E$, $F = f$ – инвариантное множество нашего гамильтонова потока на T^*M , его компонента связности, в общем положении, – тор Лиувилля. Таким образом, окрестность

$$U^*(M) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*M : \frac{\mathbf{p}^2}{2} \leq E_{\text{cr}} \iff p \equiv |\mathbf{p}| < w \right\}$$

подмножества $M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in T^*M : p = 0\}$ расслаивается на инвариантные слои. Сейчас мы покажем как $U^*(M)$ расслоено на такие торы, а также особые слои – точки покоя и перестройки торов Лиувилля. В силу вырождения это расслоение будет зависеть от выбора дополнительного интеграла F .

Поверхность M , т.е. множество точек покоя ($E = 0$), расслаивается на замкнутые кривые и вершины в точках локального максимума или минимума функции $F_0 = F|_{E=0}$. Множество слоев можно наглядно (см. пример на рис. 1) представить на графе Рибба R функции F_0 (см., например, [10]). Каждая точка графа соответствует одной связной компоненте линии уровня: внутренние точки ребер – замкнутым кривым без самопересечений (топологическим окружностям), вершины – изолированным точкам или сепаратрисным кривым.

При $0 < E < E_{\text{cr}}$ множество (E, f) -уровня – объединение траекторий, проектирующихся на M в окружности (в смысле метрики постоянной кривизны) радиуса $\sqrt{2E}/w$ с центрами в точках линии уровня f , а его связная компонента – объединение траекторий с центрами в связной компоненте линии уровня f . Если компонента f – окружность, то компонента E, f – тор (лиувиллев); изолированной точке соответствует одна окружность (“вырожденный тор”), а сепаратрисной кривой – сингулярная компонента (сепаратриса, где происходит перестройка торов – один в два, два в один). Таким образом, тот же граф R задает расслоение любого фиксированного уровня энергии E , $0 < E < E_{\text{cr}}$, а топологию всего расслоения $U^*(M)$

 Рис. 1. Поверхность рода $g = 2$ и граф Роба R функции F

задает $[0, E_{\text{cr}}) \times R$. Поэтому все связные компоненты Λ (и торы Лиувилля в том числе) этого расслоения параметризуются парой (E, r) , $E \in [0, E_{\text{cr}})$, $r \in R$.

Напоследок опишем две переменные действия I_1, I_2 , для торов Лиувилля данного слоения:

$$I_1 = I_1(E, r) = I_1(E), \quad I_2 = I_2(E, r), \quad r \in R, \quad E \in [0, E_{\text{cr}}).$$

Для этого выкинем из M точку b , где F имеет глобальный максимум; тогда на $M_b = M \setminus b$ можно ввести потенциал $\mathbf{A}$, а в $T^*M_b - 1$ -форму $\alpha = p_i dx^i + \mathbf{A}$: $d\alpha = \Omega$.

На каждом торе Лиувилля выберем пару образующих циклов – произвольную траекторию l_0 , ориентированную направлением движения, и произвольный цикл c , не пересекающий границ естественной проекции тора Лиувилля (циклов особенности), ориентированный своей проекцией – направлением проекции, дополненное градиентом F , должно задавать правильно ориентированный базис в M (на котором форма объема dS положительна). Тогда можно корректно определить

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{l_0} \alpha, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint_c \alpha,$$

переменную I_1 можно аналогично доопределить на все слои, а I_2 – на слои нулевой энергии, отвечающие внутренним точкам ребер графа R .

Из элементарных свойств переменных действия–угол (см., например, [10]) нам потребуется

ЛЕММА 1. *Переменные I_1, I_2 определены независимо от выбора описанных циклов l_0, c и их можно дополнить переменными-углами на торе Лиувилля $\phi^1, \phi^2 \bmod 2\pi$, которые вместе задают координаты Дарбу:*

$$\Omega = dI_i \wedge d\phi^i. \quad (4)$$

2.1.1. Вычисление I_1, I_2 . Действие I_1 инвариантно по отношению к выбору потенциала $\mathbf{A}$, так как траектории ограничивают двумерный диск траекторий с меньшими энергиями, но с тем же центром, а в силу теоремы Стокса интегрирование формы α по границе можно заменить интегрированием формы Ω по диску.

Очевидно, что при отображении проекции $P: L \rightarrow M$ любая замкнутая кривая на L накрывает замкнутую кривую на M , а траектория накрывает траекторию. Верно и обратное, более сильное утверждение.

ЛЕММА 2. *Для любой замкнутой траектории l_0 на M найдется замкнутая траектория (окружность) l на плоскости Лобачевского, взаимнооднозначно проектирующаяся в l_0 при отображении P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как кривизна накрывающих кривых постоянна и меньше 1, все эти кривые есть конечные окружности на L . Пусть окружность l накрывает l_0 более одного раза; тогда на l найдутся две эквивалентные (с точки зрения накрытия) точки m_2, m_1 такие, что $m_2 = g m_1$, $g \in \Gamma$. При этом достаточно малая дуга в окрестности m_1 переводится в дугу окрестности m_2 , а значит собственным преобразованием $g \in \Gamma$ вся окружность l переходит в себя, поэтому центр окружности m_0 является неподвижной точкой преобразования g . А это противоречит тому, что накрытие $P: L \rightarrow M$ определяется свободно (без неподвижных точек) действующей дискретной группой Γ .

СЛЕДСТВИЕ. *Для любой пленки $\Sigma_0 \subset T^*M$, имеющей границей траекторию l_0 , найдется пленка $\Sigma \subset T^*L$, взаимнооднозначно проектирующаяся в Σ_0 при отображении P .*

В силу следствия любой диск можно “поднять” из T^*M на T^*L , а симплектическая структура сохраняется как при накрытии, так и обратно, при “поднятии”, поэтому форму Ω можно интегрировать по соответствующему диску из T^*L . Мы еще раз воспользуемся теоремой Стокса (для упрощения вычислений), и уже на поднятых в T^*L траекториях вычислим I_1 (ср. с [4]).

Рассмотрим произвольную окружность на L

$$\begin{aligned} x(\phi) &= x_0 - R \sin \phi, \\ y(\phi) &= y_0 + R \cos \phi; \end{aligned}$$

ей соответствует траектория

$$\begin{aligned} x(\phi) &= x_0 - R \sin \phi, \\ y(\phi) &= y_0 + R \cos \phi, \\ p_x &= -\frac{\sqrt{2E}}{y_0} + \frac{w}{y_0} = \text{const}, \quad p_y(\phi) = \frac{\sqrt{2E}}{y} \sin \phi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ p_x R \cos \phi + \frac{\sqrt{2E} \sin \phi}{y} R \sin \phi \right\} d\phi \\ &= \frac{R\sqrt{2E}}{2\pi y_0} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{1 + (R/y_0) \cos \phi} d\phi = \sqrt{2E} \left(\frac{y_0}{R} - \sqrt{\frac{y_0}{R} - 1} \right). \end{aligned}$$

Как известно,

$$\frac{R}{y_0} = \frac{1}{k_g} = \frac{\sqrt{2E}}{w},$$

поэтому в итоге имеем

$$I_1(E) = w - \sqrt{w^2 - 2E}. \quad (5)$$

ЛЕММА 3. При фиксированном E переменная I_2 растет на ребрах графа в направлении роста F :

$$r_1, r_2 \in R, \quad r_2 \sim r_1, \quad F(r_2) > F(r_1) \implies I_2(E, r_2) - I_2(E, r_1) > 0,$$

и претерпевает разрывы в вершинах ветвления r_0 графа R , удовлетворяющие “закону Кирхгофа”: сумма правых пределов функции I_2 на входящих ребрах (с меньшим значением F) равна сумме левых пределов на выходящих ребрах (с большим значением F), например, если r_i , $i = 2, 3, 4$, расположены как на рис. 1, то

$$I_2(E, r_3) + I_2(E, r_4) - I_2(E, r_2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad F(r_i) \rightarrow F(r_0).$$

Полное изменение переменной I_2 , просуммированное по всем ребрам, равно

$$\Delta I_2(E) = (w - I_1(E))(2g - 2). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проще это увидеть для нулевого уровня энергии $E = p = 0$. Тогда можно считать, что $\alpha = \mathbf{A}$, $\Omega = w dS$ – формы на M , и вычислить разницу переменной I_2 для двух линий уровня c_1, c_2 (“вырожденных торов”) функции F ($F(c_1) < F(c_2)$) на общем ребре графа R по теореме Стокса:

$$I_2(0, r_2) - I_2(0, r_1) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\vartheta} w dS = \frac{wS(\vartheta)}{2\pi} > 0,$$

где ϑ – цилиндр на M , ограниченный циклами c_1, c_2 , S – мера площади. Для доказательства “закона Кирхгофа” нужно аналогично рассмотреть циклы на всех ребрах одной вершины, воспользоваться теоремой Стокса и устремить площадь поверхности на M к нулю, устремив ограничивающие ее циклы к вершине. Наконец, максимальное значение – $wS(M)/(2\pi)$ (что по формуле Гаусса–Бонне равно $w(2g - 2)$) получается из первых двух предложений и снова теоремы Стокса, примененной ко всей поверхности M .

Теперь опишем, как считать разность переменной I_2 для двух торов $\Delta(E, r_1)$, $\Delta(E, r_2)$ с одинаковой энергией $E > 0$, отвечающих одному и тому же ребру.

Для этого рассмотрим не только уровень энергии, но и меньшие значения. Таким образом, имеем четырехмерный кусок фазового пространства Q из торов между c_1, c_2 с различной энергией E от 0 до $p^2/2$. Кусок Q ограничен поверхностью максимального уровня энергии и двумя поверхностями торов: над c_1 и над c_2 . Тогда интеграл от формы фазового объема $\Omega \wedge \Omega$ по этому куску равен просто ее объему $V(p) = \pi p^2 \Delta S$. Но фазовый объем Q можно посчитать по формуле (4)

$$V(p) = 4\pi^2 \iint_Q dI_1 dI_2,$$

а приращение объема $dV = \pi \Delta S dp^2$ равно

$$4\pi^2 \Delta I_2(E, r_2) dI_1,$$

приращение I_1 вычислим из (5); окончательно имеем

$$I_2(E, r_2) - I_2(E, r_1) = \sqrt{w^2 - p^2} \frac{S(\vartheta)}{2\pi} > 0,$$

что для поверхностей ограниченными циклами на разных ребрах дает “закон Кирхгофа” и максимальное изменение переменной I_2 .

2.2. Квантование символа H_M . Опишем, каким образом связаны символ H_M гамильтониана классического движения и оператор $h^2 \hat{H}_{M,n}$, $n \sim 1/h$, приближение для спектральной задачи которого мы собираемся конструировать из данных о классическом движении.

По определению псевдодифференциальным операторам в R^k можно сопоставить их символ – гладкую функцию в R^{2k} , обратная операция называется *квантованием символа* $H(x, p) \rightarrow \hat{H} = H(x, \hat{p})$. Символ и оператор тогда связаны более глубокой связью квазиклассического приближения – решения уравнения Шрёдингера для данного оператора приближаются известными ВКБМ-конструкциями [8], [9], связанными с решениями гамильтоновой системы с соответствующим символом. Квазиклассическое приближение легко обобщается на уравнения Шрёдингера на римановых многообразиях M^k вместо R^k , его решения тогда строятся по решениям уравнения Гамильтона в T^*M^k с некоторым символом; и хотя уже нет однозначных инвариантных процедур сопоставления такому символу оператора, все различные сопоставления эквивалентны в квазиклассическом смысле – квазиклассические решения одинаково точно приближают решения уравнений Шрёдингера для различных операторов, соответствующих этому символу.

В более общем случае операторов над сечениями расслоений над конфигурационным пространством M^k такое сопоставление отсутствует. Самое общее квантование символа W на произвольном симплектическом многообразии [7] дает операторы $\tilde{W}$ с более сложными областями определения, чем сечения $U(1)$ -расслоений над M^k – операторы $\tilde{W}$ определены на так называемом пучке волновых пакетов $\Pi(T^*M^k)$ (детали см. в [7]).

Локально в связных областях D фазового пространства можно ввести координаты Дарбу $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in R_x^k \times R_p^k$. Тогда ограничение пучка $\Pi(T^*M^k)$ на такие карты дает так называемые локальные пучки над этими картами – функции $\psi \in C_0(R_x^k)$ по $\text{mod } O(h^\infty)$ в D , что значит классы эквивалентности функций, где две функции ψ_1, ψ_2 эквивалентны, если $(\psi_1, \hat{\chi}\psi_2) = O(h^\infty) \quad \forall \chi \in C_0(D)$. На таких локальных пучках и задано представление оператора $\tilde{W}$ как действие псевдодифференциального оператора с символом $W(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Для существования пучка $\Pi(T^*M^k)$ необходимо выполнение условий [7]

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\Sigma} \Omega = n \in \mathbb{Z} \quad \forall \Sigma : \quad \partial \Sigma = 0, \quad (7)$$

что в нашем случае достаточно проверить только для поверхностей $\Sigma \subset M$, так как любую поверхность можно гладко стянуть на $p = 0$. Тогда единственная ненулевая пленка без границы – M , поэтому условие (7) имеет вид (3).

Построение таких пучков неоднозначно: различные неэквивалентные пучки $\Pi(T^*M)$ параметризуются элементами группы когомологий $H^1(T^*M, U(1)) \simeq U^{2g}(1)$, что в нашем случае изоморфно множеству параметров $H^1(M, U(1))$ исходного оператора. Таким образом, квантованный оператор (семейство операторов с малым параметром h) также определен лишь для дискретного набора отношений w/h , и с точностью до фиксации параметров из $U^{2g}(1)$ выполнено

$$\tilde{H}_M = \tilde{H}_{M,n} : \Pi(T^*M) \rightarrow \Pi(T^*M), \quad n \sim \frac{1}{h}, \quad h \rightarrow 0.$$

Хотя сами эти операторы и не совпадают – они определены на разных пространствах, в “координатных” представлениях $\tilde{H}_{M,n}$ действует в точности так же, как и $h^2\hat{H}_{M,n}$. В самом деле, выбирая в качестве карт представления действия оператора $\tilde{H}_{M,n}$ карты вида $D = T^*U \subset T^*M$ с координатами Дарбу

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x},$$

будем иметь оператор $\mathbf{p}^2/2$, действующий на $C_0^\infty(U)$ как просто дифференциальный оператор с символом $(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2/2$, точно так же, как это определено во введении для действия оператора $\hat{H}_{M,n}$ в карте U . При этом способы склеивания глобального пучка, конечно, те же, что и для расслоения на M .

Таким образом, квантование символа H_M дает операторы $\tilde{H}_{M,n}$, действие которых на сечения пучка $\Pi(T^*U)$ в “координатных” представлениях в точности совпадает с действием $h^2\hat{H}_{M,n}$; поэтому приближенные решения для спектральной задачи оператора $\tilde{H}_{M,n}$ автоматически дают столь же приближенные решения для спектральной задачи $h^2\hat{H}_{M,n}$. А для $\tilde{H}_M$, как и для произвольного $\tilde{W}$, имеется квазиклассическое приближение; оно основывается на конструкции канонического оператора Маслова.

2.3. Схема квазиклассического приближения. При построении асимптотических решений по торами Лиувилля возникает еще одно препятствие – “корректное” (квазиклассически) склеивание заданных локально на торах Лиувилля канонических операторов, собственно квантование самих торов Лиувилля. При каждом параметре h оно выделяет набор торов Лиувилля, и глобальные канонические операторы $K_\Lambda: C_0^\infty(\Lambda) \rightarrow \Pi(T^*M)$, определяемые для таких торов, в явном виде задают асимптотические решения $\Psi = K_\Lambda[1]$, $E = H_M(\Lambda)$.

Пусть фиксирован некоторый набор базисных циклов Γ_i в $H_1(T^*M)$, $i = 1, 2, \dots, 2g$. Рассмотрим пленки $\Sigma \subset T^*M$, границы которых есть цикл на Λ и, возможно, некоторый набор циклов Γ_i :

$$\Sigma: \quad \Sigma \setminus \Lambda = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i, \quad I \subset \{1, 2, \dots, 2g\}. \quad (8)$$

Тор Λ является квантованным, если для любой пленки вида (8) выполнено

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\Sigma} \Omega = n + \frac{\text{Ind } \Sigma}{4}, \quad (9)$$

где индекс пленки $\text{Ind } \Sigma$ определен в [7]. Нам потребуется лишь свойство аддитивности индекса (т.е. если пленку рассмотреть как две пленки, склеенные по некоторой границе на Λ , то сумма их индексов равна индексу этой “неразрезанной” пленки) и то, что для замкнутых пленок он равен нулю [7], а также, что при непрерывной деформации пленки ее индекс не меняется (что очевидно, так как иначе эти условия будут невыполнимы, например, для соседних пленок).

Обоснованием получаемых далее квазиклассических результатов является утверждение о том, что сечение $\Psi = K_\Lambda[1]$ удовлетворяет с точностью $O(h^2)$ спектральному уравнению для $\tilde{H}_{M,n}$, с некоторыми фиксированными (выбором базисных циклов) параметрами из $H^1(T^*M, U(1))$ (см. [7; гл. IV, теорема 3.2]).

2.4. Асимптотический спектр. Вырождение. Используя правила квантования (9), вычислим асимптотический спектр (и его вырождение) оператора $h^2 \hat{H}_{M,n}$, $n \sim 1/h$.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$I_1 = h \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad I_2 = hl + C, \quad m, l \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

где постоянная C зависит лишь от ребра графа Руба и выбора циклов Γ_i (а с ними и фиксации параметров из $H^1(T^*M, U(1))$) оператора $\tilde{H}_{M,n}$. Тогда Лиувиллев тор $\Lambda = \Lambda(I_1, I_2)$ квантован, а сечение $\Psi = K_\Lambda[1]$ удовлетворяет спектральному уравнению для $\tilde{H}_{M,n}$ с точностью $O(h^2)$:

$$\tilde{H}_M \Psi = E \Psi + O(h^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. *Необходимость.* Если пленка Σ целиком лежит в подмножестве фазового пространства, в котором можно ввести первообразную α симплектической формы Ω : $\Omega = d\alpha$, то интеграл в левой части (9) по теореме Стокса сводится к интегралу вида

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Sigma} \alpha,$$

а правила квантования для связности, имеющей единичные параметры вихрей Ааронова–Бома, должны переходить в обычные правила Бора–Зоммерфельда, т.е. индекс в левой части равен индексу Маслова кривой $\gamma = \partial\Sigma \cap \Lambda$, поэтому можно считать не требующим доказательства следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Если пленка Σ целиком лежит в подмножестве фазового пространства, в котором можно ввести первообразную α симплектической формы Ω : $\Omega = d\alpha$, то (9) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \alpha = h \left(n + \frac{\text{Ind } \gamma}{4} \right) + C, \quad (11)$$

где

$$C = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Sigma \setminus \gamma} \alpha.$$

В качестве такого подмножества, в котором форма Ω точна, будем использовать описанное в п. 2 множество T^*M_b .

Приведем пленки на базисных циклах тора Λ , для которых выполнены условия леммы 4, а равенства (11) принимают вид (10).

Первая пленка – диск, уже упоминавшийся при вычислении переменной I_1 , либо его дополнение до $\bar{\Sigma} \simeq M$, если проекция этого диска на M содержит точку b . Так как $\gamma = l_0$ является единственной границей такой пленки, получаем $C = 0$, и левая часть (11) совпадает с определением переменной I_1 .

Второй пленкой является такая пленка, натянутая между базисными циклами Γ_i и циклом $\gamma = c$, что она лежит в T^*M_b . Для нее C уже, вообще говоря, отлично от нуля.

2. *Достаточность.* Если пленка Σ с границей на торе, равной γ , может быть гладко продеформирована из T^*M в T^*M_b (например, если изначально $\Sigma \subset T^*M_b$)

и условия (11) выполнены для всех базисных циклов на торе, то условия (11) выполнены и для цикла γ , а значит, по лемме 4 выполнено условие (9) для этой пленки.

Если же пленка Σ не может быть так продеформирована, то (если, конечно, базисные циклы Γ_i и границы Σ на самом торе Λ выбраны так, что их проекция на M не содержит точки b , а так же самопересечений, что является легко выполнимым требованием) она может быть дополнена до замкнутой пленки $\bar{\Sigma}$ присоединением другой пленки Σ_0 такой, что $\Sigma_0 \subset T^*M_b$. Условие (9) для пленок Σ, Σ_0 эквивалентны в силу (7) аддитивности индекса и равенству нулю полного индекса для $\bar{\Sigma}$. И снова, уже для пленки Σ_0 по лемме 4 это условие выполнено.

Вторая часть утверждения есть следствие теоремы 3.2 гл. IV работы [7].

СЛЕДСТВИЕ. Значение E приближает точку спектра оператора $\tilde{H}_{M,n}$, а с ним и исследуемого оператора $h^2 \hat{H}_{M,n}$,

$$\text{dist}(E, \text{Spec}(h^2 \hat{H}_{M,n})) \leq O(h^2).$$

Из (10), (5) с точностью до постоянной поправки $R = -h^2/8$ получаем уже известный точный ответ [3] для нижних ($E < E_{\text{cr}}$) уровней энергии.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Имеем

$$E_m = hw \left(m + \frac{1}{2} \right) - \frac{h^2}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)^2, \quad m + \frac{1}{2} \leq \frac{w}{h}. \quad (12)$$

Вырождение по второму квантовому номеру l может быть вычислено для каждого ребра графа Роба R отдельно, а потом сложено.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Квазиклассическое вырождение (т.е. количество описываемых каноническим оператором состояний) m -го уровня энергии равно

$$(2g - 2) \left(n - m - \frac{1}{2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подбирая для разных h свою связность (т.е. слагаемые C в (11)), можно всегда добиваться того, чтобы квантованные значения переменной I_2 не приходили на вершины графа Роба. Тогда по лемме 3 полное количество квантованных состояний равно

$$\frac{\Delta I_2}{2\pi h} = (2g - 2) \left(n - m - \frac{1}{2} \right),$$

что и требовалось доказать.

Как видно из точного вырождения [3]

$$\dim \text{Ker}(h^2 \hat{H}_{M,n} - E_m) = (2g - 2) \left(n - m - \frac{1}{2} \right),$$

состояния, описываемые каноническим оператором, также образуют полный набор.

Авторы благодарят В. А. Гейлера, С. Ю. Доброхотова и А. В. Смирнова за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. A. Taimanov, [arXiv:math.DS/0312430v2](#).
- [2] J. Bolte, F. Steiner, “Flux quantization and quantum mechanics on Riemann surfaces in an external magnetic field”, *J. Phys. A*, **24**:16 (1991), 3817–3823.
- [3] E. V. Ferapontov, A. P. Veselov, “Integrable Schrödinger operators with magnetic fields: factorization method on curved surfaces”, *J. Math. Phys.*, **42**:2 (2001), 590–607.
- [4] A. Comtet, “On the Landau levels on the hyperbolic plane”, *Ann. Phys.*, **173**:1 (1987), 185–209.
- [5] G. A. Hedlund, “Fuchsian groups and transitive horocycles”, *Duke Math. J.*, **2**:3 (1936), 530–542.
- [6] A. Comtet, P. J. Houston, “Effective action on the hyperbolic plane in a constant external field”, *J. Math. Phys.*, **26**:1 (1985), 185–191.
- [7] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [8] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [9] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [10] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*, Наука, М., 1997.

Й. Брюнинг, Р. В. Некрасов, А. И. Шафаревич

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Поступило

17.05.2006

Исправленный вариант

28.06.2006