Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Веселова, Ф. А. Сукочев, О. Е. Тихонов, Интер-
поляция положительных операторов, *Матем. заметки*,
2007, том 81, выпуск 1, 43–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:44:08

Интерполяция положительных операторов

Л. В. Веселова, Ф. А. Сукочев, О. Е. Тихонов

Изучаются вопросы интерполяции положительных линейных операторов в парах упорядоченных банаховых пространств. С этой точки зрения исследуются пары некоммутативных пространств L_1 , L_∞ , ассоциированных с весами и следами на алгебрах фон Неймана.

Библиография: 20 названий.

Введение. Цель настоящей статьи – изложить некоторые элементы теории интерполяции положительных линейных операторов для достаточно общих пар упорядоченных банаховых пространств. Специфика интерполяции положительных операторов проявляется уже в случае пар банаховых идеальных пространств (см., например, [1]). Естественно, переход к нерешеточно упорядоченным пространствам дополнительно потребовал введения и изучения ряда новых понятий. Так, в п. 1 для пары упорядоченных банаховых пространств мы определяем “пространство конического пересечения”, которое при интерполяции положительных операторов играет роль, аналогичную роли обычного пространства пересечения в классической теории интерполяции линейных операторов.

В первых трех разделах вводятся и изучаются основные понятия, связанные с интерполяцией положительных операторов, приводятся методы построения соответствующих интерполяционных пространств, а также простейшие примеры.

Более содержательные примеры разобраны в п. 4 и п. 5. Отметим, что рассматриваемые там упорядоченные банаховы пространства решетками, вообще говоря, не являются. В п. 4 показывается, что для пары “некоммутативных” пространств L_1 , L_∞ , ассоциированных с точным нормальным полуконечным весом на алгебре фон Неймана, естественным образом возникают пространства, интерполяционные для положительных операторов, которые не только не являются интерполяционными для всех ограниченных операторов, но даже не являются промежуточными. В п. 5 доказано, что в случае следа такого феномена не возникает: для пары пространств L_1 , L_∞ , ассоциированных с точным нормальным полуконечным следом на алгебре фон Неймана, пространства, интерполяционные для положительных операторов, интерполяционны и в обычном смысле. Таким образом, для следа ситуация

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00129 и № 05-01-00799, программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, грант № УР.04.01.011, и Australian Research Council.

оказывается аналогичной классическому случаю пары L_1, L_∞ банаховых функциональных пространств.

Введем теперь некоторые обозначения и приведем используемые в дальнейшем факты теории банаховых пространств с клиньями.

Далее до п. 4 все нормированные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Мы часто будем иметь дело с ситуацией, когда один и тот же элемент принадлежит различным рассматриваемым нормированным пространствам – будем употреблять обозначение $\|x\|_X$, указывающее, что используется норма x в пространстве X . Замыкание подмножества D в пространстве X будем обозначать $\overline{D}^X$.

Для двух топологических векторных пространств (далее – ТВП) X и Y запись $X \hookrightarrow Y$ будет обозначать, что X алгебраически и топологически вложено в Y . Для банаховых пространств (далее – БП) в этом случае найдется число $\alpha > 0$ такое, что $\|x\|_Y \leq \alpha \|x\|_X$ для всех $x \in X$; будем говорить, что X вложено в Y с константой α . В дальнейшем мы всюду будем иметь дело с ситуацией, когда из теоретико-множественного вложения БП X в БП Y следует $X \hookrightarrow Y$.

Обозначение $L(X, Y)$ будет использоваться для БП всех ограниченных линейных операторов из БП X в БП Y . Если линейный оператор T (возможно, заданный на более широком пространстве чем X) переводит X в Y ограниченно, то его норму как оператора из X в Y будем обозначать $\|T\|_{X \rightarrow Y}$.

Клином в векторном пространстве X называется подмножество $K \subset X$ такое, что $K + K \subset K$ и $\alpha K \subset K$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Если дополнительно $K \cap (-K) = \{0\}$, то такой клин называется *конусом*.

Клин K в нормированном пространстве X называется *порождающим*, если для любого $x \in X$ существуют $x', x'' \in K$ такие, что $x = x' - x''$. Если для некоторого α такие x', x'' всегда можно подобрать так, чтобы $\|x'\| + \|x''\| \leq \alpha \|x\|$, то клин K будем называть *α -порождающим*.

Следующая теорема будет неоднократно использоваться в конструкциях пп. 1–3. Доказательство ее является несложной модификацией известных выкладок, используемых обычно при доказательстве теоремы М. Крейна–Шмульяна о несплюсценности замкнутого порождающего клина (см., например, [2], [3; теорема 1.5], [4; теорема 2.1.2] или [5; теорема 2]).

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть X – БП с замкнутым клином K (норму в X обозначаем $\|\cdot\|_X$) и E – линейное подпространство в X , порожденное клином K . Формула

$$\|x\|_E = \inf\{\|x'\|_X + \|x''\|_X \mid x', x'' \in K, \quad x = x' - x''\}$$

задает норму на E . Для $x \in K$ имеем $\|x\|_E = \|x\|_X$. С введенной нормой E является БП, вложенным в X с константой 1; клин K замкнут в E и является α -порождающим для любого $\alpha > 1$.

Следующее утверждение об автоматической непрерывности положительных операторов в приведенной ниже общности принадлежит Г. Я. Лозановскому (см. [6; гл. 6, § 2], [3; теорема 2.1], [5; следствие 6]).

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть линейный оператор T действует из БП X с замкнутым порождающим клином K в БП Y с замкнутым конусом V и переводит K в V . Тогда T ограничен.

Под упорядоченным банаховым пространством (далее – УБП) всюду в дальнейшем будем понимать БП X с выделенным в нем замкнутым конусом положительных элементов X^+ . Линейный функционал f на УБП X называется *положительным*, если он переводит X^+ в $\mathbb{R}^+$. Как хорошо известно, если конус X^+ в УБП X является порождающим, то положительные функционалы на X образуют замкнутый конус в сопряженном пространстве, причем для любого ненулевого $x \in X^+$ найдется положительный функционал f такой, что $f(x) > 0$, а для любого $x \in X \setminus X^+$ – такой, что $f(x) < 0$.

1. Интерполяционные пары упорядоченных банаховых пространств и положительные операторы в них. Напомним сначала некоторые определения из теории интерполяции линейных операторов (см., например, [7]).

Банаховой парой $\bar{X} = (X_0, X_1)$ называется пара БП X_0, X_1 , алгебраически и топологически вложенных в некоторое отделимое ТВП W . С каждой банаховой парой $\bar{X}$ ассоциируются БП пересечения $X_0 \cap X_1$ и суммы $X_0 + X_1$ с нормами $\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}$ и $\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \mid x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, x = x_0 + x_1\}$. БП X называется *промежуточным* для банаховой пары $\bar{X}$, если $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0 + X_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Порядково интерполяционной парой будем называть банахову пару $\bar{X} = (X_0, X_1)$ УБП с порождающими замкнутыми конусами X_0^+ и X_1^+ , причем считаем, что в отделимом ТВП W , в которое вложены пространства пары, выделен замкнутый конус W^+ и $X_i^+ \subset W^+$ ($i = 0, 1$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ – порядково интерполяционная пара и пусть $\mathfrak{D}(\bar{X})$ обозначает линейную оболочку множества $X_0^+ \cap X_1^+$. Тогда $X_0^+ \cap X_1^+$ – замкнутый конус в пространстве $X_0 \cap X_1$. Следовательно, $\mathfrak{D}(\bar{X})$, снабженное нормой

$$\|x\|_{\mathfrak{D}(\bar{X})} = \inf\{\|x'\|_{X_0 \cap X_1} + \|x''\|_{X_0 \cap X_1} \mid x', x'' \in X_0^+ \cap X_1^+, x = x' - x''\},$$

является БП, вложенным в $X_0 \cap X_1$ с константой 1. Конус $X_0^+ \cap X_1^+$ в пространстве $\mathfrak{D}(\bar{X})$ является замкнутым и α -порождающим при любом $\alpha > 1$. Для $x \in X_0^+ \cap X_1^+$ имеем: $\|x\|_{\mathfrak{D}(\bar{X})} = \|x\|_{X_0 \cap X_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из замкнутости конусов X_i^+ в соответствующих пространствах X_i следует замкнутость конуса $X_0^+ \cap X_1^+$ в $X_0 \cap X_1$. Обратившись к теореме 0.1, убеждаемся в справедливости остальных утверждений предложения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. УБП $\mathfrak{D}(\bar{X})$ с конусом положительных элементов $\mathfrak{D}^+(\bar{X}) = X_0^+ \cap X_1^+$ назовем *пространством конического пересечения* порядково интерполяционной пары $\bar{X}$.

Следующий простейший пример показывает, что пространство конического пересечения может не быть промежуточным. Менее тривиальный и более содержательный пример будет рассмотрен далее в п. 4.

ПРИМЕР 1.1. Возьмем в качестве X_0 евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ с конусом $X_0^+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_2 \leq t_1\}$, а в качестве X_1 – то же пространство $\mathbb{R}^2$, но с конусом $X_1^+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq t_2\}$. (В качестве W можно взять $\mathbb{R}^2$ с конусом $W^+ = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \geq 0\}$.) Тогда $X_0^+ \cap X_1^+ = \{(t_1, t_2) \mid 0 \leq t_1 = t_2\}$ и $\mathfrak{D}(\bar{X}) = \{(t_1, t_2) \mid t_1 = t_2\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Для порядково интерполяционной пары $\bar{X}$ упорядоченным пространством суммы назовем пространство $X_1 + X_2$ с конусом положительных элементов $\mathfrak{S}^+(\bar{X}) = \overline{X_1^+ + X_2^+}^{X_1 + X_2}$. Это УБП с порождающим конусом будем обозначать $\mathfrak{S}(\bar{X})$.

Обратимся теперь к линейным операторам в парах УБП.

Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ и $\bar{Y} = (Y_0, Y_1)$ – две банаховых пары. Линейное отображение $T: X_0 + X_1 \rightarrow Y_0 + Y_1$ называется *линейным ограниченным оператором из $\bar{X}$ в $\bar{Y}$* , если T переводит ограничено X_i в Y_i , $i = 0, 1$. Множество всех таких операторов будем обозначать $L(\bar{X}, \bar{Y})$. Оно является БП относительно нормы $\|T\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})} = \max\{\|T\|_{X_i \rightarrow Y_i} \mid i = 0, 1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ и $\bar{Y} = (Y_0, Y_1)$ – две порядково интерполяционные пары и пусть T – линейное отображение из $X_0 + X_1$ в $Y_0 + Y_1$. Если T переводит X_i^+ в Y_i^+ , $i = 0, 1$, то T назовем *положительным оператором из пары $\bar{X}$ в пару $\bar{Y}$* . Если T представимо в виде разности положительных операторов из $\bar{X}$ в $\bar{Y}$, то T назовем *регулярным оператором из $\bar{X}$ в $\bar{Y}$* .

Множество всех положительных операторов из порядково интерполяционной пары $\bar{X}$ в порядково интерполяционную пару $\bar{Y}$ обозначим через $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$, множество всех регулярных операторов – через $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ – две порядково интерполяционные пары. Тогда $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ есть замкнутый конус в пространстве $L(\bar{X}, \bar{Y})$; множество $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ с конусом положительных элементов $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ и нормой

$$\|T\|_{L^r(\bar{X}, \bar{Y})} = \inf\{\|T'\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})} + \|T''\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})} \mid T', T'' \in L^+(\bar{X}, \bar{Y}); T = T' - T''\}$$

образует УБП, вложенное в $L(\bar{X}, \bar{Y})$ с константой 1, причем для $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$

$$\|T\|_{L^r(\bar{X}, \bar{Y})} = \|T\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся вначале, что $L^+(\bar{X}, \bar{Y}) \subset L(\bar{X}, \bar{Y})$. Пусть $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$. Так как T переводит X_0^+ в Y_0^+ , а X_0^+ порождает X_0 , то T переводит X_0 в Y_0 , т.е. $T|_{X_0}$ суть положительный линейный оператор из УБП X_0 с порождающим конусом положительных элементов в УБП Y_0 . Согласно теореме Лозановского (теорема 0.2) этот оператор ограничен. Точно также, $T|_{X_1}$ есть ограниченный оператор из X_1 в Y_1 . Таким образом, $T \in L(\bar{X}, \bar{Y})$.

Ясно, что $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ – клин. Пусть $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ и $-T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$. Возьмем $x_0 \in X_0^+$. Тогда $Tx_0 \in Y_0^+$ и $-Tx_0 \in Y_0^+$; следовательно, $Tx_0 = 0$. Отсюда заключаем, что $T = 0$ на X_0 . Аналогично, $T = 0$ на X_1 . Следовательно, $T = 0$ на $X_0 + X_1$. Таким образом, показано, что $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ – конус в пространстве $L(\bar{X}, \bar{Y})$. Проверим

его замкнутость. Пусть $T_n \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ и $T_n \rightarrow T$ в пространстве $L(\bar{X}, \bar{Y})$. Возьмем $x_0 \in X_0^+$; тогда $T_n x_0 \in Y_0^+$ и $T_n x_0 \rightarrow T x_0$ в Y_0 ; следовательно, $T x_0 \in Y_0^+$, т.е. T переводит X_0^+ в Y_0^+ . Точно также, T переводит X_1^+ в Y_1^+ . Значит, $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$.

Теперь остается применить теорему 0.1.

Затронем вопрос о совпадении множества регулярных операторов из пары в пару с множеством всех ограниченных операторов.

ПРИМЕР 1.2. Рассмотрим интерполяционную пару пространств последовательностей $\bar{\ell} = (\ell_1, \ell_\infty)$ со стандартными конусами неотрицательных последовательностей. Любой оператор $T \in L(\bar{\ell}, \bar{\ell})$ естественным образом представляется в виде бесконечной матрицы $(t_{ij})_{i,j=1}^\infty$. Построим операторы в матричном представлении: $T' = (t_{ij}^+)$, $T'' = (t_{ij}^-)$. Нетрудно убедиться, что $T', T'' \in L^+(\bar{\ell}, \bar{\ell})$, и тогда $T = T' - T''$ – разложение оператора T в виде разности двух положительных. Таким образом, любой оператор из $L(\bar{\ell}, \bar{\ell})$ регулярен.

Приведенный пример можно существенно обобщить, используя известные достаточные условия регулярности всех ограниченных операторов из одной банаховой решетки в другую (см., например, [8; теорема 2.2.16]), однако здесь мы этим заниматься не будем.

Следующий пример показывает, что регулярности всех ограниченных операторов из X_i в Y_i , $i = 0, 1$, недостаточно для регулярности всех операторов из $L(\bar{X}, \bar{Y})$.

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим порядково интерполяционную пару $\bar{X}$ из примера 1.1. Ясно, что в упорядоченном пространстве X_i любой линейный оператор регулярен ($i = 0, 1$), а $L(\bar{X}, \bar{X})$ есть не что иное как пространство всех линейных операторов в $\mathbb{R}^2$. Любой же оператор из $L^+(\bar{X}, \bar{X})$ переводит конусы X_i^+ в себя; следовательно, переводит в себя и луч $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 = t_2 \geq 0\}$. Понятно, что разности таких операторов не могут исчерпать все $L(\bar{X}, \bar{X})$.

ПРИМЕР 1.4. Возьмем $X_0 = X_1 = \mathbb{R}^2$, $X_0^+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2t_2 \leq t_1\}$, $X_1^+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2t_1 \leq t_2\}$. В этом случае $L^+(\bar{X}, \bar{X})$ состоит из неотрицательных скалярных кратных тождественного оператора в $\mathbb{R}^2$.

2. Интерполяционные тройки. Интерполяционные пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ и $\bar{Y} = (Y_0, Y_1)$ – две банаховы пары, X и Y – БП, $X \hookrightarrow X_0 + X_1$, $Y \hookrightarrow Y_0 + Y_1$. Тройку $(\bar{X}, X)$ будем называть *интерполяционной* относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$, если любой оператор $T \in L(\bar{X}, \bar{Y})$ переводит X в Y .

Если тройка $(\bar{X}, X)$ интерполяционна относительно самой себя, то X называется *интерполяционным пространством* для пары $\bar{X}$.

В отличие от [7] мы не требуем промежуточности пространств X и Y . Это сделано с целью подчеркнуть, что особенности, возникающие при интерполяции положительных операторов, носят принципиальный характер, а не просто связаны с некоторой разницей в определениях. Как будет показано ниже, при интерполяции положительных операторов естественно возникают непромежуточные “интерполяционные” пространства. В классической же теории интерполяции определение 2.1

добавляет к промежуточным интерполяционным пространствам разве лишь тривиальное пространство $\{0\}$ (см., например, [9; замечание 6.VIII]). Для интерполяционных троек пространство Y автоматически получается промежуточным для пары $\bar{Y}$, если отбросить тривиальный случай $X = \{0\}$. В этом нетрудно убедиться, используя те же соображения, что и для интерполяционных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ и $\bar{Y} = (Y_0, Y_1)$ – две порядково интерполяционные пары, X и Y – БП, $X \hookrightarrow X_0 + X_1$, $Y \hookrightarrow Y_0 + Y_1$. Тройку $(\bar{X}, X)$ назовем *интерполяционной для положительных операторов* относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$, если любой оператор $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ переводит X в Y .

Как следует непосредственно из определений, если $\bar{X}, \bar{Y}$ – порядково интерполяционные пары и тройка $(\bar{X}, X)$ интерполяционна в обычном смысле относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$, то она интерполяционна для положительных операторов относительно той же тройки $(\bar{Y}, Y)$.

Как и в случае обычных интерполяционных троек (см. [7; гл. I, § 4]), из теоремы о замкнутом графике следует, что в предыдущем определении любой оператор T из $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ будет ограничен как оператор из X в Y . Ясно, что в рассматриваемой ситуации каждый регулярный оператор из пары $\bar{X}$ в пару $\bar{Y}$ также будет ограничен как оператор из X в Y . Более того, справедлив следующий аналог леммы I.4.3 [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Если тройка $(\bar{X}, X)$ интерполяционна для положительных операторов относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$, то существует константа $c \geq 0$ такая, что

$$\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq c \|T\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})} \quad (2.1)$$

для всех $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому оператору $T \in L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ поставим в соответствие его сужение на пространство X : $\Phi(T) = T|_X$. Таким образом, определяется линейное отображение Φ БП $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ в БП $L(X, Y)$. Покажем, что это отображение замкнуто. Пусть последовательность $(T_n) \subset L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ сходится в $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ к нулевому оператору и пусть $(\Phi(T_n))$ сходится в $L(X, Y)$ к некоторому ограниченному оператору S . Нужно показать, что $S = 0$. Так как $T_n \rightarrow 0$ в $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$, то $T_n \rightarrow 0$ в $L(\bar{X}, \bar{Y})$ и $T_n x \rightarrow 0$ в $Y_0 + Y_1$ для любого $x \in X_0 + X_1$, в частности, для $x \in X$. Отсюда заключаем, что действительно $S = 0$, т.е. доказано, что отображение Φ замкнуто. Из теоремы о замкнутом графике следует ограниченность Φ как оператора из $L^r(\bar{X}, \bar{Y})$ в $L(X, Y)$, т.е. существование такой константы $c \geq 0$, что $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq c \|T\|_{L^r(\bar{X}, \bar{Y})}$ для всех $T \in L^r(\bar{X}, \bar{Y})$. Вспоминая, что $\|T\|_{L^r(\bar{X}, \bar{Y})} = \|T\|_{L(\bar{X}, \bar{Y})}$ для $T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})$, получаем нужное нам неравенство (2.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Константу c в неравенстве (2.1) назовем *константой интерполяционности для положительных операторов* тройки $(\bar{X}, X)$ относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$. Если эту константу можно взять равной 1, то тройку $(\bar{X}, X)$ назовем *нормально интерполяционной для положительных операторов* относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Будем говорить, что порядково интерполяционная пара $\overline{X}$ ($X_i \hookrightarrow W$, $X_i^+ \subset W^+$) и УБП X с порождающим замкнутым конусом положительных элементов X^+ образуют *порядковую тройку* $(\overline{X}, X)$, если $X \hookrightarrow X_0 + X_1$ и $X^+ \subset W^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Будем говорить, что порядковая тройка $(\overline{X}, X)$ *положительно интерполяционна* относительно порядковой тройки $(\overline{Y}, Y)$, если любой оператор $T \in L^+(\overline{X}, \overline{Y})$ переводит X^+ в Y^+ .

Если порядковая тройка $(\overline{X}, X)$ положительно интерполяционна относительно порядковой тройки $(\overline{Y}, Y)$, то она, очевидно, интерполяционна для положительных операторов относительно той же самой тройки. Поэтому соотношение (2.1) корректно определяет *константу положительной интерполяционности*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Будем говорить, что порядковая тройка $(\overline{X}, X)$ *нормально положительно интерполяционна* относительно порядковой тройки $(\overline{Y}, Y)$, если она положительно интерполяционна относительно $(\overline{Y}, Y)$ и соответствующую константу положительной интерполяционности можно взять равной 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Если в определениях 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 тройка $(\overline{X}, X)$ совпадает с $(\overline{Y}, Y)$, то X будем называть *интерполяционным для положительных операторов*, или *нормально интерполяционным для положительных операторов*, или, соответственно, *(нормально) положительно интерполяционным пространством* для порядково интерполяционной пары $\overline{X}$.

Изложим ниже в теореме 2.1 один метод построения положительно интерполяционных порядковых троек. Пусть X – БП с клином M . Замкнем этот клин по норме и по получившемуся клину K построим БП E в соответствии с конструкцией теоремы 0.1. Полученное таким образом БП с замкнутым порождающим клином будем обозначать $\mathcal{E}(X, M)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\overline{X} = (X_0, X_1)$ и $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$ – две порядково интерполяционные пары, пространства X_i вложены в отдельное ТВП W с замкнутым конусом W^+ , пространства Y_i – в отдельное ТВП U с замкнутым конусом U^+ , $X_i^+ \subset W^+$, $Y_i^+ \subset U^+$. Пусть X и Y – такие БП, что тройка $(\overline{X}, X)$ интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, Y)$. Пусть K и V – конуса в пространствах X и Y такие, что $K \subset W^+$, $V \subset U^+$ и любой оператор $T \in L^+(\overline{X}, \overline{Y})$ переводит K в V . Тогда порядковая тройка $(\overline{X}, \mathcal{E}(X, K))$ положительно интерполяционна относительно порядковой тройки $(\overline{Y}, \mathcal{E}(Y, V))$. Более того, сохраняется константа интерполяционности, т.е., если $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq c \|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})}$ для всех $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$, то $\|T\|_{\mathcal{E}(X, K) \rightarrow \mathcal{E}(Y, V)} \leq c \|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})}$ для всех $T \in L^+(\overline{X}, \overline{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия $K \subset W^+$, $V \subset U^+$ гарантируют, что рассматриваемые замкнутые порождающие клинья в пространствах $\mathcal{E}(X, K)$ и $\mathcal{E}(Y, V)$ на самом деле являются конусами; будем обозначать их $\mathcal{E}^+(X, K)$ и $\mathcal{E}^+(Y, V)$. Так как операторы из $L^+(\overline{X}, \overline{Y})$ переводят K в V и действуют из X в Y непрерывно, то они переводят $\mathcal{E}^+(X, K)$ в $\mathcal{E}^+(Y, V)$. Отсюда следует нужная положительная интерполяционность.

Изучим поведение константы интерполяционности. Пусть для всех $T \in L(\overline{X}, \overline{Y})$ выполняется неравенство $\|T\|_{X \rightarrow Y} \leq c\|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})}$. Возьмем $T \in L^+(\overline{X}, \overline{Y})$ и $x \in \mathcal{E}(X, K)$, $\|x\|_{\mathcal{E}(X, K)} \leq 1$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем $x', x'' \in \mathcal{E}^+(X, K)$ так, что $x = x' - x''$ и $\|x'\|_X + \|x''\|_X \leq 1 + \varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{\mathcal{E}(Y, V)} &= \|Tx' - Tx''\|_{\mathcal{E}(Y, V)} \leq \|Tx'\|_{\mathcal{E}(Y, V)} + \|Tx''\|_{\mathcal{E}(Y, V)} \\ &= \|Tx'\|_Y + \|Tx''\|_Y \leq \|T\|_{X \rightarrow Y}(\|x'\|_X + \|x''\|_X) \\ &\leq c\|T\|_{L(\overline{X}, \overline{Y})}(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

что влечет нужное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Для произвольных порядково интерполяционных пар $\overline{X}, \overline{Y}$ тройка $(\overline{X}, \mathfrak{D}(\overline{X}))$ нормально положительно интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, \mathfrak{D}(\overline{Y}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно следует из конструкции пространства конического пересечения, предыдущей теоремы и того факта, что тройка $(\overline{X}, X_0 \cap X_1)$ нормально интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, Y_0 \cap Y_1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ – две порядково интерполяционные пары, тройка $(\overline{X}, X)$ интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, Y)$, причем пространство X промежуточное для пары $\overline{X}$. Тогда порядковая тройка $(\overline{X}, \mathcal{E}(X, X_0^+ \cap X_1^+))$ положительно интерполяционна относительно порядковой тройки $(\overline{Y}, \mathcal{E}(Y, Y_0^+ \cap Y_1^+))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что если в условиях следствия $X \neq \{0\}$, то $Y_0 \cap Y_1 \hookrightarrow Y$ (см. начало этого раздела), а значит, $Y_0^+ \cap Y_1^+ \subset Y$, поэтому применима теорема 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Если промежуточное БП X интерполяционно для порядково интерполяционной пары $\overline{X}$, то упорядоченное БП $\mathcal{E}(X, X_0^+ \cap X_1^+)$ положительно интерполяционно для этой пары.*

Нетрудно также проверить, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Для произвольных порядково интерполяционных пар $\overline{X}, \overline{Y}$ порядковая тройка $(\overline{X}, \mathfrak{S}(\overline{X}))$ нормально положительно интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, \mathfrak{S}(\overline{Y}))$.*

В заключение этого раздела приведем еще один метод построения троек, интерполяционных для положительных операторов, идейно близкий к конструкции теоремы 2.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть $\overline{X}, \overline{Y}$ – две порядково интерполяционные пары и тройка $(\overline{X}, X)$ интерполяционна относительно тройки $(\overline{Y}, Y)$. Пусть X' и Y' – такие линейные операторы в пространствах X и Y , что любой положительный оператор из $\overline{X}$ в $\overline{Y}$ переводит X' в Y' . Тогда тройка $(\overline{X}, \overline{X}^{X'})$ интерполяционна для положительных операторов относительно тройки $(\overline{Y}, \overline{Y}^{Y'})$.*

3. Орбиты и правильные тройки. Для порядково интерполяционных пар $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ и элемента $x \in X_0 + X_1$ будем рассматривать $\text{Orb}_x^+(\bar{X}, \bar{Y}) = \{Tx \mid T \in L^+(\bar{X}, \bar{Y})\}$ и $\text{Orb}_x^r(\bar{X}, \bar{Y}) = \{Tx \mid T \in L^r(\bar{X}, \bar{Y})\}$ – орбиты элемента x . Заметим, что $\text{Orb}_x^r(\bar{X}, \bar{Y})$ является векторным пространством, а $\text{Orb}_x^+(\bar{X}, \bar{Y})$ – клином.

ЛЕММА 3.1. а) Для любого $a \in (X_0 + X_1) \setminus \{0\}$ имеет место $\mathfrak{D}(\bar{Y}) \subset \text{Orb}_a^r(\bar{X}, \bar{Y})$.
 б) Если $a \in \mathfrak{S}^+(\bar{X}) \setminus \{0\}$, то $Y_0^+ \cap Y_1^+ \subset \text{Orb}_a^+(\bar{X}, \bar{Y}) \subset \mathfrak{S}^+(\bar{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Возьмем произвольный элемент $y \in Y_0^+ \cap Y_1^+$ и такой положительный функционал f на $\mathfrak{S}(\bar{X})$, что $f(a) \neq 0$. Так как оператор T , построенный по правилу $Tx = f(x)y$ ($x \in X_0 + X_1$), принадлежит $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$, то $f(a)y \in \text{Orb}_a^+(\bar{X}, \bar{Y})$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{D}(\bar{Y}) \subset \text{Orb}_a^r(\bar{X}, \bar{Y})$.

б) Доказательство включения $Y_0^+ \cap Y_1^+ \subset \text{Orb}_a^+(\bar{X}, \bar{Y})$ проводится аналогично пункту а). Второе включение следует из предложения 2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если тройка $(\bar{X}, X)$ интерполяционна для положительных операторов относительно тройки $(\bar{Y}, Y)$ и $X \neq \{0\}$, то $\mathfrak{D}(\bar{Y}) \hookrightarrow Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из пункта а) предыдущей леммы следует, что $\mathfrak{D}(\bar{Y}) \subset Y$, и поэтому $\mathfrak{D}(\bar{Y}) \hookrightarrow Y$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если для порядково интерполяционной пары $\bar{X}$ ненулевое БП X интерполяционно для положительных операторов, то $\mathfrak{D}(\bar{X}) \hookrightarrow X$.

Затронем вопрос о возможном совпадении для порядково интерполяционной пары $\bar{X}$ совокупности всех обычных интерполяционных пространств с совокупностью пространств, интерполяционных для положительных операторов. Конечно, регулярности любого оператора из $L(\bar{X}, \bar{X})$ достаточно для такого совпадения. Однако, как показывает следующий пример, это условие отнюдь не является необходимым.

ПРИМЕР 3.1. Пусть Z – некоторое УБП с порождающим конусом положительных элементов. Образует порядково интерполяционную пару $\bar{Z} = (Z, Z)$. Очевидно, что в такой паре пространство $L(\bar{Z}, \bar{Z})$ есть просто $L(Z, Z)$, а $L^r(\bar{Z}, \bar{Z})$ – пространство всех регулярных операторов в Z . Из следствия 3.1 – единственное, кроме нулевого, пространство, интерполяционное для положительных операторов, есть само Z с точностью до эквивалентной нормы. То же самое можно сказать и об обычных интерполяционных пространствах. В то же время известно много примеров УБП, в которых не каждый ограниченный линейный оператор представляется в виде разности двух положительных. В частности, таковым является $L_2(0, 1)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть порядковая тройка $(\bar{X}, X)$ положительно интерполяционна относительно порядковой тройки $(\bar{Y}, Y)$ и $Y_0^+ \cap Y_1^+ \neq \{0\}$. Тогда $X^+ \subset \mathfrak{S}^+(\bar{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что пространства Y_i вложены в упорядоченное ТВП U , причем конусы Y_0^+ , Y_1^+ , Y^+ содержатся в U^+ .

Проведем доказательство леммы от противного. Пусть найдется $a \in X^+ \setminus \mathfrak{S}^+(\bar{X})$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $y \in Y_0^+ \cap Y_1^+$ и такой положительный функционал f на $\mathfrak{S}(\bar{X})$, что $f(a) < 0$. Оператор T , построенный по правилу $Tx = f(x)y$ ($x \in X_0 + X_1$), принадлежит $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$, поэтому $Ta \in Y^+ \subset U^+$. С другой стороны, $Ta = f(a)y \in -(Y_0^+ \cap Y_1^+) \subset -U^+$. Так как $f(a)y \neq 0$, мы пришли к противоречию с тем, что по нашим соглашениям $U^+ \cap (-U^+) = \{0\}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть порядковая тройка $(\bar{X}, X)$ положительно интерполяционна относительно порядковой тройки $(\bar{Y}, Y)$, причем $X \neq \{0\}$. Тогда $Y_0^+ \cap Y_1^+ \subset Y^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что $Y_0^+ \cap Y_1^+ \neq \{0\}$. Тогда согласно лемме 3.2 $X^+ \subset \mathfrak{S}^+(\bar{X})$. Возьмем $a \in X^+ \setminus \{0\}$. Используя пункт б) леммы 3.1 и положительную интерполяционность, получаем $Y_0^+ \cap Y_1^+ \subset \text{Orb}_a^+(\bar{X}, \bar{Y}) \subset Y^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть порядково интерполяционная пара $\bar{X}$ такова, что $X_0^+ \cap X_1^+ \neq \{0\}$, и пусть X – ненулевое положительно интерполяционное пространство для этой пары. Тогда $X_0^+ \cap X_1^+ \subset X^+ \subset \mathfrak{S}^+(\bar{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение предложения немедленно следует из лемм 3.2 и 3.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $X_0^+ \cap X_1^+ \neq \{0\}$ в предыдущем предложении отбросить нельзя. Действительно, в примере 1.4 в качестве конуса W^+ , содержащего конусы X_i^+ , можно взять конус $\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid t_2 \geq 0, t_2 \geq -t_1\}$. Тогда, в соответствии с нашими определениями, пространство $X = \mathbb{R}^2$ с конусом положительных элементов $X^+ = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq -t_1 \leq t_2\}$ будет положительно интерполяционным для пары $\bar{X}$, в то время как $X^+ \not\subset \mathfrak{S}^+(\bar{X})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\bar{X} = (X_0, X_1)$ – порядково интерполяционная пара, X – БП. Будем говорить, что тройка $(\bar{X}, X)$ правильная, если $\mathfrak{D}(\bar{X}) \hookrightarrow X \hookrightarrow X_0 + X_1$. Порядковую тройку $(\bar{X}, X)$ будем называть правильной, если $X_0^+ \cap X_1^+ \subset X^+ \subset \mathfrak{S}^+(\bar{X})$.

Предыдущие рассуждения указывают на то, что во многих вопросах интерполяции положительных операторов можно ограничиваться правильными тройками и правильными порядковыми тройками, вполне аналогично тому, как при интерполяции всех ограниченных операторов часто ограничиваются промежуточными пространствами.

В заключение этого раздела изложим один метод построения положительно интерполяционных троек, являющийся модификацией простейшей конструкции хорошо известного метода орбит (например, [10], [11]).

Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ – некоторая порядково интерполяционная пара и a – ненулевой элемент из $\mathfrak{S}^+(\bar{A})$. Для произвольной порядково интерполяционной пары $\bar{X} = (X_0, X_1)$ строится промежуточное для $\bar{X}$ банахово пространство $\text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{X}) = \{Ta \mid T \in L(\bar{A}, \bar{X})\}$ с нормой $\|x\|_{\text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{X})} = \inf\{\|T\|_{L(\bar{A}, \bar{X})} \mid x = Ta\}$. Пусть $\bar{Y}$ – еще одна порядково интерполяционная пара. Учитывая, что тройка $(\bar{X}, \text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{X}))$ нормально интерполяционна относительно тройки $(\bar{Y}, \text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{Y}))$ [10], что любой оператор из $L^+(\bar{X}, \bar{Y})$ переводит, как легко видеть, конус $\text{Orb}_a^+(\bar{A}, \bar{X})$ в конус $\text{Orb}_a^+(\bar{A}, \bar{Y})$ и учитывая пункт б) леммы 3.1, применяем теорему 2.1 и получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Правильная порядковая тройка $(\bar{X}, \mathcal{E}(\text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{X}), \text{Orb}_a^+(\bar{A}, \bar{X})))$ нормально положительно интерполяционна относительно правильной порядковой тройки $(\bar{Y}, \mathcal{E}(\text{Orb}_a(\bar{A}, \bar{Y}), \text{Orb}_a^+(\bar{A}, \bar{Y})))$.

4. Порядково интерполяционная пара (L_1, L_∞) , ассоциированная с весом на алгебре фон Неймана. Приведем некоторые сведения из теории весов на алгебрах фон Неймана (см., например, [12], [13]).

Алгеброй фон Неймана называется $*$ -подалгебра $*$ -алгебры $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , совпадающая со своим бикоммутантом. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ через $\mathcal{M}^h$ и $\mathcal{M}^+$ обозначаем ее подмножества самосопряженных операторов и положительных операторов соответственно.

Весом на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется отображение $\varphi: \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ со свойствами: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ ($x, y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$); при этом считаем $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Для веса φ на $\mathcal{M}$ через $\mathfrak{m}_\varphi^+$ обозначается множество $\{x \in \mathcal{M}^+ \mid \varphi(x) < +\infty\}$, через $\mathfrak{m}_\varphi^h$ и $\mathfrak{m}_\varphi$ – его вещественная и комплексная линейные оболочки. Вес φ однозначно продолжается до линейного функционала на $\mathfrak{m}_\varphi$, обозначаемого обычно той же буквой φ .

Вес φ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется

- *точным*, если $\varphi(x) \neq 0$ для любого $x \in \mathcal{M}^+ \setminus \{0\}$;
- *нормальным*, если $\sup \varphi(x_i) = \varphi(\sup x_i)$ для любой монотонно возрастающей ограниченной сети $\{x_i\} \subset \mathcal{M}^+$;
- *полуконечным*, если $\mathfrak{m}_\varphi$ плотно в $\mathcal{M}$ в слабой операторной топологии;
- *следом*, если $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ для любого $x \in \mathcal{M}$.

Алгебра фон Неймана называется *полуконечной*, если на ней существует точный нормальный полуконечный след.

Изложим далее некоторые элементы теории А. Н. Шерстнева интегрируемых билинейных форм (см., например, обзор [14]).

Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в H . С ним ассоциируется плотный в H *линеал веса*

$$D_\varphi \equiv \{\xi \in H \mid \exists \lambda \geq 0 \forall x \in \mathcal{M}^+ ((x\xi, \xi) \leq \lambda \varphi(x))\}.$$

Формула

$$\|x\|_\varphi = \inf \{\varphi(x') + \varphi(x'') \mid x', x'' \in \mathfrak{m}_\varphi^+; x = x' - x''\}$$

задает норму на $\mathfrak{m}_\varphi^h$. Эрмитова билинейная форма (БФ) a , заданная на D_φ , (т.е. отображение a из $D_\varphi \times D_\varphi$ в $\mathbb{C}$, линейное по первому и сопряженно линейное по второму аргументу и такое, что $a(\xi, \eta) = \overline{a(\eta, \xi)}$ ($\xi, \eta \in D_\varphi$)), называется *интегрируемой* (относительно φ), если существует *определяющая* для a последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{m}_\varphi^h$, т.е. такая, что

- (a) $a(\xi, \eta) = \lim_n (x_n \xi, \eta)$, $\xi, \eta \in D_\varphi$;
- (b) $\|x_n - x_m\|_\varphi \rightarrow 0$, $n, m \rightarrow \infty$.

Принципиальным результатом описываемой теории является тот факт, что формула $\|a\|_\varphi \equiv \lim_n \|x_n\|_\varphi$, где a – интегрируемая БФ, а (x_n) – какая-нибудь ее определяющая последовательность, корректно задает норму на вещественном векторном пространстве всех интегрируемых БФ. Построенное таким образом пространство будем обозначать $L_1^h(\varphi)$. Естественное отождествление операторов x из $\mathcal{M}$ с БФ $(x\xi, \eta)$, заданными на плотном линеале D_φ , позволяет рассматривать $L_1^h(\varphi)$ как пополнение $\mathfrak{m}_\varphi^h$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$. Конус $L_1^+(\varphi)$ положительных интегрируемых БФ

является порождающим и замкнутым в $L_1^h(\varphi)$. Отметим еще, что линейный функционал φ на $\mathfrak{m}_\varphi^h$ продолжается по непрерывности на $L_1^h(\varphi)$ и таким образом для любой БФ $a \in L_1^h(\varphi)$ естественно определяется значение $\varphi(a)$.

Пусть W обозначает далее упорядоченное ТВП всех эрмитовых БФ на D_φ с топологией поточечной сходимости и замкнутым конусом W^+ положительных БФ. Ясно, что УБП $L_1^h(\varphi)$ вложено в W . УБП $\mathcal{M}^h$ также можно считать вложенным в W : отождествляем, как и несколько выше, операторы из $\mathcal{M}^h$ с эрмитовыми БФ на D_φ и рассматриваем получившееся изометрически изоморфное $\mathcal{M}^h$ пространство БФ; это пространство будем обозначать $L_\infty^h(\varphi)$. Таким образом, мы имеем порядково интерполяционную пару $\bar{L}(\varphi) \equiv (L_1^h(\varphi), L_\infty^h(\varphi))$. Нетрудно понять, что для этой пары пространство конического пересечения $\mathfrak{D}(\bar{L}(\varphi))$ как векторное пространство можно отождествить с $\mathfrak{m}_\varphi^h$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с некоторым выделенным базисом $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$. Любой оператор $x \in \mathcal{B}(H)$ представляется в этом базисе в виде бесконечной матрицы $(x_{i,j})$. Канонический след Tr на $\mathcal{B}(H)$ является точным, нормальным и полуконечным. Пусть (α_n) – некоторая последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{1/2} < \infty$. Для $x = (x_{i,j}) \in \mathcal{B}(H)^+$ положим $\varphi(x) = x_{11} + \alpha_1 x_{22} + x_{33} + \alpha_2 x_{44} + \dots$, т.е. $\varphi(x) = \text{Tr}(h^{1/2} x h^{1/2})$, где $\mathcal{B}(H)^+ \ni h = \text{diag}(1, \alpha_1, 1, \alpha_2, \dots)$. Определенное таким образом отображение $\varphi: \mathcal{B}(H)^+ \rightarrow [0, +\infty]$ является точным нормальным полуконечным весом на $\mathcal{B}(H)$. Рассмотрим ограниченные эрмитовы операторы $s = (s_{i,j})$ и $t = (t_{i,j})$, где $s_{2k-1,2k} = s_{2k,2k-1} = 1$ и $t_{2k-1,2k} = t_{2k,2k-1} = k^{-1/2}$ для $k = 1, 2, \dots$, а все остальные элементы матриц $(s_{i,j})$ и $(t_{i,j})$ равны нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Билинейные формы $(s\xi, \eta)$ и $(t\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in D_\varphi$) принадлежат $L_1^h(\varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p_n – ортогональный проектор на подпространство, порожденное первыми $2n$ базисными векторами, $s_n = p_n s p_n$, $t_n = p_n t p_n$. Ясно, что $s_n, t_n \in \mathfrak{m}_\varphi^h$ для любого n . Воспользовавшись соотношением $\|x\|_\varphi = \text{Tr}(|h^{1/2} x h^{1/2}|)$ ($x \in \mathfrak{m}_\varphi^h$) [15; теорема 14] и сходимостью ряда $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{1/2}$, нетрудно проверить, что последовательности (s_n) и (t_n) фундаментальны по норме $\|\cdot\|_\varphi$. Учитывая, что $s_n \rightarrow s$ в слабой операторной топологии, а $t_n \rightarrow t$ даже в топологии нормы, заключаем, что последовательности (s_n) и (t_n) являются определяющими для БФ $(s\xi, \eta)$ и $(t\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in D_\varphi$) соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Оператор t не принадлежит $\mathfrak{m}_\varphi^h$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, в $\mathfrak{m}_\varphi^+$ найдутся операторы $v = (v_{i,j})$ и $w = (w_{i,j})$ такие, что $t = v - w$. Пусть $v_{2k-1,2k-1} = \lambda_k$, $v_{2k,2k} = \mu_k$, $v_{2k-1,2k} = \delta_k$. Тогда $v_{2k,2k-1} = \bar{\delta}_k$, $w_{2k-1,2k-1} = \lambda_k$, $w_{2k,2k} = \mu_k$, $w_{2k-1,2k} = \delta_k - k^{-1/2}$, $w_{2k,2k-1} = \bar{\delta}_k - k^{-1/2}$, $k = 1, 2, \dots$. Положительность операторов v и w влечет, что $\lambda_k, \mu_k \geq 0$, $\lambda_k \mu_k \geq |\delta_k|^2$, $\lambda_k \mu_k \geq |\delta_k - k^{-1/2}|^2$, откуда $\lambda_k \mu_k \geq 1/4k$. Ограниченность оператора v влечет ограниченность последовательности (μ_k) ; принадлежность v множеству $\mathfrak{m}_\varphi^+$ – сходимостью ряда $\sum_{k=1}^\infty (\lambda_k + \alpha_k \mu_k)$ и, тем более, ряда $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k$. Однако, как нетрудно видеть, совокупность условий: $\lambda_k, \mu_k \geq 0$, $\lambda_k \mu_k \geq 1/4k$, последовательность (μ_k)

ограничена, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ противоречива. Это завершает доказательство утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Оператор s не принадлежит замыканию $\mathfrak{m}_{\varphi}^h$ в операторной норме.*

Доказательство этого утверждения принципиально не сильно отличается от доказательства утверждения 4.2 и приводить его здесь мы не будем.

Как следует из утверждений 4.1–4.3 и их доказательств, $B\Phi(t\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in D_{\varphi}$) принадлежит

$$\overline{\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)})}^{L_1^h(\varphi) \cap L_{\infty}^h(\varphi)},$$

но не принадлежит $\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)})$, а $B\Phi(s\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in D_{\varphi}$) принадлежит $L_1^h(\varphi) \cap L_{\infty}^h(\varphi)$, но не принадлежит

$$\overline{\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)})}^{L_1^h(\varphi) \cap L_{\infty}^h(\varphi)},$$

т.е. оба включения

$$\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)}) \subset \overline{\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)})}^{L_1^h(\varphi) \cap L_{\infty}^h(\varphi)} \subset L_1^h(\varphi) \cap L_{\infty}^h(\varphi)$$

являются строгими. Таким образом, для рассматриваемой в примере пары $\overline{L(\varphi)}$ пространство конического пересечения $\mathfrak{D}(\overline{L(\varphi)})$, будучи положительно интерполяционным (следствие 2.1), не является промежуточным. Более того, его замыкание в пространстве пересечения, будучи интерполяционным для положительных операторов (предложение 2.3), также не является промежуточным.

5. Пара (L_1, L_{∞}) , ассоциированная со следом. Всюду в этом разделе τ – точный нормальный полуконечный след на полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве H . Приведем ниже некоторые понятия теории симметричных пространств операторов, придерживаясь, в основном, обозначений из [16], [17].

Напомним, что оператор x в H (не обязательно всюду определенный) называется *присоединенным* к алгебре $\mathcal{M}$, если $u^*xu = x$ для любого унитарного оператора u из ее коммутанта. Замкнутый плотно определенный оператор x , присоединенный к $\mathcal{M}$, называется τ -измеримым, если $\tau(1 - e^{|x|}(\lambda)) < \infty$ для некоторого $\lambda \geq 0$, где $e^{|x|}(\lambda)$ – проекторы из спектрального разложения $|x| = \int_0^{+\infty} \lambda de^{|x|}(\lambda)$ абсолютной величины $|x| \equiv (x^*x)^{1/2}$ оператора x . Для таких операторов формулой $\mu_s(x) = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \tau(1 - e^{|x|}(\lambda)) \leq s\}$, $s \in [0, +\infty)$, определяется *невозрастающая перестановка*. Для двух τ -измеримых операторов x, y их сумма определяется как замыкание алгебраической суммы; расстояние между ними задается формулой $d(x, y) = \inf\{s \geq 0 \mid \mu_s(x - y) \leq s\}$. Таким образом, совокупность $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех τ -измеримых операторов становится комплексным ТВП. Через $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ будем обозначать вещественное ТВП всех самосопряженных τ -измеримых операторов, через $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ – замкнутый конус положительных τ -измеримых операторов. Для $x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ будем писать $x \prec y$, когда $\int_0^t \mu_s(x) ds \leq \int_0^t \mu_s(y) ds$ для любого $t \geq 0$.

Комплексное БП $L_1(\tau)$ можно определить, задав на линейале

$$\left\{ x \in \widetilde{\mathcal{M}} \mid \int_0^{+\infty} \mu_s(x) ds < \infty \right\}$$

норму $\|x\|_{L_1(\tau)} = \int_0^{+\infty} \mu_s(x) ds$. Тогда $L_1(\tau) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ и поэтому $L_1(\tau)$ и $\mathcal{M}$ образуют банахову пару комплексных пространств. Их подмножества само-сопряженных операторов $L_1^h(\tau)$ и $\mathcal{M}^h$ (обозначаемое далее $L_\infty^h(\tau)$) с порядками в них, индуцированными конусом $\widetilde{\mathcal{M}}^+$, образуют порядково интерполяционную пару в смысле определения 1.1. Эту пару будем в дальнейшем обозначать $\overline{L(\tau)}$. Отметим, что хотя приведенная здесь конструкция пространства $L_1^h(\tau)$ внешне сильно отличается от конструкции пространства $L_1^h(\varphi)$ в п. 4, на самом деле эти две конструкции естественным образом согласованы.

ЛЕММА 5.1 (ср. [16; следствие 2.6], [18; теорема 5]). Пусть $X (\hookrightarrow L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau))$ – БП, удовлетворяющее условию

$$x \in X, \quad y \in L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau), \quad y \ll x \implies y \in X.$$

Тогда X интерполяционно для пары $\overline{L(\tau)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения можно провести, заметив, что для $x \in L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$ для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} \inf \{ \|x_1\|_{L_1(\tau)} + t\|x_\infty\|_{\mathcal{M}} \mid x = x_1 + x_\infty, x_1 \in L_1(\tau), x_\infty \in \mathcal{M} \} \\ = \inf \{ \|x_1\|_{L_1^h(\tau)} + t\|x_\infty\|_{L_\infty^h(\tau)} \mid x = x_1 + x_\infty, x_1 \in L_1^h(\tau), x_\infty \in L_\infty^h(\tau) \} \end{aligned}$$

и поэтому из предложения 2.5 [17] вытекает, что

$$\int_{[0,t]} \mu_s(x) ds = \inf \{ \|x_1\|_{L_1^h(\tau)} + t\|x_\infty\|_{L_\infty^h(\tau)} \mid x = x_1 + x_\infty, x_1 \in L_1^h(\tau), x_\infty \in L_\infty^h(\tau) \},$$

(см. также [18; теорема 4]), а затем почти дословно повторить выкладки из [16] и [17], касающиеся доказательства соответствующей части следствия 2.6 [16].

Всюду далее в этом разделе интерполяционность пространств рассматривается по отношению к изучаемой нами паре $\overline{L(\tau)}$.

ЛЕММА 5.2. Пусть X – пространство, интерполяционное для положительных операторов. Для $x \in \widetilde{\mathcal{M}}^h$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $x \in X$;
- (ii) $x^+, x^- \in X$;
- (iii) $|x| \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Пусть $x \in X$ и p^+ – спектральный проектор оператора x , соответствующий промежутку $[0, +\infty)$, так что $x^+ = p^+ x p^+$. Оператор $z \mapsto p^+ z p^+$ ($z \in L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$) принадлежит $L^+(\overline{L(\tau)}, \overline{L(\tau)})$. Следовательно, $x^+ \in X$. Аналогично, $x^- \in X$.

Так как $|x| = x^+ + x^-$, то (ii) $\implies$ (iii).

Импlications (iii) $\implies$ (ii) $\implies$ (i) доказываются аналогично.

ЛЕММА 5.3. а) Любой положительный оператор из $L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$ представляется в виде суммы положительных операторов из $L_1^h(\tau)$ и из $L_\infty^h(\tau)$.

б) Для $T \in L(\overline{L(\tau)}, \overline{L(\tau)})$ эквивалентны следующие условия:

(i) $T \in L^+(\overline{L(\tau)}, \overline{L(\tau)})$;

(ii) T переводит положительные операторы из $L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$ в положительные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $x = x_1 + x_\infty$, где $x_1 \in L_1^h(\tau)$, $x_\infty \in L_\infty^h(\tau)$, и $x \geq 0$. Согласно версии для τ -измеримых операторов (см. [19]) неравенства треугольника из [20; теорема 2.2] найдутся такие частично изометрические операторы $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$, что $x = x_1 + x_\infty \leq v_1^*|x_1|v_1 + v_2^*|x_\infty|v_2$, откуда $x \ll v_1^*|x_1|v_1 + v_2^*|x_\infty|v_2$. Согласно теореме 2.2 [16] существует оператор $T \in L((L_1(\tau), \mathcal{M}), (L_1(\tau), \mathcal{M}))$, переводящий положительные операторы из $L_1(\tau) + \mathcal{M}$ в положительные, такой, что $x = T(v_1^*|x_1|v_1 + v_2^*|x_\infty|v_2)$. Теперь нетрудно понять, что требуемое разложение дается равенством $x = T(v_1^*|x_1|v_1) + T(v_2^*|x_\infty|v_2)$. Заметим, что приведенное доказательство по существу повторяет часть доказательства предложения 4.10 [17].

б) Справедливость импликация (i) $\implies$ (ii) следует из пункта а), справедливость обратной импликации – почти очевидна.

ТЕОРЕМА 5.1. Для пары $\overline{L(\tau)}$ совокупность пространств, интерполяционных для положительных операторов, совпадает с совокупностью интерполяционных в обычном смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – пространство, интерполяционное для положительных операторов, $x \in X$, $y \in L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$ и $y \ll x$. Тогда $|x| \in X$ по лемме 5.2, $|y| \in L_1^h(\tau) + L_\infty^h(\tau)$ и $|y| \ll |x|$. С учетом пункта б) леммы 5.3 из теоремы 2.2 [16] следует, что существует оператор $T \in L^+(\overline{L(\tau)}, \overline{L(\tau)})$ такой, что $T|x| = |y|$. Следовательно, $|y| \in X$, но тогда и $y \in X$. Для завершения доказательства остается применить лемму 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Для пары $\overline{L(\tau)}$ пусть X – пространство, интерполяционное для положительных операторов. Тогда X , упорядоченное конусом $X^+ = \{x \in X \mid x \geq 0\}$, является положительно интерполяционным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.2 следует, что конус X^+ порождает X . Замкнутость X^+ в X следует из замкнутости $\widetilde{\mathcal{M}}^+$ в $\widetilde{\mathcal{M}}^h$ и вложенности X в $\widetilde{\mathcal{M}}^h$. (Впрочем, оба эти факта следуют и из теоремы 5.1 и результатов теории симметричных пространств операторов.) Из интерполяционности X для положительных операторов и леммы 5.3 следует, что любой оператор из $L^+(\overline{L(\tau)}, \overline{L(\tau)})$ переводит X^+ в X^+ . Таким образом, X положительно интерполяционно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Я. Лозановский, “Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона”, *Функцион. анализ и его прилож.*, 6:4 (1972), 89–90.
- [2] Б. З. Вулих, *Введение в теорию конусов в нормированных пространствах*, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1977.
- [3] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*, Наука, М., 1985.

- [4] L. Asimow, A. J. Ellis, *Convexity Theory and its Applications in Functional Analysis*, Academic Press, London, 1980.
- [5] Y. A. Abramovich, C. D. Aliprantis, “Positive operators”, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, **1**, eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, Elsevier, Amsterdam, 2001, 85–122.
- [6] Б. З. Вулих, *Специальные вопросы геометрии конусов в нормированных пространствах*, Калининский гос. ун-т, Калинин, 1978.
- [7] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [8] А. В. Бухвалов, В. Б. Коротков, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, Б. М. Макаров, *Векторные решетки и интегральные операторы*, Наука. Сиб. отд., Новосибирск, 1992.
- [9] N. Aronszajn, E. Gagliardo, “Interpolation spaces and interpolation methods”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **68** (1965), 51–117.
- [10] Ю. А. Брудный, С. Г. Крейн, Е. М. Семенов, “Интерполяция линейных операторов”, *Матем. анализ*, т. 24, Итоги науки и техн., ВИНТИ, М., 1986, 3–163.
- [11] V. I. Ovchinnikov, “The method of orbits in interpolation theory”, *Math. Rep.*, **1**:2 (1984), 349–515.
- [12] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*. I, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1979; *2nd edition*, Encyclopaedia of Math. Sci., **124**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [13] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*. II, Encyclopaedia of Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [14] Н. В. Трунов, А. Н. Шерстнев, “Введение в теорию некоммутативного интегрирования”, *Совр. пробл. математики. Новейшие достижения*, т. 27, Итоги науки и техн., ВИНТИ, М., 1985, 167–190.
- [15] А. Н. Шерстнев, “Об одном некоммутативном аналоге пространства L_1 ”, *Матем. анализ*, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1978, 112–123.
- [16] P. G. Dodds, T. K. Dodds, B. de Pagter, “Fully symmetric operator spaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **15**:6 (1992), 942–972.
- [17] P. G. Dodds, T. K. Dodds, B. de Pagter, “Noncommutative Köthe duality”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **339**:2 (1993), 717–750.
- [18] В. И. Овчинников, “Симметричные пространства измеримых операторов”, *Докл. АН СССР*, **191**:4 (1970), 769–771.
- [19] В. И. Чилин, “Неравенство треугольника в алгебрах локально измеримых операторов”, *Матем. анализ и алгебра*, Тр. ТашГУ, Ташкент, 1986, 77–81.
- [20] C. A. Akemann, J. Anderson, G. K. Pedersen, “Triangle inequalities in operator algebras”, *Linear and Multilinear Algebra*, **11**:2 (1982), 167–178.

Л. В. Веселова

Казанский государственный технологический университет

Поступило

30.01.2006

Ф. А. Сукочев

Flinders University of South Australia

E-mail: sukochev@infoeng.flinders.edu.au

О. Е. Тихонов

НИИ математики и механики

Казанского государственного университета

E-mail: Oleg.Tikhonov@ksu.ru