Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Об инъективности локального преобразования Помпейю на сфере, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 59–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:20:03

Об инъективности локального преобразования Помпейю на сфере

В. В. Волчков

Получено описание ядра локального преобразования Помпейю для некоторых семейств распределений на сфере.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Пусть X – риманово двухточечно-однородное пространство [1; гл. 3], G – группа изометрий X , $\mathcal{F} = \{\mu_i\}_{i=1}^s$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в X . При фиксированном $g \in G$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(X)$ по правилу $\langle g\mu_i, f \rangle = \langle \mu_i, f \circ g^{-1} \rangle$, $f \in C^\infty(X)$. Для любого открытого множества $\mathcal{U} \subset X$ такого, что каждое из множеств $\Lambda(\mathcal{U}, \mu_i) = \{g \in G: \text{supp } g\mu_i \subset \mathcal{U}\}$, $i = 1, \dots, s$, непусто, преобразование Помпейю $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ отображает $C^\infty(\mathcal{U})$ в $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_1)) \times \dots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_s))$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}} f = (f_1, \dots, f_s),$$

где $f_i(g) = \langle g\mu_i, f \rangle$, $g \in \Lambda(\mathcal{U}, \mu_i)$, $i = 1, \dots, s$.

Для заданных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ возникает следующая

ПРОБЛЕМА [2]. *Выяснить, является ли $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ инъективным, и если не является, то описать его ядро.*

Для различных X , $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. [2]–[5]). Наиболее полные результаты в этом направлении получены для некомпактных двухточечно-однородных пространств. В частности, до настоящего времени практически не рассматривались вопросы инъективности локального преобразования Помпейю (т.е., когда $\mathcal{U} \neq X$) для компактных двухточечно-однородных пространств (см. [5; гл. 2, §§ 3, 4], [6], [7]). В данной работе получено решение сформулированной выше проблемы для сферы $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, в следующих случаях:

- 1) $\mathcal{U} = B_{a,b} = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{S}^n: \cos b < \xi_{n+1} < \cos a\}$, $0 \leq a < b \leq \pi$, $\mathcal{F} = \{\chi_r\}$ – индикатор шара $B_r = \{\xi \in \mathbb{S}^n: \xi_{n+1} > \cos r\}$, $0 < r < (b-a)/2$;
- 2) $\mathcal{U} = B_R$, $0 < R \leq \pi$, $\mathcal{F} = \{\chi_r, \sigma_r\}$, $0 < r < R$, где σ_r – поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на сфере $S_r = \{\xi \in \mathbb{S}^n: \xi_{n+1} = \cos r\}$.

Отметим, что полные условия инъективности преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, \mathcal{U}}$ на сфере для $\mathcal{U} = B_R$, $\mathcal{F} = \{\chi_{r_i}\}_{i=1}^s$, $s \in \{1, 2\}$, найдены автором ранее (см. [5; гл. 2, §§ 3, 4], [6]). По поводу других аспектов проблемы Помпейю на сфере см. [3]–[7] и библиографию к этим работам.

2. Формулировки основных результатов. Пусть $d\xi$ – нормированная поверхностная мера на $\mathbb{S}^n$, $L_{\text{loc}}(B_R)$ – множество локально интегрируемых по мере $d\xi$ функций на B_R . Обозначим через $\varphi_1 \times \varphi_2$ свертку распределений φ_1, φ_2 на $\mathbb{S}^n$ (см. [1; введение, § 3 и гл. 2, § 5]). Для $0 < r < R \leq \pi$ положим $V_r(B_R) = \{f \in L_{\text{loc}}(B_R) : f \times \chi_r = 0 \text{ в } B_{R-r}\}$, $U_r(B_R) = \{f \in L_{\text{loc}}(B_R) : f \times \sigma_r = 0 \text{ в } B_{R-r}\}$, $W_r(B_R) = V_r(B_R) \cap U_r(B_R)$. Аналогично, для $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < r < (b-a)/2$ определим класс $V_r(B_{a,b})$ равенством $V_r(B_{a,b}) = \{f \in L_{\text{loc}}(B_{a,b}) : f \times \chi_r = 0 \text{ в } B_{a+r, b-r}\}$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$, $\sigma = \xi'/|\xi'| \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\theta_1, \dots, \theta_n$ – сферические координаты точки ξ , $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_k \leq \pi$, $k \neq 1$ и $\xi_1 = \sin \theta_n \cdots \sin \theta_1$, $\xi_2 = \sin \theta_n \cdots \sin \theta_2 \cos \theta_1$, $\dots$, $\xi_{n+1} = \cos \theta_n$. Всякой функции $f(\xi) = f(\sigma \sin \theta_n, \cos \theta_n) \in L_{\text{loc}}(B_{a,b})$ соответствует ряд Фурье

$$f(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{a_k} f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \theta_n \in (a, b),$$

где $\{Y_l^{(k)}(\sigma)\}$, $1 \leq l \leq a_k$, – фиксированный ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}_k$ сферических гармоник степени k на $\mathbb{S}^{n-1}$,

$$f_{k,l}(\theta_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n) \overline{Y_l^{(k)}(\zeta)} d\zeta,$$

$d\zeta$ – поверхностная мера на $\mathbb{S}^{n-1}$.

Далее мы используем стандартные обозначения P_ν^μ, Q_ν^μ для функций Лежандра первого и второго рода на $(-1, 1)$ (см. [8; гл. 3, § 3.4]). Для $\theta \in (0, \pi)$ положим

$$\begin{aligned} \psi_{\nu,k}(\theta) &= (\sin \theta)^{1-n/2} P_{\nu+n/2-1}^{-n/2-k+1}(\cos \theta), \quad \nu \in \mathbb{C}, \\ \Psi_{\nu,k}(\theta) &= \begin{cases} (\sin \theta)^{1-n/2} Q_{\nu+n/2-1}^{n/2+k-1}(\cos \theta), & \text{если } n \text{ четно, } 2-n-k-\nu \notin \mathbb{N}, \\ (\sin \theta)^{1-n/2} P_{\nu+n/2-1}^{n/2+k-1}(\cos \theta), & \text{если } n \text{ нечетно, } \nu \in \mathbb{C}. \end{cases} \end{aligned}$$

При фиксированных $r \in (0, \pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $\psi_{\nu,k}(r)$ имеет бесконечно много нулей ν . Все они являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $(1-n)/2$ (см. [5; гл. 2, § 3, доказательство леммы 3.1]). Кроме того, для любого $\nu \in [-k-n+1, k]$ $\psi_{\nu,k}(r) > 0$. Обозначим $N_k(r) = \{\nu > k : \psi_{\nu,k}(r) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^\infty(B_{a,b})$. Тогда для того чтобы $f \in V_r(B_{a,b})$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$f_{k,l}(\theta_n) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \alpha_{\nu,k,l} \psi_{\nu,k}(\theta_n) + \beta_{\nu,k,l} \Psi_{\nu,k}(\theta_n), \quad (1)$$

где $|\alpha_{\nu,k,l}| + |\beta_{\nu,k,l}| = O(\nu^{-c})$ при $\nu \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном $c > 0$.

Аналогичное описание имеет место и для класса $V_r(B_R)$. При этом все коэффициенты $\beta_{\nu,k,l}$ в равенстве (1) равны нулю (см. [5; гл. 2, § 3], [6]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in L_{\text{loc}}(B_R)$. Тогда

- 1) если $R > 2r$ и $f \in W_r(B_R)$, то $f = 0$ в B_R ;
- 2) если $R \leq 2r$, то для того, чтобы $f \in W_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{B_{2r-R}} f(\xi) d\xi = 0 \quad (2)$$

и для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ и почти всех $\theta \in (2r - R, R)$ выполнялись равенства

$$f_{k,l}(\theta) = \sum_{m=0}^{k-2} c_{m,k,l}(\cos \theta)^m (\sin \theta)^{2-n-k}, \quad (3)$$

в которых при $k = 0, 1$ сумма считается равной нулю.

Отметим, что классы $V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$, $U_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$ совпадают с ядром преобразования $\mathcal{P}_{\mathcal{F}, B_R}$ для семейства $\mathcal{F} = \{\chi_r\}$ и $\mathcal{F} = \{\sigma_r\}$ соответственно. Таким образом, в теоремах 1, 2 содержится решение сформулированной проблемы в указанных выше случаях.

Одним из следствий теоремы 1 является следующая теорема об устранимой особенности для радиальных (т.е. зависящих только от θ_n) функций класса $V_r(B_R)$.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть $R \geq 2r$ и $f(\xi) = f_0(\theta_n) \in V_r(B_R) \cap C^\infty(B_{0,R})$. Тогда существует функция $g \in C^\infty(B_R)$, совпадающая с f на множестве $B_{0,R}$.

2) Если $R < 2r$, то существует радиальная неограниченная в окрестности точки $o = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ функция $f \in V_r(B_R) \cap C^\infty(B_{0,R})$.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 2. Пусть $s \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$. Будем писать $f \in C^s(\{o\})$, если $f \in C^s(B_\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon \in (0, \pi)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $R = 2r$. Тогда

- 1) если $f \in W_r(B_R) \cap C^\infty(\{o\})$, то $f = 0$ в B_R ;
- 2) для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ существует ненулевая функция $f \in W_r(B_R) \cap C^s(\{o\})$.

Обозначим через d внутреннюю метрику на сфере $\mathbb{S}^n$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $R = 2r$. Тогда

- 1) если $f \in W_r(B_R)$, f непрерывна в окрестности точки o и $f(\xi) = o((d(o, \xi))^\alpha)$ при $\xi \rightarrow o$ и любом фиксированном $\alpha > 0$, то $f = 0$ в B_R ;
- 2) для любого $\alpha > 0$ существует ненулевая функция $f \in W_r(B_R) \cap C(B_R)$ такая, что $f(\xi) = o((d(o, \xi))^\alpha)$ при $\xi \rightarrow o$.

Еще одним следствием теоремы 2 является следующая теорема единственности для функций класса $W_r(B_R)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $R = 2r$, $f \in W_r(B_R)$ и E – множество положительной меры на $(0, R)$ такое, что $f(\xi) = 0$ при $d(o, \xi) \in E$. Тогда $f = 0$ в B_R .

Относительно других теорем единственности для функций с нулевыми шаровыми средними см. [5; гл. 2], [6], [7] и имеющиеся там ссылки. Отметим также, что аналоги сформулированных выше результатов для некомпактных двухточечно-однородных пространств получены в [9], [10].

3. Вспомогательные утверждения. Пусть L – оператор Лапласа–Бельтрами на S^n . При $k \in \mathbb{Z}_+$ положим $L_k = L + k(n + k - 1) \text{Id}$, где Id – тождественный оператор. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дифференциальный оператор d_m , заданный на пространстве $C^1(0, \pi)$ следующим образом:

$$(d_m u)(\theta) = \sin^m \theta \frac{d}{d\theta}(u(\theta)(\sin \theta)^{-m}), \quad u \in C^1(0, \pi).$$

Простые вычисления показывают, что если $f \in C^2(B_R)$ имеет вид $f(\xi) = u(\theta_n) \times Y_l^{(k)}(\sigma)$, то

$$(L_k f)(\xi) = (d_{1-k-n} d_k u)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (L_{k-1} f)(\xi) = (d_{k-1} d_{2-k-n} u)(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma). \quad (4)$$

Нам потребуются следующие равенства:

$$d_k \psi_{\nu, k} = (k - \nu)(k + \nu + n - 1) \psi_{\nu, k+1}, \quad d_k (\Psi_{\nu, k}) = \Psi_{\nu, k+1}, \quad (5)$$

$$d_{1-k-n} \psi_{\nu, k+1} = \psi_{\nu, k}, \quad d_{1-k-n} (\Psi_{\nu, k+1}) = (k - \nu)(k + \nu + n - 1) \Psi_{\nu, k}, \quad (6)$$

$$(L + \nu(\nu + n - 1) \text{Id})(\psi_{\nu, k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)) = (L + \nu(\nu + n - 1) \text{Id})(\Psi_{\nu, k}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma)) = 0. \quad (7)$$

Для доказательства (5), (6) достаточно воспользоваться определением $\psi_{\nu, k}$, $\Psi_{\nu, k}$ и рекуррентными соотношениями для функций Лежандра (см. [8; гл. 3, п. 3.8, формулы (15), (17), (19)]). Равенство (7) вытекает из (5), (6) и (4).

ЛЕММА 1. Пусть $k \in N_1(r)$, $Y \in \mathcal{H}_{k+1} \setminus \{0\}$. Тогда функция

$$U(\xi) = (\sin \theta_n)^{1-k-n} \int_0^{\theta_n} (\sin t)^{n+k-1} \Psi_{k, k}(t) dt \cdot Y(\sigma)$$

не принадлежит классу $V_r(B_{a, b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u(\theta_n) = U(\xi)/Y(\sigma)$. Из (4), (5), (7) находим

$$u(\theta_n) = \alpha \psi_{k, k+1}(\theta_n) + \beta \Psi_{k, k+1}(\theta_n) - \frac{(\partial/\partial \nu)(\Psi_{\nu, k+1}(\theta_n))|_{\nu=k}}{2k + n - 1}, \quad (8)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Поскольку $\psi_{k, 1}(r) = 0$, из (7), (8) и теоремы о среднем для собственных функций оператора L (см. [5; гл. 2, § 3, лемма 3.6]) имеем

$$(U \times \chi_r)(\xi) = \frac{2^{n/2-1} \Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}(1-n-2k)} (\sin r)^{n-1} \frac{d}{d\nu}(\psi_{\nu, 1}(r)) \Big|_{\nu=k} \Psi_{k, k+1}(\theta_n) Y(\sigma),$$

где Γ – гамма-функция. Учитывая, что нули $\psi_{\nu, 1}(r)$ простые (см. [5; гл. 2, § 3, лемма 3.1]), отсюда и из (6), [8; гл. 3, п. 3.4, формулы (20), (21)] получаем утверждение леммы 1.

Пусть f – непрерывная радиальная функция в шаре B_R (см. п. 2). Далее символом f_0 будем обозначать функцию, заданную на $[0, R)$ и удовлетворяющую равенству $f(\xi) = f_0(\theta_n)$, $\xi \in B_R$.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < r < R \leq \pi$, $f(\xi) = f_0(\theta_n) \in C^\infty(B_R)$. Тогда при $k \in \mathbb{Z}_+$, $Y \in \mathcal{H}_{k+1}$ и $\xi \in B_{R-r}$ имеет место равенство

$$((d_k d_{k-1} \cdots d_0 f_0)(\theta_n) Y(\sigma) \times \chi_r)(\xi) = (d_k d_{k-1} \cdots d_0 (f \times \chi_r)_0)(\theta_n) Y(\sigma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\xi \in B_{R-r}$. Пусть $0 < \varepsilon < R - r - d(o, \xi)$. Рассмотрим функцию ω_ε , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\omega_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$;
- 2) $\omega_\varepsilon = 1$ на $[0, R - \varepsilon]$ и $\omega_\varepsilon = 0$ на $[R - \varepsilon/2, \pi]$.

Для $\theta \in [0, R]$ положим $h(\theta) = f_0(\theta)\omega_\varepsilon(\theta)$. Повторяя рассуждения из [5; гл. 2, § 3, лемма 3.11], получаем

$$h(\theta) = \sum_{\nu \in N_0(R - \frac{\varepsilon}{3})} c_\nu \psi_{\nu,0}(\theta), \quad c_\nu \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq \theta \leq R - \frac{\varepsilon}{3},$$

где $c_\nu = O(\nu^{-c})$, $\nu \rightarrow +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$. Отсюда и из [5; гл. 2, § 3, лемма 3.6] следует утверждение леммы 2 (см. (5), (7)).

ЛЕММА 3. Пусть $k \geq 2$, $Y \in \mathcal{H}_k$, $m \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, $\varepsilon \in (0, \pi)$. Тогда при любом $r \in (\varepsilon, \pi)$ функция

$$f(\xi) = \begin{cases} (\cos \theta_n)^m (\sin \theta_n)^{2-n-k} Y(\sigma), & \xi \in B_{\varepsilon, \pi}, \\ 0, & \xi \in \overline{B}_\varepsilon, \end{cases}$$

принадлежит классу $V_r(B_{\min(\pi, 2r-\varepsilon)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию w_ε , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $w_\varepsilon \in C^\infty[0, \pi]$;
- 2) $w_\varepsilon = 0$ на $[0, \varepsilon/2]$ и $w_\varepsilon = 1$ на $[\varepsilon, \pi]$.

Для $\xi \in B_\pi$ положим $H(\xi) = \Psi_{\nu,0}(\theta_n)w_\varepsilon(\theta_n)$. Поскольку $(L + \nu(\nu + n - 1)\text{Id})(H) = 0$ в $B_{\varepsilon, \pi}$ (см. (7)), то

$$(L + \nu(\nu + n - 1)\text{Id})(H) \times \chi_r \equiv c \quad \text{в} \quad B_{\min(\pi-r, r-\varepsilon)}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(L + \nu(\nu + n - 1)\text{Id})\left(H \times \chi_r + \frac{c}{\nu(1 - n - \nu)}\right) = 0. \quad (9)$$

Учитывая, что $H \times \chi_r \in C^\infty(B_{\pi-r})$, из (9), (7), (4) имеем

$$(H \times \chi_r)(\xi) = \psi_{\nu,0}(\theta_n) + \frac{c}{\nu(\nu + n - 1)}, \quad \xi \in B_{\min(\pi-r, r-\varepsilon)}. \quad (10)$$

Используя ортогональность гармоник разных степеней на $\mathbb{S}^{n-1}$, из (10), (5) и леммы 2 находим

$$\int_{B_r(\eta) \setminus \overline{B}_\varepsilon} \Psi_{\nu,k}(\theta_n) Y(\sigma) d\xi = 0, \quad \nu \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \quad \eta \in B_{\min(\pi-r, r-\varepsilon)},$$

где $B_r(\eta) = \{\xi \in \mathbb{S}^n : d(\xi, \eta) < r\}$. Отсюда и из [8; гл. 3, п. 4, формулы (11), (12)] получаем утверждение леммы 3.

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4. Пусть $k \geq 2$, $Y \in \mathcal{H}_k$, $m \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, $f(\xi) = (\cos \theta_n)^m \times (\sin \theta_n)^{2-n-k} Y(\sigma)$, $\xi \in B_{0,\pi}$. Тогда при любых $\varepsilon \in (0, \pi)$, $r \in (\varepsilon, \pi)$ имеет место равенство

$$(f \times \sigma_r)(\xi) = 0, \quad \xi \in B_{\min(\pi-r, r-\varepsilon)}.$$

ЛЕММА 5. Пусть $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in U_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$ имело место равенство

$$f_{k,l}(\theta_n) = \sum_{\nu \in N_0(r)} c_{\nu,k,l} \psi_{\nu,k}(\theta_n), \quad 0 \leq \theta_n < R, \quad (11)$$

где $c_{\nu,k,l} = O(\nu^{-c})$, $\nu \rightarrow +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$.

Подобное утверждение для класса $V_r(B_R)$ получено автором ранее (см. [5; гл. 2, §§ 3, 4], [6]). Доказательство леммы 5 проводится аналогично.

Обозначим через $[x]$ целую часть числа $x \in \mathbb{R}^1$.

ЛЕММА 6. Пусть $0 \leq a < b \leq \pi$, $u \in C^{[(n+4)/2]}(\cos b, \cos a)$ и удовлетворяет уравнениям

$$\int_{-1}^1 u \left(x \sin \theta \sin \frac{a+b}{2} + \cos \theta \cos \frac{a+b}{2} \right) (1-x^2)^{(n-3)/2} dx = 0, \quad 0 < \theta < \frac{b-a}{2}, \quad (12)$$

$$\int_{-1}^1 u \left(x \sin \theta \sin \frac{a+b}{2} + \cos \theta \cos \frac{a+b}{2} \right) x (1-x^2)^{(n-3)/2} dx = 0, \quad 0 < \theta < \frac{b-a}{2}. \quad (13)$$

Тогда $u = 0$ на $(\cos b, \cos a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $n \geq 3$. Пусть $c = (a+b)/2$. Рассмотрим функцию $v(x, \theta) = u(x \sin \theta \sin c + \cos \theta \cos c)$, $x \in [-1, 1]$, $\theta \in (0, (b-a)/2)$. Из определения v имеем

$$\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} = (x \cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} c) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (14)$$

Положим

$$v_k(\theta) = \frac{2^{n-4}(2k+n-2)k! \Gamma^2((n-2)/2)}{\pi \Gamma(n+k-2)} \int_{-1}^1 v(x, \theta) C_k^{(n-2)/2}(x) (1-x^2)^{(n-3)/2} dx,$$

где $C_k^{(n-2)/2}$ – многочлен Гегенбауэра степени k с индексом $(n-2)/2$ (см. [8; гл. 3, п. 3.15]). Тогда

$$v(x, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\theta) C_k^{(n-2)/2}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (15)$$

причем ряд (15) сходится равномерно на $[-1, 1]$ (см. [11; гл. 7, § 5, теорема 7.6]). Учитывая, что

$$\frac{d}{dx} C_k^{(n-2)/2}(x) = (n-2) C_{k-1}^{n/2}(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

из (14), (15) находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} v'_k(\theta) \sin \theta C_k^{(n-2)/2}(x) - (n-2)v_{k+1}(\theta)(x \cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} c) C_k^{n/2}(x) \equiv 0. \quad (16)$$

Используя формулы

$$2xC_k^\lambda(x) = \frac{(k+1)C_{k+1}^\lambda(x) + (k+2\lambda-1)C_{k-1}^\lambda(x)}{k+\lambda},$$

$$(k-1+\lambda)C_k^{\lambda-1}(x) = (\lambda-1)(C_k^\lambda(x) - C_{k-2}^\lambda(x))$$

(см. [12; гл. 10, п. 10.9]), представим (16) в виде ряда Фурье–Якоби по многочленам $C_k^{n/2}$. В силу равенства нулю коэффициентов этого ряда

$$v_{k+1}(\theta) \operatorname{ctg} c = \frac{v'_{k+2}(\theta) + (n+k) \operatorname{ctg} \theta v_{k+2}(\theta)}{(n+2k+2)} - \frac{v'_k(\theta) - k \operatorname{ctg} \theta v_k(\theta)}{n+2k-2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (17)$$

Поскольку $v_k(\theta) = O(1)$, $\theta \rightarrow 0$, из (12), (13) и (17) заключаем, что $v_k(\theta) = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда следует утверждение леммы 6 при $n \geq 3$. Пусть теперь $n = 2$. Используя разложение v по многочленам Чебышева и повторяя приведенные выше рассуждения, получаем требуемое утверждение и при $n = 2$. Таким образом, лемма 6 доказана.

Положим $\varphi_{\nu,k}(\theta) = (\sin \theta)^{1-n/2} Q_{\nu+n/2-1}^{-n/2-k+1}(\cos \theta)$, $k - \nu \notin \mathbb{N}$.

ЛЕММА 7. Пусть $0 \leq a < b \leq \pi$, $f(\xi) = f_0(\theta_n) \in C^s(B_{a,b})$, где $s \geq [(3n+12)/2]$. Тогда, для того чтобы $f \in V_r(B_{a,b})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_0(\theta) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \alpha_\nu \psi_{\nu,0}(\theta) + \beta_\nu \varphi_{\nu,0}(\theta), \quad a < \theta < b,$$

где $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| = O(\nu^{(3n+3)/2-s})$ при $\nu \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из теоремы о среднем для собственных функций оператора L и известных асимптотических разложений функций Лежандра (см. [5; гл. 2, § 3, лемма 3.6], [8; гл. 3, п. 3.4, формулы (17), (18)], а также [8; гл. 3, п. 3.9.1, формулы (1), (2)]). Докажем необходимость. Пусть $c = (a+b)/2$. Для $\xi \in B_{(b-a)/2}$ положим $h(\xi) = f(\varkappa_c \xi)$ (здесь и далее символом $\varkappa_t$ обозначается вращение $\mathbb{R}^{n+1}$ в плоскости (x_n, x_{n+1}) на угол t). Из условия и [5; гл. 2, § 3, лемма 3.7] получаем, что функция

$$H(\theta_n) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n) d\zeta$$

принадлежит $V_r^s(B_{(b-a)/2})$. Из описания класса $V_r^s(B_{(b-a)/2})$ (см. [6], [5; гл. 2, § 3, теорема 3.2]) имеем

$$H(\theta_n) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \lambda_\nu \psi_{\nu,0}(\theta_n), \quad 0 \leq \theta_n < \frac{b-a}{2}, \quad (18)$$

где $\lambda_\nu = O(\nu^{n+2-s})$ при $\nu \rightarrow +\infty$. Аналогично,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n) \zeta_n d\zeta = \sum_{\nu \in N_1(r)} \mu_\nu \psi_{\nu,1}(\theta_n), \quad 0 \leq \theta_n < \frac{b-a}{2}, \quad (19)$$

где $\mu_\nu = O(\nu^{n+3-s})$ при $\nu \rightarrow +\infty$. Определим числа α_ν и β_ν равенствами

$$\alpha_\nu = \frac{\gamma_n (\sin c)^{n/2} \Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu)} \left(\lambda_\nu Q_{\nu+n/2-1}^{-n/2}(\cos c) - \frac{\mu_\nu}{\nu(1-n-\nu)} Q_{\nu+n/2-1}^{-n/2+1}(\cos c) \right),$$

$$\beta_\nu = \frac{\gamma_n (\sin c)^{n/2} \Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu)} \left(-\lambda_\nu P_{\nu+n/2-1}^{-n/2}(\cos c) + \frac{\mu_\nu}{\nu(1-n-\nu)} P_{\nu+n/2-1}^{-n/2+1}(\cos c) \right),$$

где

$$\gamma_n = 2^{n/2-1} \frac{\Gamma(n/2)}{\pi \Gamma(n-1) \omega_{n-2}}, \quad \omega_{n-2} = \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Тогда $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| = O(\nu^{(3n+3)/2-s})$, $\nu \rightarrow +\infty$ (см. [8; гл. 3, п. 3.9.1, формулы (1), (2)]). Поскольку

$$(\sin t)^{n-1} (\psi_{\nu,0}(t) \varphi_{\nu,1}(t) - \varphi_{\nu,0}(t) \psi_{\nu,1}(t)) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+n)} \quad (20)$$

(см. [8; гл. 3, п. 3.4, формула (25)], а также [8; гл. 3, п. 3.9, формулы (18), (19)]), то α_ν , β_ν являются решением линейной системы уравнений

$$\alpha_\nu \psi_{\nu,0}(c) + \beta_\nu \varphi_{\nu,0}(c) = \lambda_\nu \gamma_n, \quad (21)$$

$$\alpha_\nu \psi_{\nu,1}(c) + \beta_\nu \varphi_{\nu,1}(c) = -\frac{\mu_\nu \gamma_n}{\nu(\nu+n-1)}. \quad (22)$$

Рассмотрим функцию

$$F(\xi) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \alpha_\nu \psi_{\nu,0}(\theta_n) + \beta_\nu \varphi_{\nu,0}(\theta_n), \quad \xi \in B_{a,b}.$$

Используя теорему сложения для функций Лежандра (см. [8; гл. 3, п. 3.11]) и (18), (19), (21), (22), находим

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (F - f)(\mathcal{K}_c(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n)) d\zeta = 0, \quad 0 \leq \theta_n < \frac{b-a}{2},$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} (F - f)(\mathcal{K}_c(\zeta \sin \theta_n, \cos \theta_n)) \zeta_n d\zeta = 0, \quad 0 \leq \theta_n < \frac{b-a}{2}.$$

Отсюда и из оценок α_ν , β_ν следует, что функция

$$u(\theta) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \alpha_\nu \psi_{\nu,0}(\arccos \theta) + \beta_\nu \varphi_{\nu,0}(\arccos \theta) - f_0(\arccos \theta)$$

удовлетворяет всем условиям леммы 6. Таким образом, $u = 0$ на $(\cos b, \cos a)$ и лемма 7 доказана.

4. Доказательство теорем 1–6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Необходимость. Из условия следует, что $f_{k,l}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_{a,b}) \cap C^\infty(B_{a,b})$ при всех $k \geq 0$, $1 \leq l \leq a_k$ (см. [5; гл. 2, § 3, лемма 3.7]). Отсюда и из леммы 7 имеем (1) при $k = 0$ (см. [8; гл. 3, п. 3.4, формулы (17), (18)]). При $k \geq 1$ утверждение получается индукцией по k с использованием [5; гл. 2, § 3, лемма 3.9], леммы 1 и формул (6).

Достаточность. Из (1) получаем, что $f_{k,l}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma) \in V_r(B_{a,b})$ (см. доказательство леммы 7). Отсюда следует (см. [5; гл. 2, § 3, доказательство леммы 3.10]), что $f \in V_r(B_{a,b})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1) Используя стандартный метод сглаживания (см., например, [1; гл. 1, § 4, доказательство теоремы 4.2]), можно считать, что $f \in C^\infty(B_R)$. По лемме 5 имеет место равенство (11). Так как $f_{k,l}(\theta_n)Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_r(B_R)$ (см. [5; гл. 2, § 3, доказательство леммы 3.7]), из (11) и теоремы о среднем для собственных функций оператора L получаем

$$\sum_{\nu \in N_0(r)} c_{\nu,k,l} \psi_{\nu,1}(r) \psi_{\nu,k}(r) = 0, \quad 0 \leq \theta < R - r. \quad (23)$$

Поскольку $\psi_{\nu,1}(r) \neq 0$ при $\nu \in N_0(r)$ (см. (5), (7), (4)) и $R > 2r$, из (23) следует, что $c_{\nu,k,l} = 0$ (см. (6) и [5; гл. 2, § 3, доказательство леммы 3.5]). Таким образом, все $f_{k,l}(\theta_n) = 0$ в B_R , откуда $f = 0$.

2) **Необходимость.** Сначала докажем (3). Не ограничивая общности, можно считать, что $R < 2r$ и $f \in C^\infty(B_R)$ (см. [1; гл. 1, § 4, доказательство теоремы 4.2]). Пусть $k = 0$. Тогда $a_k = 1$, $l = 1$ и функции $f_{0,1}(\theta_n), f'_{0,1}(\theta_n)Y_j^{(1)}(\sigma)$ ($1 \leq j \leq a_1$) принадлежат классу $\mathcal{V}_r(B_R) = \{f \in L_{\text{loc}}(B_R) : (f \times \chi_t)(\xi) = 0, \xi \in S_r, 0 < t < R - r\}$ (см. (11), (5), а также [7; теоремы 3, 6]). В частности, $(U_i \times \chi_t)(\varkappa_r o) = 0$, $i = 1, 2$, $0 < t < R - r$, где $U_1(\xi) = f_{0,1}(\theta_n)$, $U_2(\xi) = f'_{0,1}(\theta_n) \cos \theta_{n-1}$. Это означает, что функция $u(\theta) = f_{0,1}(\arccos \theta)$ удовлетворяет системе

$$\int_0^t \int_0^\pi u(\cos \beta \cos r - \sin \beta \sin r \cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} (\sin \beta)^{n-1} d\alpha d\beta = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^\pi u'(\cos \beta \cos r - \sin \beta \sin r \cos \alpha) \\ & \times (\cos \beta \sin r + \sin \beta \cos r \cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} (\sin \beta)^{n-1} d\alpha d\beta = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Применяя к (24), (25) операторы d^2/dt^2 и d/dt соответственно, после простых преобразований находим

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi u'(\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \alpha) (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha = 0, \quad 0 < t < R - r, \\ & \int_0^\pi u'(\cos t \cos r - \sin t \sin r \cos \alpha) \cos \alpha (\sin \alpha)^{n-2} d\alpha = 0, \quad 0 < t < R - r. \end{aligned}$$

Тогда по лемме 6 имеем $u' = 0$ на $(\cos R, \cos(2r - R))$. Отсюда $f_{0,1}(\theta) = 0$ при $\theta \in (2r - R, R)$, поскольку $f_{0,1}(\theta_n) \in \mathcal{V}_r(B_R)$. При $k \geq 1$ равенство (3) получается индукцией по k с использованием [5; гл. 2, § 3, лемма 3.9].

Для доказательства (2) достаточно заметить, что

$$\int_{B_r} f(\xi) d\xi = 0,$$

$$\int_{B_{2r-R,r}} f(\xi) d\xi = \frac{\sqrt{\omega_{n-1}}}{\omega_n} \int_{2r-R}^r f_{0,1}(\theta) (\sin \theta)^{n-1} d\theta.$$

Достаточность. Из условия и лемм 3, 4 получаем, что $f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_r(B_R)$. Отсюда следует, что $f \in W_r(B_R)$ (см. [5; гл. 2, § 3, доказательство леммы 3.10]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства видно, что для $f \in C^\infty(B_R)$ первое утверждение теоремы 2 имеет место и при $R = 2r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. 1) Пусть $0 \leq t < r$. Тогда $\varkappa_t \bar{B}_r \subset B_R$ и

$$\int_{\varkappa_t B_r} f_0(\theta_n) d\xi = 0. \quad (26)$$

Представим функцию f_0 в виде

$$f_0(\theta) = \sum_{\nu \in N_1(r)} \alpha_\nu \psi_{\nu,0}(\theta) + \beta_\nu \varphi_{\nu,0}(\theta), \quad 0 < \theta < R, \quad (27)$$

где $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| = O(\nu^{-c})$, $\nu \rightarrow +\infty$ для любого фиксированного $c > 0$ (см. лемму 7). Используя теорему сложения для функций Лежандра (см. [8; гл. 3, п. 3.11]), из (26), (27), (20) находим

$$\sum_{\nu \in N_1(r)} \beta_\nu \left((\sin r)^{n-1} \varphi_{\nu,1}(r) \psi_{\nu,0}(t) - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+n)} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq r.$$

Дифференцируя последнее равенство по t , из (5), (20) и [5; гл. 2, § 3, лемма 3.5] имеем $\beta_\nu = 0$, $\nu \in N_1(r)$. Отсюда и из (27) следует первое утверждение теоремы 3.

2) Пусть $0 < \varepsilon < 2r - R$. Тогда любой шар радиуса r из B_R содержит B_ε , откуда получаем утверждение 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. 1) Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq l \leq a_k$. Из второго утверждения теоремы 2 следует, что

$$f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) = \sum_{m=0}^{k-2} c_{m,k,l} (\cos \theta_n)^m (\sin \theta_n)^{2-n-k} Y_l^{(k)}(\sigma) \quad (28)$$

почти всюду в B_R . Поскольку $f_{k,l}(\theta_n) Y_l^{(k)}(\sigma) \in W_r(B_R) \cap C^\infty(\{o\})$ (см. [5; гл. 2, § 3, формула (3.3) и лемма 3.7]), функция в правой части равенства (28) принадлежит $W_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Используя замечание 1, получаем $f_{k,l}(\theta_n) = 0$ в B_R , откуда $f = 0$.

2) Положим $f(\xi) = (1 - \cos \theta_n)^{k-2} Y_1^{(k)}(\sigma) / (\sin \theta_n)^{n+k-2}$. Тогда при достаточно большом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция f обладает требуемыми свойствами (см. леммы 3, 4). Таким образом, теорема 4 доказана.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987.
- [2] К. А. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления*, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 5–111.
- [3] L. Zalcman, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, eds. B. Fuglede et al., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 185–194.
- [4] L. Zalcman, “Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Radon Transforms and Tomography*, Contemp. Math., **278**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 69–74.
- [5] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2003.
- [6] Вит. В. Волчков, “Теоремы об инъективности локального преобразования Помпейю на сфере”, *Докл. РАН*, **393**:3 (2003), 309–311.
- [7] Вит. В. Волчков, “Аналоги локального преобразования Помпейю на сфере”, *Доп. НАН України*, 2004, № 2, 11–14.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. т. 1, 2-е изд., Наука, М., 1973.
- [9] В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30.
- [10] В. В. Волчков, “Шаровые средние на симметрических пространствах”, *Доп. НАН України*, 2002, № 3, 15–19.
- [11] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. т. 2, 2-е изд., Наука, М., 1974.

В. В. Волчков (Виталий В. Волчков)

Донецкий национальный университет

E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua

Поступило

27.10.2003

Исправленный вариант

15.03.2004