Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Деформации функционалов и бифуркации экстремалей, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 70–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 07:16:15

Деформации функционалов и бифуркации экстремалей

В. С. Климов

Изучены инвариантные относительно деформаций гомологические характеристики критических значений и экстремалей липшицевых функционалов, определенных на ограниченных замкнутых выпуклых подмножествах рефлексивного пространства. Найдено достаточное условие существования точки бифуркации многозначного потенциального оператора (принцип смены типового числа экстремали).

Библиография: 16 названий.

Введение. Статья посвящена задаче о точках бифуркации многозначных операторов монотонного типа. В п. 1 приведены определения основных понятий, установлен многозначный вариант принципа смены индекса [1; § 56]. В п. 2 изучены инвариантные относительно деформаций характеристики изолированных критических значений и экстремалей липшицевых функционалов, найдено достаточное условие существования точки бифуркации многозначного потенциального оператора (принцип смены типового числа экстремали). Пункт 3 содержит анализ двух примеров иллюстративного характера, представляющих, как полагает автор, определенный самостоятельный интерес.

Приняты обозначения $\overline{\mathcal{M}}$ ($\overset{\circ}{\mathcal{M}}$, $\partial\mathcal{M}$) – замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathcal{M}$ метрического пространства $(\mathfrak{R}, \rho)$, $\theta_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}, \mathcal{M}) = \sup_{x \in \mathfrak{N}} \inf_{y \in \mathcal{M}} \rho(x, y)$ – уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$ от множества $\mathcal{M} \subset \mathfrak{R}$ в метрике ρ ; X и X^* – действительное банахово пространство и сопряженное к нему соответственно; $\langle x, x^* \rangle$ – значение функционала x^* из X^* на элементе x из X , $s(x^*, \mathcal{M}) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in \mathcal{M}\}$ – опорная функция множества $\mathcal{M} \subset X$, $\text{Cv}(X)$ – совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X , $B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар в пространстве X с нормой $\|\cdot\|$. Если $Q \in \text{Cv}(X)$, $x \in Q$, то $N_Q(x) = \{x^* \in X^*, \langle v - x, x^* \rangle \leq 0 \forall v \in Q\}$ – нормальный конус к множеству Q в точке x . Далее $\Lambda(\mathcal{M}, Y)$ – совокупность удовлетворяющих условию Липшица отображений множества $\mathcal{M} \subset X$ в банахово пространство Y , $\Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

Многозначное отображение (m -отображение) $\mathcal{F}$ множества $\mathcal{M}_1$ во множество $\mathcal{M}_2$ – это оператор, ставящий в соответствие элементу x из $\mathcal{M}_1$ непустое множество $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{M}_2$; если $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$, то $\mathcal{F}(\mathcal{M}) = \bigcup \mathcal{F}(x)$ ($x \in \mathcal{M}$) – область значений $\mathcal{F}$ на множестве $\mathcal{M}$. Отображение $\mathcal{F}: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ ($\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ – подмножества метрических пространств $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ соответственно) ограничено, если для каждого ограниченного множества $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}_1$ область значений $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ есть ограниченное подмножество $\mathfrak{R}_2$.

Если V – топологическое пространство, Y – банахово пространство и образы $\mathcal{F}(v)$ m -отображения $\mathcal{F}: V \rightarrow Y$ принадлежат классу $\text{Cv}(Y)$ для каждого v из V , то будем записывать это следующим образом: $\mathcal{F}: V \rightarrow \text{Cv}(Y)$. Отображение $\mathcal{F}: V \rightarrow \text{Cv}(Y)$ хеминепрерывно на V , если для каждого y^* из Y^* функция $v \rightarrow s(y^*, \mathcal{F}(v)) = \sup\{\langle y, y^* \rangle, y \in \mathcal{F}(v)\}$ полунепрерывна сверху на пространстве V . Семейство отображений $\mathcal{F}_\xi: V \rightarrow \text{Cv}(Y)$ ($\xi \in \Xi$) равномерно относительно параметра ξ полунепрерывно сверху в точке $v_0 \in V$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(v_0)$ точки v_0 , что

$$\mathcal{F}_\xi(v) \subset \mathcal{F}_\xi(v_0) + \varepsilon B_Y, \quad v \in U(v_0), \quad \xi \in \Xi.$$

1. Точки бифуркации многозначных операторов. Всюду далее X – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, символы $\rightarrow$ и $\rightharpoonup$ означают сильную и слабую сходимости соответственно; $Q \in \text{Cv}(X)$. Предполагается, что линейная оболочка $X_0 = \text{Lin}(Q)$ множества Q всюду плотна в пространстве X : $X_0 = X$; $\Gamma(Q)$ – совокупность таких конечномерных подпространств E пространства X , что внутренность $\text{ri}_E(Q \cap E)$ множества $Q \cap E$ относительно пространства E непуста.

Ниже $J = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Обозначим через $S_1(Q)$ совокупность ограниченных хеминепрерывных m -отображений $\mathcal{F}: Q \times J \rightarrow \text{Cv}(X^*)$, удовлетворяющих условию

A) если последовательности $x_n \in Q$, $\lambda_n \in J$ обладают свойствами

$$x_n \rightharpoonup x, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, \mathcal{F}(x_n, \lambda_n)) \geq 0, \quad (1)$$

то $x_n \rightarrow x$.

Наряду с $S_1(Q)$ далее используется класс $S(Q)$, состоящий из отображений $\mathcal{F}_0: Q \rightarrow \text{Cv}(X^*)$, для которых постоянное по λ отображение $\mathcal{F}(\cdot, \lambda) = \mathcal{F}_0$ принадлежит $S_1(Q)$. Очевидно, что если $\mathcal{F} \in S_1(Q)$, то при любом λ из J отображение $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\cdot, \lambda)$ принадлежит классу $S(Q)$. Близкие к $S(Q)$ классы однозначных операторов рассматривались в [2]–[5]. Примеры m -отображений этого класса можно найти в [5]–[8].

Элемент $x \in Q$ назовем *особой точкой* оператора $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$, если $0 \in \mathcal{F}(x) + N_Q(x)$. Оператор $\mathcal{F}$ невырожден на множестве $\mathfrak{M} \subset Q$, если $\mathfrak{M}$ не содержит особых точек $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [6]. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$ невырожден на ограниченном замкнутом множестве $\mathfrak{M} \subset Q$. Тогда существуют E из $\Gamma(Q)$, ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q, X)$ и постоянная $\eta > 0$, обладающие свойствами $w(x) \in \text{ri}_E(Q \cap E) \quad \forall x \in Q$, $s(w(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\eta \quad \forall x \in \mathfrak{M}$.

Пусть Ω – ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество множества Q , рассматриваемого как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $\partial_Q \Omega$ – относительная граница множества Ω . Если оператор $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$ невырожден на $\partial_Q \Omega$, то согласно предложению 1 существуют пространство E класса $\Gamma(Q)$ и векторное поле w класса $\Lambda(Q, X)$ такие, что

$$w(x) \in \text{ri}_E(Q \cap E) \quad \forall x \in Q, \quad \langle x - w(x), x^* \rangle > 0, \quad x \in \partial_Q \Omega, \quad x^* \in \mathcal{F}(x).$$

В частности, $(I - w)(x) = x - w(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial_Q \Omega$ и определено относительное вращение $\gamma(I - w, \partial_Q \Omega)$ поля $I - w$ на $\partial_Q \Omega$ [1; § 33], [9]. Число $\gamma(I - w, \partial_Q \Omega)$ назовем *относительным вращением* поля $\mathcal{F}$ на $\partial_Q \Omega$ и обозначим символом $\gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega)$. Отметим следующие свойства относительного вращения $\gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega)$ [6]–[8].

Аддитивность. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ – ограниченные относительно открытые подмножества множества Q , $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ и $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$. Пусть отображение $\mathcal{F}$ невырождено на множестве $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Тогда $\gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega) = \gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega_1) + \gamma_Q(\mathcal{F}, \Omega_2)$.

Гомотопическая инвариантность. Пусть $\mathcal{F} \in S_1(Q)$ и отображения $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\cdot, \lambda)$, $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, невырождены на границе $\partial_Q \Omega$ ограниченного относительно открытого множества $\Omega \subset Q$. Тогда $\gamma_Q(\mathcal{F}_\alpha, \Omega) = \gamma_Q(\mathcal{F}_\beta, \Omega)$.

Множество $\mathfrak{N} \subset Q$ называют *особым* для поля $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$, если любой элемент из $\mathfrak{N}$ есть особая точка $\mathcal{F}$. Особое множество изолировано, если в некоторой его окрестности O нет других особых точек поля $\mathcal{F}$. Для ограниченного изолированного особого множества окрестность O можно взять также ограниченной; в этом случае относительное вращение $\gamma_Q(\mathcal{F}, O)$ не зависит от выбора O ; это вытекает из свойства аддитивности вращения. Число $\gamma_Q(\mathcal{F}, O)$ называют *индексом* особого множества $\mathfrak{N}$ поля $\mathcal{F}$ и обозначают символом $\text{ind}_Q(\mathfrak{N}, \mathcal{F})$. Не оговаривая каждый раз особо, считаем далее множество Q ограниченным.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{F} \in S_1(Q)$, $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in J$. Тогда

1) при любом λ из J множество $\mathfrak{N}(\lambda)$ решений включения

$$0 \in \mathcal{F}_\lambda(x) + N_Q(x) \quad (2)$$

есть непустой компакт;

2) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \theta_X(\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_\mu) = 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непустота и компактность множества $\mathfrak{N}(\lambda)$ вытекают из результатов работ [6]–[8]. Для доказательства (3) фиксируем μ из J и последовательности $\lambda_n \in J$, $x_n \in \mathfrak{N}(\lambda_n)$, $\lambda_n \rightarrow \mu$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \rightharpoonup x$. Так как $x_n \in \mathfrak{N}(\lambda_n)$, то найдется элемент x_n^* из $\mathcal{F}(x_n, \lambda_n) \cap (-N_Q(x_n))$. Следовательно, $s(x - x_n, \mathcal{F}(x_n, \lambda_n)) \geq \langle x - x_n, x_n^* \rangle \geq 0$ при всех n . Последовательности x_n, λ_n обладают свойствами (1) с $\lambda = \mu$, поэтому $x_n \rightarrow x$. Можно считать, что $x_n^* \rightharpoonup x^*$. Для любого v из X

$$\langle v, x^* \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, x_n^* \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s(v, \mathcal{F}(x_n, \lambda_n)) \leq s(v, \mathcal{F}(x, \mu)),$$

поэтому $x^* \in \mathcal{F}(x, \mu)$. Поскольку $x_n^* \in -N_Q(x_n)$, то $\langle v - x_n, x_n^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Q$. Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем соотношение $\langle v - x, x^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in Q$, равносильное включению $x^* \in -N_Q(x)$. Итак, $x^* \in \mathcal{F}(x, \mu) \cap (-N_Q(x))$, поэтому $0 \in \mathcal{F}_\mu(x) + N_Q(x)$, $x \in \mathfrak{N}(\mu)$. Из проведенных рассуждений вытекает (3). Лемма доказана.

Для проверки условий леммы 1 полезна

ЛЕММА 2. Пусть отображение $\mathcal{F}: Q \times J \rightarrow \text{Cv}(X^*)$ полунепрерывно сверху по λ (в каждой точке из J) равномерно относительно x из Q . Пусть $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\cdot, \lambda) \in S(Q) \quad \forall \lambda \in J$.

Тогда $\mathcal{F} \in S_1(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательности x_n из Q , λ_n из J обладают свойствами (1). Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, \mathcal{F}(x_n, \lambda)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} s(x - x_n, \mathcal{F}(x_n, \lambda_n)) \geq 0.$$

Поскольку $\mathcal{F}_\lambda \in S(Q)$, то $x_n \rightarrow x$. Следовательно, условие **A** выполнено. Хеминепрерывность и ограниченность отображения $\mathcal{F}: Q \times J \rightarrow \text{Cv}(X^*)$ устанавливаются аналогично. Лемма доказана.

Пусть $0 \in \mathring{Q} \cap \mathcal{F}_\lambda(0) \quad \forall \lambda \in J$. В этом случае $N_Q(0) = \{0\}$ и включение

$$0 \in \mathcal{F}(x, \lambda) \quad (4)$$

имеет нулевое решение при любом λ из J . Точку μ из J назовем *правильной* для включения (4), если найдется такое $\varepsilon > 0$, что при λ из $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$ включение (4) имеет в шаре εB_X единственное (нулевое) решение. В частности, 0 – изолированная особая точка m -отображения $\mathcal{F}_\lambda$, поэтому имеет смысл ее топологический индекс $\text{ind}(0, \mathcal{F}_\lambda) = \text{ind}_Q(\{0\}, \mathcal{F}_\lambda)$. Из гомотопической инвариантности вращения вытекает

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{F} \in S_1(Q)$, $0 \in \mathring{Q} \cap \mathcal{F}_\lambda(0) \quad \forall \lambda \in J$. Если μ – правильная точка для включения (4), то найдется такое $\varepsilon > 0$, что функция $\lambda \rightarrow \text{ind}(0, \mathcal{F}_\lambda)$ постоянна на промежутке $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$.

Число λ_0 , не являющееся правильной точкой, называют *точкой бифуркации* для включения (4). Таким образом, λ_0 есть точка бифуркации, если найдутся такие последовательности $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, что $0 \in \mathcal{F}(x_n, \lambda_n)$. Для однозначного отображения $\mathcal{F}$ приведенное определение точки бифуркации совпадает с общепринятым [1; § 56].

Пусть 0 есть изолированное решение включения (4) при $\lambda = \lambda_n$ и $\lambda = \mu_n$, $n = 1, 2, \dots$, где $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $\mu_n \rightarrow \lambda_0$. Если при этом

$$\text{ind}(0, \mathcal{F}_{\lambda_n}) \neq \text{ind}(0, \mathcal{F}_{\mu_n}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то число λ_0 назовем *точкой смены индекса*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть λ_0 – точка смены индекса для включения (4) с оператором $\mathcal{F}$ класса $S_1(Q)$. Тогда λ_0 есть точка бифуркации для включения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что из (5) вытекает непостоянство функции $\lambda \rightarrow \text{ind}(0, \mathcal{F}_\lambda)$ в каждой окрестности точки λ_0 .

Теорема 1 представляет многозначный вариант принципа смены индекса [1; § 56]. Методы вычисления индекса особой точки изучались многими авторами (см., например, [1]–[9] и приведенную там литературу).

2. Деформации функционалов. Основное внимание далее уделяется потенциальным операторам. Напомним некоторые понятия негладкого анализа.

Пусть $f \in \Lambda(Q)$, $x \in Q$, $v \in X_0 = \text{Lin}(Q)$. Множество последовательностей $\{y, t\}$ таких, что $y \rightarrow x$, $t \rightarrow +0$, $[y, y + tv] \in Q$, непусто [10]. Положим

$$f^0(x, v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow +0, [y, y+tv] \subset Q} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Число $f^0(x, v)$ называют *обобщенной производной* функционала f в точке x по направлению v . Функционал $f^0(x, \cdot): X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукл, положительно однороден, удовлетворяет условию Липшица и допускает однозначное продолжение с сохранением указанных свойств на пространство $X = \overline{X}_0$. За продолженным функционалом сохраним то же обозначение. Функционал $f^0(x, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$ есть опорная функция множества класса $\text{Cv}(X^*)$, обозначаемого символом $\partial f(x)$ и называемого *обобщенным градиентом* функционала f в точке x [10], [11]. Если $f \in \Lambda(Q)$, $x(\cdot): (t_0, t_1) \rightarrow Q$ – отображение класса C^1 , то для верхней правой производной $D^*f(x(t))$ функции $f \circ x: (t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}$ в точке t справедлива оценка

$$D^*f(x(t)) \leq f^0(x(t), x'(t)). \quad (6)$$

Через $\Lambda_1(Q)$ обозначим часть $\Lambda(Q)$, состоящую из функционалов, для которых градиентное отображение $\mathcal{F}(x) = \partial f(x)$ принадлежит классу $S(Q)$. В этом случае функционал f назовем *потенциалом* оператора $\mathcal{F}$, особые точки $\mathcal{F}$ – *экстремальными* (критическими точками) функционала f , неособые точки $\mathcal{F}$ – *регулярными точками* f . Если поверхность уровня $f^{-1}(c) = \{x \in Q, f(x) = c\}$ функционала f пересекается с множеством его экстремалей, то c – *критическое значение* f ; в противном случае c – *регулярное значение* f .

Далее используются некоторые понятия алгебраической топологии. Пусть $\mathfrak{R}'$ – подпространство метрического пространства $\mathfrak{R}$. Через $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, $l = 0, 1, \dots$, обозначается группа относительных целочисленных гомологий с компактными носителями [12], [13] пары пространств $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$, называемый l -м *числом Бетти* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. Если $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') < \infty \quad \forall l$ и $b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = 0$ при $l \geq l_0$, то число

$$\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}') = \sum_{l \geq 0} (-1)^l b_l(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$$

называют *эйлеровой характеристикой* пары $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$. В случае $\mathfrak{R}' = \emptyset$ полагают $H_l(\mathfrak{R}, \emptyset) = H_l(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}, \emptyset) = \chi(\mathfrak{R})$.

$H_l(\mathfrak{R})$ – группа абсолютных целочисленных гомологий с компактными носителями пространства $\mathfrak{R}$, $\chi(\mathfrak{R})$ – эйлерова характеристика пространства $\mathfrak{R}$. Если пара $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ такова, что два из чисел $\chi(\mathfrak{R})$, $\chi(\mathfrak{R}')$, $\chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}')$ определены, то определено и третье, причем [12; § 5.5]

$$\chi(\mathfrak{R}) - \chi(\mathfrak{R}') = \chi(\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'). \quad (7)$$

Существенную роль в последующем играет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [6]. Пусть $f \in \Lambda_1(Q)$, a – регулярное значение функционала f . Тогда определена эйлерова характеристика лебегова множества $M_a = \{x \in Q, f(x) \leq a\}$.

Пусть c – единственное критическое значение функционала f класса $\Lambda_1(Q)$ на сегменте $[a, b]$, $a < c < b$. В силу предложения 2 имеют смысл эйлеровы характеристики пространств M_b, M_a . Применяя к паре пространств M_b, M_a равенство (7), получаем $\chi(M_b, M_a) = \chi(M_b) - \chi(M_a)$. В частности, при любом целом $l \geq 0$ конечны числа Бетти $b_l(M_b, M_a)$, $l = 0, 1, \dots$, и последовательность $b_l(M_b, M_a)$ финитна. Из теоремы 2 работы [6] следует, что числа $b_l(M_b, M_a)$ не зависят от выбора отрезка $[a, b]$, для которого $c \in (a, b)$ и все числа из $[a, b] \setminus \{c\}$ регулярны. Таким образом, последовательность $b_l(M_b, M_a)$, $l = 0, 1, \dots$, характеризует число c . Положим $m_l(f, c) = b_l(M_b, M_a)$, $l = 0, 1, \dots$; определяемые этими равенствами числа $m_l(f, c)$ назовем *типовыми числами* критического значения c функционала f .

Изучим поведение типовых чисел критических значений при изменении функционала f . Введем семейство функционалов $f_\lambda: Q \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in J = [\alpha, \beta]$ класса $\Lambda_1(Q)$. Здесь и далее $f(x, \lambda) = f_\lambda(x)$, $\partial_x f(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$, $x \in Q$, $\lambda \in J$; $\{f_\lambda \leq t\} = \{x \in Q, f_\lambda(x) \leq t\}$, $f_\lambda^{-1}(t) = \{x \in Q, f_\lambda(x) = t\}$. Назовем семейство f_λ *деформацией* класса $\Lambda_1(Q)$ функционала f_α в функционал f_β , если выполнены условия:

B₁) функционал $f(x, \lambda)$ непрерывен по λ равномерно относительно x из Q ;

B₂) отображение $\partial_x f(x, \lambda)$ полунепрерывно сверху по λ равномерно относительно x из Q .

Условие **B₁)** эквивалентно требованию

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \sup_{x \in Q} |f(x, \lambda) - f(x, \mu)| = 0$$

для каждого μ из J . Условие **B₂)** можно сформулировать следующим образом: для каждого μ из J и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из соотношения $|\lambda - \mu| \leq \delta$, $\lambda \in J$, $v \in B_X$, вытекает неравенство

$$f_\lambda^0(x, v) \leq f_\mu^0(x, v) + \varepsilon \quad \forall x \in Q.$$

Если выполнены условия **B₁)**, **B₂)**, то в силу леммы 2 определяемое равенством $\mathcal{F}(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$ отображение принадлежит классу $S_1(Q)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f_λ , $\lambda \in J$, деформация класса $\Lambda_1(Q)$ функционала f_α в функционал f_β . Пусть при каждом λ из J функционал f_λ имеет единственное в отрезке $[a(\lambda), b(\lambda)]$ критическое значение $c(\lambda)$, причем функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ непрерывны на J и $a(\lambda) < c(\lambda) < b(\lambda)$. Тогда типовые числа $m_l(f_\lambda, c(\lambda))$, $l = 0, 1, \dots$, постоянны на отрезке J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ постоянными на J ; пусть, например, $a(\lambda) \equiv a_0$, $b(\lambda) \equiv b_0$, $c(\lambda) \equiv 0$, так что $a_0 < 0 < b_0$. Фиксируем числа b_1, b_2, μ , где $0 < b_2 < b_1 < b_0$, $\mu \in J$. Из условия **B₁)** следует существование такого числа $\delta_1 > 0$, что из соотношений $|\lambda - \mu| < \delta_1$, $\lambda \in J$ вытекает оценка

$$|f(x, \lambda) - f(x, \mu)| < \frac{b_1 - b_2}{4} \quad \forall x \in Q,$$

эквивалентная неравенствам

$$f_\mu(x) - \frac{b_1 - b_2}{4} < f_\lambda(x) < f_\mu(x) + \frac{b_1 - b_2}{4} \quad \forall x \in Q.$$

Справедливы включения

$$\left\{ f_\mu \leq \frac{b_1 + 3b_2}{4} \right\} \subset \left\{ f_\lambda \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \right\} \subset \left\{ f_\mu \leq \frac{3b_1 + b_2}{4} \right\} \subset \{ f_\mu \leq b_1 \}.$$

Пусть $\mathfrak{M} = \{x \in Q, b_2 \leq f_\mu(x) \leq b_1\}$. Множество $\mathfrak{M}$ замкнуто и ограничено, m -отображение $\mathcal{F}(x) = \partial f_\mu(x)$, $x \in Q$, класса $S(Q)$ невырождено на множестве $\mathfrak{M}$. Согласно предложению 1 существуют E из $\Gamma(Q)$, ограниченное отображение w класса $\Lambda(Q, X)$ и постоянная $\eta > 0$, обладающие свойствами

$$w(x) \in \text{ri}_E(Q \cap E) \quad \forall x \in Q, \quad f_\mu^0(x, w(x) - x) < -\eta \quad \forall x \in \mathfrak{M}. \quad (8)$$

Из условия $\mathbf{B}_2$) и (8) вытекает существование такого положительного числа $\delta < \delta_1$, что если $|\lambda - \mu| < \delta$, $\lambda \in J$, то

$$f_\lambda^0(x, w(x) - x) < -\frac{\eta}{2} \quad \forall x \in \mathfrak{M}. \quad (9)$$

При любом z из Q задача Коши

$$x' = w(x) - x, \quad x(0) = z \quad (10)$$

имеет единственное решение $x(t; z)$, $t \geq 0$, $z \in Q$. Из (8) следует, что $x(t; z) \in Q$ при всех $t \geq 0$, $z \in Q$; отображение $(t, z) \rightarrow x(t; z)$ непрерывно по совокупности переменных. Объединяя (6), (9), (10), получаем оценку

$$D^* f_\lambda(x(t; z)) < -\frac{\eta}{2}, \quad (11)$$

если $|\lambda - \mu| < \delta$, $x(t; z) \in \mathfrak{M}$.

Фиксируем λ из $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap J$. Множество $\{f_\lambda \leq (b_1 + b_2)/2\}$ есть деформационный ретракт множества $\{f_\mu \leq b_1\}$. Действительно, пусть $z \in \{f_\mu \leq b_1\}$, т.е. $z \in Q$, $f_\mu(z) \leq b_1$; $x(t; z)$ – решение задачи Коши (10). Из (11) вытекает существование числа $T(z)$, обладающего свойствами

$$f_\lambda(x(T(z); z)) = \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad f_\lambda(x(t; z)) > \frac{b_1 + b_2}{2}, \quad \text{если } T < T(z).$$

Таким образом, $T(z)$ – время первого попадания решения $x(t; z)$ в множество $\{f_\lambda \leq (b_1 + b_2)/2\}$; оно равно 0, если $f_\lambda(z) \leq (b_1 + b_2)/2$. Функция $T(z)$ непрерывна на множестве $\{f_\mu \leq b_1\}$ [6].

Определим на $\{f_\mu \leq b_1\} \times [0, 1]$ отображение Ψ равенством

$$\Psi(z, \tau) = \begin{cases} x(\tau T(z); z), & z \in \{f_\mu \leq b_1\}, \\ z, & z \in \left\{ f_\lambda \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \right\}. \end{cases}$$

Отображение $\Psi: \{f_\mu \leq b_1\} \times [0, 1] \rightarrow \{f_\mu \leq b_1\}$ непрерывно; справедливы соотношения

$$\Psi(z, 0) = z \quad \forall z \in \{f_\mu \leq b_1\}, \quad \Psi(z, t) = z \quad \forall z \in \left\{ f_\lambda \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \right\}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\Psi(z, 1) \in \left\{ f_\lambda \leq \frac{b_1 + b_2}{2} \right\} \quad \forall z \in \{f_\mu \leq b_1\}.$$

Эти соотношения без труда выводятся из отмеченных свойств $T(z)$, $x(t; z)$. Они означают, что пространство $\{f_\lambda \leq (b_1 + b_2)/2\}$ есть деформационный ретракт пространства $\{f_\mu \leq b_1\}$.

Аналогично, пусть фиксированы числа a_1 , a_2 , μ , так, что $a_0 < a_1 < a_2 < 0$, $\mu \in J$. Повторяя рассуждения, проведенные выше, можно доказать существование такого $\delta > 0$, что если $|\lambda - \mu| < \delta$, $\lambda \in J$, то множество $\{f_\lambda \leq (a_1 + a_2)/2\}$ есть деформационный ретракт множества $\{f_\mu \leq a_2\}$.

Из установленных результатов вытекает, что на некоторой окрестности точки μ все типовые числа $m_l(f_\lambda, c(\lambda))$ постоянны. Но локально постоянная функция является постоянной на всем отрезке J . Теорема доказана.

Применим теорему 2 к задаче о точках бифуркации включения (4) с потенциальным оператором $\mathcal{F}$. Напомним определение типового числа экстремали. Пусть x_0 – изолированная экстремаль функционала f класса $\Lambda_1(Q)$, $c = f(x_0)$. $H_l(M_c, m_c \setminus \{x_0\})$, $l = 0, 1, \dots$, – группа локальных гомологий [12; гл. 4, § 3] пространства M_c в точке x_0 . Если число $m_l(x_0, f) = \text{rang } H_l(M_c, M_c \setminus \{x_0\}) < \infty$, то его называют l -м типовым числом экстремали x_0 .

Ниже f_λ , $\lambda \in J$, – деформация класса $\Lambda_1(Q)$ функционала f_α в функционал f_β , $\mathcal{F}(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$, $x \in Q$, $\lambda \in J$. $\mathfrak{N}(\lambda)$ – множество экстремалей функционала f_λ , совпадающее с множеством решений включения (2). Пусть $0 \in \mathring{Q} \cap \mathcal{F}(0, \lambda) \quad \forall \lambda \in J$, поэтому 0 есть экстремаль функционала f_λ при каждом λ из J . Если 0 – изолированная экстремаль, то при определенных предположениях [7] ее топологический индекс может быть вычислен по формуле

$$\text{ind}(0, \partial f_\lambda) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l m_l(0, f_\lambda), \quad (12)$$

в которой $m_l(0, f_\lambda)$ – типовые числа нулевой экстремали функционала f_λ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f_\lambda(0) = 0 \quad \forall \lambda \in J$, μ – правильная точка для включения (4) с $\mathcal{F}(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$, $x \in Q$, $\lambda \in J$ и

$$\mathfrak{N}(\mu) \cap f_\mu^{-1}(0) = 0. \quad (13)$$

Тогда типовые числа $m_l(0, f_\lambda)$, $l = 0, 1, \dots$, постоянны на некоторой окрестности точки μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как μ – правильная точка для включения (4), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon B_X \subset \mathring{Q}$ и $\mathfrak{N}(\lambda) \cap \varepsilon B_X = \{0\}$, если $\lambda \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$. Установим существование такого $\delta > 0$, что для λ из $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap J$ функционал f_λ имеет в интервале $(-\delta, \delta)$ единственное критическое значение; оно совпадает с 0. В предположении противного существуют последовательности λ_n , c_n , обладающие свойствами: $\lambda_n \rightarrow \mu$, $c_n \rightarrow 0$, $c_n \neq 0$, c_n – критическое значение функционала $f(\cdot, \lambda_n)$, т.е. $c_n = f(x_n, \lambda_n)$, $x_n \in \mathfrak{N}(\lambda_n)$. Так как $\mathfrak{N}(\lambda) \cap \varepsilon B_X = \{0\} \quad \forall \lambda \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$, то $\|x_n\| > \varepsilon$ при достаточно больших n . В силу леммы 1 можно считать, что $x_n \rightarrow x_* \in \mathfrak{N}(\mu)$. Поскольку $f(x_*, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \lambda_n) = 0$, то $x_* \in \mathfrak{N}(\mu) \cap f_\mu^{-1}(0)$, поэтому согласно (13) $x_* = 0$. Но это противоречит неравенству $\|x_*\| > \varepsilon$. Существование требуемого числа $\delta > 0$ установлено.

Из теоремы 2 следует постоянство на $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap J$ типовых чисел $m_l(f_\lambda, 0)$, $l = 0, 1, \dots$, нулевого критического значения функционала f_λ . Но $m_l(f_\lambda, 0)$ совпадает с типовым числом $m_l(0, f_\lambda)$ нулевой экстремали функционала f_λ [7]. Это и приводит к требуемому результату. Теорема доказана.

Пусть 0 есть изолированная экстремаль функционала f_λ при $\lambda = \lambda_n$ и $\lambda = \mu_n$, $n = 1, \dots$, где $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $\mu_n \rightarrow \lambda_0$. Если

$$m_l(0, f_{\lambda_n}) \neq m_l(0, f_{\mu_n})$$

при некотором $l = l(n)$, то λ_0 назовем *точкой смены типового числа* нулевой экстремали.

ТЕОРЕМА 4 (Принцип смены типового числа экстремали). Пусть λ_0 – точка смены типового числа нулевой экстремали и выполнено условие (13). Тогда λ_0 есть точка бифуркации для включения (4) с $\mathcal{F}(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 3.

Обсудим теоремы 3, 4. Условие правильности точки μ относится к включению (4) и по существу не зависит от выбора множества Q . Это позволяет подбирать пробное множество Q подходящим образом. В ряде ситуаций (13) становится следствием более обозримых условий. Примеры подобного рода анализируются в п. 3. Теорема 4 содержит достаточные условия для того, чтобы число λ_0 было точкой бифуркации включения (4) с $\mathcal{F}(x, \lambda) = \partial f_\lambda(x)$. В силу формулы (12) изменение топологического индекса влечет за собой изменение хотя бы одного типового числа нулевой экстремали, поэтому для потенциальных операторов теорема 4 приводит к более широким по сравнению с теоремой 1 достаточным условиям бифуркации экстремалей.

3. Примеры. Вначале применим предшествующие результаты к функциям конечного числа переменных. Пусть U – выпуклая окрестность нуля конечномерного евклидова пространства H , отождествляемого с сопряженным к нему H^* , $|\cdot|$ – норма в H . $J = [\alpha, \beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, $f: U \times J \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, непрерывная на $U \times J$ по совокупности переменных вместе с производной $f'_x: U \times J \rightarrow H$, причем $f'_x(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in J$. В рассматриваемом случае отображение $\mathcal{F}(x, \lambda) = f'_x(x, \lambda)$ однозначно, поэтому включение (4) становится уравнением

$$\mathcal{F}(x, \lambda) = f'_x(x, \lambda) = 0. \quad (14)$$

Его решения называют *экстремальями* (*критическими точками*) функции $f_\lambda = f(\cdot, \lambda): U \rightarrow \mathbb{R}$. Поскольку $f'_x(0, \lambda) \equiv 0$, то 0 есть экстремаль функции f_λ при любом λ из J . Точку μ из J назовем *правильной* для уравнения (14), если найдется такое $\varepsilon > 0$, что при λ из $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$ уравнение (14) имеет в шаре εB_H единственное (нулевое) решение. Из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть μ – правильная точка для уравнения (14) и $f_\mu \in C^2(U)$. Тогда справедливо заключение теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $f(0, \lambda) = 0$. Поскольку μ – правильная точка для уравнения (14), то при некотором $\varepsilon > 0$ функция f_λ ($\lambda \in (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon) \cap J$) имеет в шаре εB_H единственную (нулевую) экстремаль.

Введем подмногообразие M класса C^2 пространства H , полагая $M = \{x \in H, 0 < |x| < \varepsilon, f_\mu(x) = 0\}$. Существует всюду плотное в пространстве H множество $\mathfrak{U}$ такое, что для всех a из $\mathfrak{U}$ сужение функции $\varphi(x) = |x - a|^2$ на многообразие M есть функция Морса [14; гл. 6]. Это позволяет выбрать вектор a из $\mathfrak{U}$ и число $t > 0$ так, что множество $Q_t = \{x \in H, \varphi(x) \leq t\}$ удовлетворяет условиям: $0 \in \overset{\circ}{Q}_t$, $Q_t \subset \varepsilon \overset{\circ}{B}_H$, при этом t – регулярное значение сужения функции φ на M .

Регулярность числа t эквивалентна отсутствию решений задачи $f'_\mu(x) + \nu \varphi'(x) = 0$, $\varphi(x) = t$ при любом ν из $\mathbb{R}$. Если $\varphi(x) < t$, то $x \in \overset{\circ}{Q}_t$, $N_{Q_t}(x) = \{0\}$, поэтому в рассматриваемой ситуации имеет место (13) с $Q = Q_t$.

Все условия теоремы 3 выполнены, что и приводит к требуемому утверждению. Следствие доказано.

Число λ_0 есть точка бифуркации для уравнения (14), если найдутся такие последовательности $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, что $\mathcal{F}(x_n, \lambda_n) = 0$. Это определение согласуется с приведенным в п. 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть λ_0 – точка смены типового числа нулевой экстремали функции f_λ и $f_{\lambda_0} \in C^2(U)$. Тогда λ_0 есть точка бифуркации для уравнения (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемых условиях λ_0 есть точка смены типового числа нулевой экстремали функции f_λ . Согласно следствию 1 λ_0 не может быть правильной точкой для уравнения (14). Это и приводит к требуемому результату.

Для применения следствий 1, 2 полезны способы вычисления типовых чисел экстремалей. Опишем здесь способ, относящийся к асимптотически однородным функционалам. Именно, пусть функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ допускает представление вида

$$f(x) = \psi(x) + \omega(x), \quad (15)$$

где $\psi, \omega \in C^2(U)$, функция $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ p -однородна, т.е. $\psi(tx) = t^p \psi(x)$ ($p \geq 2$, $x \in U$, $t \in [0, 1]$), функция $\omega: U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\omega'(x)}{|x|^{p-1}} = 0.$$

Так как $\psi'(0) = \omega'(0) = 0$, то 0 – экстремаль функций ψ, ω, f . Если у функции ψ нет ненулевых экстремалей, то назовем функцию ψ невырожденной. Сохраним обозначение ψ за продолжением ψ на все пространство H с сохранением однородности. Для функции $\psi: H \rightarrow \mathbb{R}$ множество $M_0 = \{x \in H, \psi(x) \leq 0\}$ коническое: если $x \in M_0$, то и $\lambda x \in M_0$ при любом $\lambda \geq 0$.

ЛЕММА 4. Пусть функция f допускает представление (15) и ψ невырожденная функция. Тогда типовые числа $m_l(0, f)$ нулевой экстремали функции f вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} m_0(0, f) &= 0, & m_1(0, f) &= b_0(M_0 \cap \partial B_H) - 1, \\ m_l(0, f) &= b_{l-1}(M_0 \cap \partial B_H), & l &\geq 2, \end{aligned} \quad (16)$$

в которых $m_k(M_0 \cap \partial B_H)$ – k -е число Бетти пространства $M_0 \cap \partial B_H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем семейство функций $f_\lambda = \psi + \lambda\omega$, $0 \leq \lambda \leq 1$. В предположениях леммы каждая точка μ из $[0, 1]$ является правильной для уравнения (14), в котором $\mathcal{F}(x, \lambda) = \psi'(x) + \lambda\omega'(x)$. Это вытекает из невырожденности функции ψ . Согласно следствию 1 функция $\lambda \rightarrow m_l(0, f_\lambda)$ локально постоянна на $[0, 1]$. Ввиду этого данная функция постоянна на $[0, 1]$, поэтому $m_l(0, f) = m_l(0, f_1) = m_l(0, f_0) = m_l(0, \psi)$. Теперь формулы (16) вытекают из результатов работы [7]. Лемма доказана.

Для функционалов на бесконечномерных пространствах предположение о двукратной непрерывной дифференцируемости в ряде важных случаев является слишком жестким [4], [5; § 3.9]. Один из способов преодоления возникающих здесь трудностей основан на восходящей к идеям Ляпунова–Шмидта редукции бесконечномерных экстремальных задач к конечномерным (см., например, [5], [15], [16]). Излагаемый ниже подход относится к асимптотически однородным функционалам с линейно входящим параметром.

Пусть X – сепарабельное рефлексивное пространство, $U = R_0 \mathring{B}_X$, $0 < R_0 < \infty$, g и h – функционалы класса $C^1(U)$, $g(0) = h(0) = 0$, $g'(0) = h'(0) = 0$. Изучается задача о точках бифуркации уравнения

$$g'(x) + \lambda h'(x) = 0. \quad (17)$$

Функционалы g, h удовлетворяют следующим условиям:

- С₁) оператор $h': U \rightarrow X^*$ вполне непрерывен, сужение оператора $g': U \rightarrow X^*$ на шар RB_X , $0 < R < R_0$, принадлежит классу $S(RB_X)$;
 С₂) справедливы соотношения

$$c_0 \|x\|^p - \omega_0(x) \leq g(x) = p\langle x, g'(x) \rangle + \omega_1(x), \quad h(x) = p\langle x, h'(x) \rangle + \omega_2(x), \quad (18)$$

где $1 < p < \infty$, $c_0 > 0$, $\omega_i(x) = o(\|x\|^p)$ при $x \rightarrow 0$, $i = 0, 1, 2$;

- С₃) при малых $t > 0$ множества $Q_t = \{x \in U, g(x) \leq t\}$ выпуклы.

Из условия С₁) вытекает, что семейство функционалов $f_\lambda = g + \lambda h$ ($\lambda \in J$) задает деформацию класса $\Lambda_1(RB_X)$ при любом выборе отрезка $J \subset \mathbb{R}$ и любом R из $(0, R_0)$. Условие С₂) созвучно асимптотической p -однородности функционалов g, h . Отметим, что $\theta_X(Q_t, 0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Назовем μ *правильной* точкой для уравнения (17), если найдется такое $\varepsilon > 0$, что при λ из $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ уравнение (17) имеет в шаре εB_X единственное (нулевое) решение. Правильность точки μ влечет за собой изолированность нулевой экстремали функционалов f_λ для всех λ из некоторой окрестности точки μ . В частности, определены типовые числа $m_l(0, f_\lambda)$ нулевой экстремали f_λ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть μ – правильная точка для уравнения (17). Тогда справедливо заключение теоремы 3 с $f_\lambda = g + \lambda h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить условие (13) для некоторого выпуклого замкнутого множества $Q \subset U$, $0 \in \mathring{Q}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ так, что при λ из $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ уравнение (17) имеет в шаре εB_X единственное (нулевое) решение. В силу условий С₂), С₃) найдется такое $\delta > 0$, что при $t \in (0, \delta)$ справедливо включение $Q_t \subset \varepsilon \mathring{B}_X$.

Пусть $0 < t < \delta$, $Q = Q_t$,

$$\mathfrak{N}(\mu) = \{x \in Q, 0 \in g'(x) + \mu h'(x) + N_Q(x)\}.$$

Из определения конуса $N_Q(x)$ и множества $\mathfrak{N}(\mu)$ вытекает равенство

$$\mathfrak{N}(\mu) = \{0\} \cup \{x \in U, g(x) = t, g'(x) + \mu h'(x) + \xi g'(x) = 0, \text{ где } \xi - \text{некоторое положительное число}\}. \quad (19)$$

Если $x \in \mathfrak{N}(\mu) \cap f_\mu^{-1}(0)$, то наряду с (19) справедливо равенство

$$f_\mu(x) = g(x) + \mu h(x) = 0. \quad (20)$$

Объединяя (18)–(20), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} 0 &= g(x) + \mu h(x) = p\langle x, g'(x) \rangle + \omega_1(x) + \mu\langle x, h'(x) \rangle + \mu\omega_2(x) \\ &= -p\xi\langle x, g'(x) \rangle + \omega_1(x) + \mu\omega_2(x), \end{aligned}$$

в силу которого для $x \neq 0$ имеют место равенства

$$\xi = \frac{\omega_1(x) + \mu\omega_2(x)}{p\langle x, g'(x) \rangle}, \quad g(x) = t.$$

При малых $t > 0$ условие (13) выполнено с $Q = Q_t$. В предположении противного найдутся последовательности $t_n > 0$, $x_n \in X$, ξ_n , удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} g'(x_n) + \mu h'(x_n) + \xi_n g'(x_n) &= 0, \quad g(x_n) = t_n \rightarrow 0, \\ \xi_n &= \frac{\omega_1(x_n) + \mu\omega_2(x_n)}{p\langle x_n, g'(x_n) \rangle}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$g'(x_n) + \frac{\mu}{1 + \xi_n} h'(x_n) = 0, \quad x_n \neq 0, \quad x_n \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0.$$

Но это противоречит правильности точки μ . Следствие доказано.

Число λ_0 есть точка бифуркации уравнения (17), если найдутся такие последовательности $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$, что x_n есть решение уравнения (17) при $\lambda = \lambda_n$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть λ_0 – точка смены типового числа нулевой экстремали функционала $f_\lambda = g + \lambda h$. Тогда λ_0 есть точка бифуркации для уравнения (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опускается; оно аналогично доказательству следствия 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Установленные в статье достаточные условия существования точки бифуркации при дополнительных предположениях относительно пространства X , гладкости и структуры функционала $f_\lambda: X \rightarrow \mathbb{R}$ являются необходимыми или близки к ним [1], [4], [5], [15], [16]. Основные результаты относятся здесь к дважды дифференцируемым на гильбертовом пространстве функционалам с линейно входящим параметром. Развита выше схема применима к липшицевым функционалам на банаховых пространствах. Фигурирующие в п. 3 предположения о дифференцируемости функционалов не являются принципиальными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975.
- [2] С. И. Похожаев, “О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **1**:3 (1967), 66–73.
- [3] F. E. Browder, “Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**:5 (1970), 999–1005.
- [4] И. В. Скрыпник, *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, Наукова думка, Киев, 1973.
- [5] Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. К. Коровин, *Геометрические методы в вариационных задачах*, Изд-во “Магистр”, М., 1998.
- [6] В. С. Климов, “О топологических характеристиках негладких функционалов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:5 (1998), 117–134.
- [7] В. С. Климов, “Типовые числа критических точек негладких функционалов”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 693–705.
- [8] В. С. Климов, Н. В. Сенчакова, “Об относительном вращении потенциальных векторных полей”, *Матем. сб.*, **182**:10 (1991), 1393–1407.
- [9] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, “Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений”, *УМН*, **35**:1 (1980), 59–126.
- [10] А. В. Дмитрук, А. А. Милотин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6 (1980), 11–46.
- [11] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Мир, М., 1988.
- [12] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976.
- [13] У. Масси, *Теория гомологий и когомологий*, Мир, М., 1981.
- [14] М. М. Постников, *Введение в теорию Морса*, Наука, М., 1971.
- [15] П. И. Плотников, “Неединственность решений задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:2 (1991), 339–366.
- [16] Ю. И. Сапронов, “Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах”, *УМН*, **51**:1 (1996), 101–132.

В. С. Климов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: gryaznova@yar1.cbr.ru

Поступило

17.08.2005