Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О поверхности Фано вещественной кват-
тики, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 83–97

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 09:52:14

О поверхности Фано вещественной кватрики

В. А. Краснов

Доказываются некоторые свойства поверхности Фано бикасательных к вещественной кватрике в трехмерном проективном пространстве. В частности, получена оценка размерности пространства когомологий вещественной части этой поверхности через размерность пространства когомологий вещественной части кватрики, а также вычисляется ее эйлерова характеристика.

Библиография: 12 названий.

Введение. Пусть сначала $Q \subset \mathbb{P}^3$ – неособая комплексная кватрика, т.е. алгебраическая поверхность четвертой степени в комплексном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Тогда множество бикасательных к кватрике Q содержится в многообразии Грассмана $G(4, 2)$; будем обозначать это множество через $F_Q = F$. Это множество является комплексной алгебраической поверхностью, которая может иметь особые точки; она называется *поверхностью Фано кватрики Q* . Будем предполагать, что кватрика Q не содержит прямых; тогда поверхность Фано F будет неособой (см. [1]). Если кватрика $Q \subset \mathbb{P}^3$ вещественная, т.е. определяется уравнением с вещественными коэффициентами, то поверхность Фано F будет также вещественной поверхностью. Множество вещественных точек $\mathbb{R}F$ поверхности F состоит из вещественных бикасательных к кватрике Q ; это множество всегда непустое, даже в случае, когда вещественная часть $\mathbb{R}Q$ кватрики Q пуста. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть бикасательные к вещественному плоскому сечению кватрики Q (см. [2]). Заметим, что вещественная бикасательная к кватрике Q может не иметь вещественных точек касания; тогда вещественная часть бикасательной не пересекается со множеством вещественных точек $\mathbb{R}Q$ кватрики Q .

Работа посвящена изучению топологической поверхности $\mathbb{R}F$. Прежде всего заметим, что из результатов в [1] нетрудно вывести

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. *Для эйлеровой характеристики поверхности $\mathbb{R}F$ справедливо равенство $\chi(\mathbb{R}F) = -8$.*

Наша главная цель – получить оценку размерности пространства $H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$, где $H^*(\cdot, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H^q(\cdot, \mathbb{F}_2)$, а $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Из результатов в [1] вытекает равенство $\dim H^*(F, \mathbb{F}_2) = 276$, поэтому неравенство Гарнака–Смита–Тома дает следующую оценку:

$$\dim H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq 276, \quad (0.1)$$

но мы пытаемся получить оценку размерности пространства $H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2)$ через размерность пространства $H^*(\mathbb{R}Q, \mathbb{F}_2)$. В данной работе доказана

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть $C \subset Q$ – вещественное плоское сечение кватрики Q , $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q, \mathbb{F}_2)$ – соответствующий класс гомологий, а также

$$m = \begin{cases} \frac{1}{2} \dim H^*(\mathbb{R}Q, \mathbb{F}_2), & \text{если } \mathbb{R}Q \neq \emptyset, [\mathbb{R}C] = 0, \\ \frac{1}{2} \dim H^*(\mathbb{R}Q, \mathbb{F}_2) - 2, & \text{если } \mathbb{R}Q \neq \emptyset, [\mathbb{R}C] \neq 0, \\ 1, & \text{если } \mathbb{R}Q = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) \leq 2m^2 + 6m + 16.$$

Заметим, что из определения числа m вытекает оценка $m \leq 10$ (см. [3], [4]). Поэтому из неравенства в теореме 0.2 следует неравенство (0.1).

При доказательстве предложения 0.1 и теоремы 0.2 мы применяем результаты о поверхности Фано двулистного накрытия проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением вдоль кватрики Q , изложенные в работах [1], [5].

1. Когомологии двойного пространства. Далее $\widehat{\mathbb{P}}^3$ – двулистное накрытие комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^3$ с ветвлением вдоль неособой кватрики $Q \subset \mathbb{P}^3$. Многообразие $\widehat{\mathbb{P}}^3$ будем называть *двойным пространством* (см. [5]). Для групп когомологий этого пространства выполняются равенства (см., например, [1])

$$H^1(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = H^4(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{20}.$$

Так как

$$H^1(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

также выполняется равенство

$$\text{Pic}(\widehat{\mathbb{P}}^3) = H^2(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Пусть $p: \widehat{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – проекция и $h \in \text{Pic}(\widehat{\mathbb{P}}^3)$ – класс дивизора $\widehat{\mathbb{P}}^2 = p^{-1}(\mathbb{P}^2)$ на $\widehat{\mathbb{P}}^3$, где $\mathbb{P}^2$ – плоскость в $\mathbb{P}^3$. Тогда класс h является образующей группы $\text{Pic}(\widehat{\mathbb{P}}^3) = H^2(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Через $\sigma: \widehat{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^3$ будем обозначать инволюцию двойного накрытия $p: \widehat{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$. Тогда гомоморфизм

$$\sigma^*: H^q(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})$$

тривиален при $q = 0, 2, 4, 6$, а при $q = 3$ он совпадает с умножением на -1 .

Будем предполагать, что кватрика Q вещественная; тогда определены инволюции комплексного сопряжения

$$g: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3, \quad g: Q \rightarrow Q,$$

а на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}}^3$ возникают две антиголоморфные инволюции

$$g_{\pm}: \widehat{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^3,$$

накрывающие инволюцию $g: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$. Для них справедливо равенство $g_- = \sigma \circ g_+$. Через $\widehat{\mathbb{P}}^3_{\pm}$ будем обозначать пары $(\widehat{\mathbb{P}}^3, g_{\pm})$, а через $G_{\pm}$ обозначим группы второго порядка $\{1, g_{\pm}\}$. В этом пункте мы хотим вычислить группы когомологий

$$H^1(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})), \quad H^2(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})).$$

Прежде всего заметим, что они являются 2-периодическими группами и справедливы равенства (см., например, [6])

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})) &= \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z})) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)) \\ &= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{F}_2} H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)^{G_{\pm}} / (1 + g_{\pm}) H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2). \end{aligned}$$

Так как инволюция

$$\sigma^*: H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)$$

тривиальна, из соотношения $g_- = \sigma \circ g_+$ вытекает равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_-, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G_+, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)).$$

Поэтому группу $H^1(G_{\pm}, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2))$ будем обозначать через $H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2))$. Заметим также, что выполняется равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^1(G, H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)),$$

поэтому достаточно вычислить размерность пространства

$$H^1(G, H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)) = H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2)^G / (1 + g) H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{F}_2).$$

Из длинной точной гомологической последовательности пары $(\mathbb{P}^3, Q)$ вытекает следующая короткая точная последовательность:

$$0 \rightarrow H_3(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\partial} H_2(Q) \xrightarrow{\text{in}_*} H_2(\mathbb{P}^3) \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где группы гомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, ∂ – граничный гомоморфизм, а гомоморфизм in_* индуцирован вложением $\text{in}: Q \rightarrow \mathbb{P}^3$. Заметим, что $H_2(\mathbb{P}^3) = \mathbb{F}_2$, а гомоморфизм in_* устроен следующим образом. Если C – комплексная кривая, полученная пересечением квартики Q общей плоскостью $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$, то выполняется равенство $\text{in}_*(a) = (a, [C])$, где $(a, [C]) \in \mathbb{F}_2$ – индекс пересечения классов гомологий из $H_2(Q)$. Ядро линейной формы $\text{in}_*(a) = (a, [C])$ на пространстве $H_2(Q)$ будем обозначать через $H_2(Q)^0$. Тогда граничный гомоморфизм

$$\partial: H_3(\mathbb{P}^3, Q) \rightarrow H_2(Q)^0$$

станет изоморфизмом.

Рассмотрим длинную точную гомологическую последовательность Смита накрытия $p: \widehat{\mathbb{P}}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ (см., например, [7])

$$\dots \xrightarrow{p_*} H_4(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\Delta} H_3(\mathbb{P}^3, Q) \oplus H_3(Q) \xrightarrow{\text{tr}_* \oplus \text{in}_*} H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3) \xrightarrow{p_*} H_3(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\Delta} \dots,$$

в которой группы гомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$, а гомоморфизмы определяются следующим образом. Гомоморфизм Δ устроен по правилу: $a \mapsto a \cap \omega \oplus \partial a$, где $\omega \in H^1(\mathbb{P}^3 \setminus Q)$ – характеристический класс накрытия $p: \widehat{\mathbb{P}}^3 \setminus Q \rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus Q$. Гомоморфизм tr_* является трансфером, а гомоморфизм in_* индуцирован вложением $\text{in}: Q \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^3$. Из длинной точной последовательности Смита вытекает следующая короткая точная последовательность:

$$0 \rightarrow H_4(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\cap \omega} H_3(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\text{tr}_*} H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3) \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Заметим, что $H_4(\mathbb{P}^3, Q) = \mathbb{F}_2$, а образ этой группы при композиции гомоморфизмов

$$H_4(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\cap\omega} H_3(\mathbb{P}^3, Q) \xrightarrow{\partial} H_2(Q)$$

равен одномерному подпространству $\mathbb{F}_2 \cdot [C]$. Это утверждение вытекает из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H_4(\mathbb{P}^2, C) & \xrightarrow[\approx]{\cap\omega} & H_3(\mathbb{P}^2, C) & \xrightarrow[\approx]{\partial} & H_2(C) = \mathbb{F}_2 \cdot [C] \\ \downarrow \approx & & \downarrow & & \downarrow \\ H_4(\mathbb{P}^3, Q) & \xrightarrow{\cap\omega} & H_3(\mathbb{P}^3, Q) & \xrightarrow{\partial} & H_2(Q). \end{array}$$

Если мы теперь рассмотрим факторпространство

$$H_2(Q)_0 = H_2(Q)^0 / \mathbb{F}_2 \cdot [C],$$

то получим, что определен канонический изоморфизм

$$\mathrm{tr}_* \circ \partial^{-1} : H_2(Q)_0 \rightarrow H_3(\widehat{\mathbb{P}^3}). \quad (1.3)$$

Все гомоморфизмы в точных последовательностях (1.1), (1.2) коммутируют с инволюцией g_* , поэтому на пространстве $H_2(Q)_0$ действует группа G , а изоморфизм (1.3) коммутирует с этим действием. Следовательно, выполняется равенство

$$\dim H^1(G, H_3(\widehat{\mathbb{P}^3})) = \dim H^1(G, H_2(Q)_0).$$

Таким образом, достаточно вычислить размерность пространства $H^1(G, H_2(Q)_0)$.

ЛЕММА 1.1. *Выполняется следующее равенство:*

$$\dim H^1(G, H_2(Q)^0) = \begin{cases} \dim H^1(G, H_2(Q)) + 1, & \text{если } [C] \in (1 + g)H_2(Q), \\ \dim H^1(G, H_2(Q)) - 1, & \text{если } [C] \notin (1 + g)H_2(Q). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из короткой точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow H_2(Q)^0 \rightarrow H_2(Q) \xrightarrow{(\cdot, [C])} \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G, H_2(Q)^0) \rightarrow H^0(G, H_2(Q)) &\xrightarrow{(\cdot, [C])} \mathbb{F}_2 \\ &\xrightarrow{\delta} H^1(G, H_2(Q)^0) \rightarrow H^1(G, H_2(Q)) \xrightarrow{(\cdot, [C])} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\delta} \dots \end{aligned}$$

Осталось заметить, что оба гомоморфизма

$$(\cdot, [C]) : H^0(G, H_2(Q)) \rightarrow \mathbb{F}_2, \quad (\cdot, [C]) : H^1(G, H_2(Q)) \rightarrow \mathbb{F}_2$$

нулевые, если $[C] \in (1 + g)H_2(Q)$, а в противном случае эти гомоморфизмы ненулевые. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.2. *Выполняется следующее равенство:*

$$\dim H^1(G, H_2(Q)_0) = \begin{cases} \dim H^1(G, H_2(Q)^0) + 1, & \text{если } [C] \in (1+g)H_2(Q)^0, \\ \dim H^1(G, H_2(Q)^0) - 1, & \text{если } [C] \notin (1+g)H_2(Q)^0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из короткой точной последовательности G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \cdot [C] \rightarrow H_2(Q)^0 \rightarrow H_2(Q)_0 \rightarrow 0$$

получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathbb{F}_2 \cdot [C]) \rightarrow H^1(G, H_2(Q)^0) \rightarrow H^1(G, H_2(Q)_0) \xrightarrow{\delta} H^2(G, \mathbb{F}_2 \cdot [C]) \\ \rightarrow H^2(G, H_2(Q)^0) \rightarrow H^2(G, H_2(Q)_0) \xrightarrow{\delta} \cdots \end{aligned}$$

Осталось заметить, что оба гомоморфизма

$$H^1(G, \mathbb{F}_2 \cdot [C]) \rightarrow H^1(G, H_2(Q)^0), \quad H^2(G, \mathbb{F}_2 \cdot [C]) \rightarrow H^2(G, H_2(Q)^0)$$

нулевые, если $[C] \in (1+g)H_2(Q)^0$, а в противном случае эти гомоморфизмы ненулевые. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. *Если $[C] \in (1+g)H_2(Q)$, то $[C] \in (1+g)H_2(Q)^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $[C]_{\mathbb{Z}}$ класс гомологий из $H_2(Q, \mathbb{Z})$, который определяется комплексной кривой $C \subset Q$. Тогда из соотношения $[C] \in (1+g)H_2(Q)$ вытекает существование разложения $[C]_{\mathbb{Z}} = a - g_*(a)$, где $a \in H_2(Q, \mathbb{Z})$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что целочисленный индекс пересечения $(a, [C]_{\mathbb{Z}})$ принимает четное значение. Мы утверждаем, что он равен 2. Это утверждение вытекает из равенств

$$\begin{aligned} g_*([C]_{\mathbb{Z}}) &= -[C]_{\mathbb{Z}}, & (a, [C]_{\mathbb{Z}}) &= (g_*(a), g_*([C]_{\mathbb{Z}})) = -(g_*(a), [C]_{\mathbb{Z}}), \\ 2(a, [C]_{\mathbb{Z}}) &= (a - g_*(a), [C]_{\mathbb{Z}}) = ([C]_{\mathbb{Z}}, [C]_{\mathbb{Z}}) = 4. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. *Если множество $\mathbb{R}Q$ непустое, то соотношение $[C] \in (1+g)H_2(Q)$ равносильно равенству нулю класса гомологий $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогичное утверждение справедливо для произвольной неособой полной вещественной алгебраической поверхности S , удовлетворяющей условию $H_1(S, \mathbb{F}_2) = 0$, и для произвольной вещественной алгебраической кривой C на ней (см., например, [8]). Лемма доказана.

Из доказанных лемм вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ непустое. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если класс гомологий $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q)$ равен нулю, то выполняется равенство*

$$\dim H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}^3})) = \dim H^1(G, H^2(Q)) + 2;$$

- 2) если класс гомологий $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q)$ не равен нулю, то выполняется равенство

$$\dim H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3)) = \dim H^1(G, H^2(Q)) - 2.$$

Если множество $\mathbb{R}Q$ непустое, то вещественная поверхность Q является GM -поверхностью (см. [6]), т.е. выполняется равенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}Q) = \dim H^1(G, H^*(Q)),$$

где $H^*(\cdot) = \bigoplus_q H^q(\cdot, \mathbb{F}_2)$. Поэтому из предложения 1.5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Пусть множество вещественных точек $\mathbb{R}Q$ непустое. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если класс гомологий $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q)$ равен нулю, то выполняется равенство

$$\dim H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3)) = \dim H^*(\mathbb{R}Q);$$

- 2) если класс гомологий $[\mathbb{R}C] \in H_1(\mathbb{R}Q)$ не равен нулю, то выполняется равенство

$$\dim H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3)) = \dim H^*(\mathbb{R}Q) - 4.$$

Рассмотрим теперь случай, когда множество $\mathbb{R}Q$ пустое. Тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Если множество $\mathbb{R}Q$ пустое, то выполняется равенство

$$H^1(G, H^3(\widehat{\mathbb{P}}^3)) = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $\mathbb{R}Q$ пустое, то одно из множеств $\mathbb{R}\widehat{\mathbb{P}}_{\pm}^3$ также пустое, а другое гомеоморфно несвязной сумме двух экземпляров проективного пространства $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$. Мы можем считать, что

$$\mathbb{R}\widehat{\mathbb{P}}_+^3 = \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \sqcup \mathbb{R}\mathbb{P}^3.$$

Тогда класс гомологий

$$[\mathbb{R}\widehat{\mathbb{P}}_+^2] \in H_2(\mathbb{R}\widehat{\mathbb{P}}_+^3)$$

не равен нулю. Поэтому вещественное алгебраическое многообразие $\widehat{\mathbb{P}}_+^3$ является GM -многообразием (см., например, [9]), т.е. выполняется равенство

$$\dim H^*(\mathbb{R}\widehat{\mathbb{P}}_+^3) = \dim H^1(G_+, H^*(\widehat{\mathbb{P}}_+^3)).$$

Из этого равенства получаем, что $\dim H^1(G_+, H^3(\widehat{\mathbb{P}}_+^3)) = 2$. Предложение доказано.

2. Когомологии поверхностей Фано. Для двойного пространства $\widehat{\mathbb{P}}^3$ определена связная комплексная поверхность Фано $\widehat{F}$, точками которой являются “прямые” на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}}^3$ (см. [1]). По определению прямая на $\widehat{\mathbb{P}}^3$ – это кривая, которая имеет степень, равную 1. Степень кривой на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}}^3$ определяется относительно образующей $h \in \text{Pic}(\widehat{\mathbb{P}}^3)$.

В этом пункте мы вычисляем кольцо когомологий

$$H^*(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{q=0}^4 H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z}),$$

а точнее, дополняем результаты об этом кольце из [1]. Мы предполагаем, что квартика $Q \subset \mathbb{P}^3$ не содержит прямых, тогда поверхность Фано $\widehat{F}$ неособая (см. [1]). В работе [1] доказаны следующие равенства:

$$H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{20}, \quad H^3(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{20}, \quad H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{422}. \quad (2.1)$$

Если L – прямая на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}^3}$, то ее образ l при проекции $p: \widehat{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathbb{P}^3$ будет прямой в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, причем эта прямая является бикасательной квартики Q . Поэтому определено отображение $\pi: \widehat{F} \rightarrow F$, которое прямой $L \in \widehat{F}$ сопоставляет прямую $l \in F$. Это отображение является неразветвленным двулистным накрытием, поэтому определена инволюция этого накрытия $\sigma: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$. Эта инволюция устроена следующим образом. Если l – бикасательная квартики Q , то ее прообраз при отображении $p: \widehat{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathbb{P}^3$ состоит из двух прямых L_1, L_2 на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}^3}$, а инволюция $\sigma: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ переставляет эти прямые. Фактически, инволюция $\sigma: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ индуцируется инволюцией $\sigma: \widehat{\mathbb{P}^3} \rightarrow \widehat{\mathbb{P}^3}$ разветвленного накрытия $p: \widehat{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathbb{P}^3$ (см. [1]).

Таким образом, кольцо когомологий $H^*(\widehat{F}, \mathbb{Z})$ является алгеброй над групповым кольцом $\mathbb{Z}[\Sigma]$, где $\Sigma = \{1, \sigma\}$ – группа второго порядка, порожденная инволюцией σ . Далее мы вычисляем действие инволюции σ на группах $H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})$ при каждом q . Через $H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})_{\pm}$ будем обозначать подгруппу группы $H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})$, на которой инволюция σ действует умножением на ± 1 . Тогда, конечно, выполняются равенства

$$H^0(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ = H^0(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \quad H^4(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ = H^4(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \quad (2.2)$$

но, кроме этого (см. [1]),

$$H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- = H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \quad H^3(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- = H^3(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \quad (2.3)$$

$$H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ = \mathbb{Z}^{190}, \quad H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- = \mathbb{Z}^{232}. \quad (2.4)$$

Заметим, что равенства (2.4) не описывают полностью действие инволюции σ на группе $H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})$; в связи с этим покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *В группе $H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})$ существует базис*

$$a_1, b_1, \dots, a_{190}, b_{190}, c_1, \dots, c_{42}$$

такой, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \sigma(a_1) = b_1, \quad \sigma(b_1) = a_1, \quad \dots, \quad \sigma(a_{190}) = b_{190}, \quad \sigma(b_{190}) = a_{190}, \\ \sigma(c_1) = -c_1, \quad \dots, \quad \sigma(c_{42}) = -c_{42}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим факторгруппы

$$H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / (1 + \sigma)H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \quad H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- / (1 - \sigma)H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}).$$

Они являются векторными пространствами над полем из двух элементов $\mathbb{F}_2$. Фактически, мы должны доказать равенства

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / (1 + \sigma)H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- / (1 - \sigma)H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}) = 42. \quad (2.5)$$

Так как инволюция $\sigma: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ не имеет неподвижных точек, выполняются равенства

$$H^q(F, \mathbb{Z}) = H^q(\widehat{F}/\Sigma, \mathbb{Z}) = H^q(\widehat{F}, \Sigma; \mathbb{Z}),$$

где $H^q(\widehat{F}, \Sigma; \mathbb{Z})$ – группа эквивариантных когомологий (см. определение и свойства эквивариантных когомологий, например, в [6], [7], [10]). Рассмотрим спектральную последовательность Бореля–Хохшильда–Серра:

$$E_2^{p,q} = H^p(\Sigma, H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(\widehat{F}, \Sigma; \mathbb{Z}). \quad (2.6)$$

Для когомологий группы Σ , которые в ней участвуют, выполняются равенства

$$\begin{aligned} H^0(\Sigma, H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})) &= H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+, & H^{2p}(\Sigma, H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})) &= H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / (1 + \sigma) H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \\ H^{2p-1}(\Sigma, H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})) &= H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- / (1 - \sigma) H^q(\widehat{F}, \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

где $p > 0$.

С помощью равенств (2.1)–(2.3) мы можем вычислить все члены $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности (2.6) при $q \neq 2$, а именно, получаем

$$\begin{aligned} E_2^{0,0} = E_2^{0,4} = \mathbb{Z}, & \quad E_2^{2p,0} = E_2^{2p,4} = \mathbb{Z}/2 \quad (p > 0), & \quad E_2^{2p-1,0} = E_2^{2p-1,4} = 0 \quad (p > 0), \\ E_2^{2p,1} = E_2^{2p,3} = 0 \quad (p \geq 0), & \quad E_2^{2p+1,1} = E_2^{2p+1,3} = (\mathbb{Z}/2)^{20} \quad (p \geq 0). \end{aligned}$$

Поэтому из спектральной последовательности (2.6) вытекает равенство $H^1(F, \mathbb{Z}) = 0$, так как $E_2^{1,0} = E_2^{0,1} = 0$.

Покажем теперь, что гомоморфизм

$$\pi^*: H^2(F, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ \quad (2.7)$$

является эпиморфизмом, а также выполняется равенство

$$H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{190} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{21}. \quad (2.8)$$

Действительно, гомоморфизм (2.7) совпадает с гомоморфизмом забывания Σ -структуры на поверхности $\widehat{F}$:

$$H^2(\widehat{F}, \Sigma; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ = E_2^{0,2}, \quad (2.9)$$

который является краевым гомоморфизмом, полученным из спектральной последовательности (2.6). Так как $E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0$, дифференциалы $d_2^{0,2}, d_3^{0,2}$ равны нулю. Следовательно, гомоморфизм (2.9) является эпиморфизмом.

Ядро гомоморфизма (2.9) всегда является векторным $\mathbb{F}_2$ -пространством и размерность его равна сумме размерностей $\mathbb{F}_2$ -пространств $E_\infty^{2,0}, E_\infty^{1,1}$. Так как $E_2^{0,1} = E_2^{3,0} = 0$, дифференциалы $d_2^{0,1}, d_2^{1,1}$ равны нулю. Поэтому выполняются равенства

$$E_\infty^{2,0} = E_2^{2,0} = \mathbb{Z}/2, \quad E_\infty^{1,1} = E_2^{1,1} = (\mathbb{Z}/2)^{20}.$$

Следовательно, справедливо разложение (2.8).

Из равенств

$$H^1(F, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{190} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{21}$$

вытекает равенство $H^3(F, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2)^{21}$. Из этого равенства, спектральной последовательности (2.6) и равенств $E_2^{0,3} = E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0$ вытекают следующие равенства:

$$E_\infty^{1,2} = E_4^{1,2} = H^3(F, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2)^{21}.$$

Кроме них выполняются следующие общие равенства для свободной абелевой группы с инволюцией (см., например, [6]):

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^2(\Sigma, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = \text{rk } H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ - a = 190 - a, \quad (2.10)$$

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(\Sigma, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = \text{rk } H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_- - a = 232 - a, \quad (2.11)$$

где

$$a = \dim_{\mathbb{F}_2} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}) / (H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ \oplus H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_-).$$

Покажем, что $a = 190$. Тогда из равенств (2.10), (2.11) будут вытекать равенства (2.5).

Из равенства (2.10) получаем неравенство $a \leq 190$; следовательно, из равенства (2.11) вытекает неравенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^1(\Sigma, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})) \geq 42,$$

т.е. $\dim E_2^{1,2} \geq 42$. Так как

$$E_2^{0,3} = E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0, \quad \dim E_2^{3,1} = 20, \quad \dim E_2^{4,0} = 1,$$

доказанное ранее равенство $\dim E_4^{1,2} = 21$ может выполняться только в случае, когда дифференциалы

$$d_2^{1,2}: E_2^{1,2} \rightarrow E_2^{3,1} = (\mathbb{Z}/2)^{20}, \quad d_3^{1,2}: E_3^{1,2} \rightarrow E_3^{4,0} = \mathbb{Z}/2$$

являются эпиморфизмами и выполняется равенство $\dim E_2^{1,2} = 42$. Тогда из равенства (2.11) получаем, что $a = 190$. Поэтому справедливы равенства (2.5). Предложение доказано.

Заметим, что при доказательстве предложения 2.1 были также получены следующие равенства:

$$H^1(F, \mathbb{Z}) = 0, \quad H^2(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{190} \oplus (\mathbb{Z}/2)^{21}, \quad (2.12)$$

причем имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^{21} \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

В работе [1] показано, что гомоморфизм

$$\lambda: \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z}),$$

определенный с помощью $\cup$ -умножения, является мономорфизмом. Далее мы хотим описать образ этого гомоморфизма.

Пусть $D_L \subset \widehat{F}$ – кривая инцидентности прямой $L \in \widehat{F}$ на поверхности Фано $\widehat{F}$. По определению она состоит из прямых на $\widehat{\mathbb{P}}^3$, пересекающих прямую L . Тогда класс гомологий $[D_L] \in H_2(\widehat{F}, \mathbb{Z})$ не зависит от выбора прямой L (см. [1]). Так как $\sigma_*([D_L]) = [D_{\sigma(L)}]$, то $[D_L] \in H_2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+$. Покажем, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Факторгруппа*

$$H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / \lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$$

является циклической группой третьего порядка, причем факторкласс двойственного класса когомологий $[D_L]^* \in H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+$ будет образующей этой циклической группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через b билинейную форму на $H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})$, заданную $\cup$ -умножением. Ограничения этой формы на подгруппы $H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+$, $\lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$ обозначим через b_+ , b_0 соответственно. Заметим, что факторгруппа

$$H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / \lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$$

будет циклической группой третьего порядка, если выполняется следующее соотношение для дискриминантов билинейных форм:

$$|\mathrm{Discr}(b_0)| = 9 \cdot |\mathrm{Discr}(b_+)|.$$

Из равенства $a = 190$ вытекает соотношение $|\mathrm{Discr}(b_+)| = 2^{190}$, так как справедливо равенство (см., например, [11]) $a = \log_2 |\mathrm{Discr}(b_+)|$. Поэтому нужно показать, что $|\mathrm{Discr}(b_0)| = 9 \cdot 2^{190}$. Для доказательства этого соотношения будем использовать отображение Абеля–Якоби $\alpha: \widehat{F} \rightarrow J$, где J – средний якобиан двойного проективного пространства $\mathbb{P}^3$. Это отображение является вложением (см. [1]), причем класс гомологий образа $[\alpha(\widehat{F})] \in H_4(J, \mathbb{Z})$ равен классу гомологий

$$T = \frac{2 \cdot [\Theta]^8}{8!}, \quad (2.14)$$

где $[\Theta]$ – класс гомологий Θ -дивизора (см. [5]). Так как гомоморфизм

$$\alpha^*: H^1(J, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом (см. [1]), мы можем отождествить с помощью мономорфизма

$$\alpha^*: H^2(J, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})$$

группу $\lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$ с группой когомологий $H^2(J, \mathbb{Z})$. Тогда билинейная форма b_0 на $H^2(J, \mathbb{Z})$ определяется равенством

$$b_0(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 \cup \omega_2)(T).$$

Обозначим через $\Omega \in H^{16}(J, \mathbb{Z})$ класс когомологий, двойственный классу гомологий $T \in H_4(J, \mathbb{Z})$. Тогда получим равенство

$$b_0(\omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_1 \cup \omega_2 \cup \Omega}{[J]^*}. \quad (2.15)$$

Существует базис $\theta_1, \dots, \theta_{20}$ группы $H^1(J, \mathbb{Z})$ такой, что выполняется разложение

$$[\Theta]^* = \sum_{k=1}^{10} \theta_k \cup \theta_{k+10}.$$

Из формулы (2.14) вытекает, что в этом базисе класс когомологий Ω имеет разложение

$$\Omega = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 10} \theta_1 \cup \theta_{11} \cup \dots \cup \widehat{\theta_i} \cup \widehat{\theta_{i+10}} \cup \dots \cup \widehat{\theta_j} \cup \widehat{\theta_{j+10}} \cup \dots \cup \theta_{10} \cup \theta_{20},$$

где крышечка над сомножителем означает, что он опускается. Заметим также, что выполняется равенство

$$[J]^* = \theta_1 \cup \dots \cup \theta_{20}.$$

Так как классы гомологий $\theta_p \cup \theta_q$, $1 \leq p < q \leq 20$, образуют базис группы $H^2(J, \mathbb{Z})$, из соотношения (2.15) вытекает нужное равенство для дискриминанта $|\text{Discr}(b_0)| = 9 \cdot 2^{190}$.

Для окончания доказательства предложения осталось заметить, что выполняется соотношение (см. [1])

$$\alpha^*([\Theta]^*) = 3 \cdot [D_L]^*.$$

Так класс когомологий $\alpha^*([\Theta]^*) \in \lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$ неделимый, из этого соотношения вытекает, что факторкласс элемента $[D_L]^* \in H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_{\perp}$ является образующей циклической группы третьего порядка $H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ / \lambda(\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}))$. Предложение доказано.

3. Доказательство основных результатов. Сначала докажем предложение 0.1. Для этого применим формулу Лефшеца

$$\chi(\mathbb{R}F) = \mathcal{L}(g^*|H^*(F, \mathbb{C})),$$

где

$$\mathcal{L}(g^*|H^*(F, \mathbb{C})) = \sum_{q=0}^4 (-1)^q \text{Tr}(g^*|H^q(F, \mathbb{C}))$$

– число Лефшеца инволюции

$$g^*: H^*(F, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(F, \mathbb{C}).$$

Из (2.12) получаем равенства для групп когомологий

$$H^1(F, \mathbb{C}) = H^3(F, \mathbb{C}) = 0,$$

а, кроме этого, выполняются очевидные равенства для следа оператора:

$$\text{Tr}(g^*|H^0(F, \mathbb{C})) = \text{Tr}(g^*|H^4(F, \mathbb{C})) = 1.$$

Поэтому для доказательства предложения 0.1 достаточно установить равенство

$$\text{Tr}(g^*|H^2(F, \mathbb{C})) = -10. \quad (3.1)$$

В [1] показано, что гомоморфизм

$$\lambda: \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{C})_+, \quad (3.2)$$

определенный с помощью $\cup$ -умножения, является изоморфизмом. Заметим, что на поверхности Фано $\widehat{F}$ определены две антиголоморфные инволюции (вещественные

структуры) $g_{\pm}: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$, накрывающие инволюцию $g: F \rightarrow F$. Каждая пара отображений

$$g_{\pm}^*: H^2(\widehat{F}, \mathbb{C})_+ \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{C})_+, \quad g_{\pm}^*: \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{C})$$

состоит из совпадающих инволюций, поэтому мы будем их обозначать через g^* . Заметим, что изоморфизм (3.2) коммутирует с инволюцией g^* .

Так как гомоморфизм

$$\pi^*: H^2(F, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{C})_+$$

также является изоморфизмом, имеем следующий изоморфизм:

$$(\pi^*)^{-1} \circ \lambda: \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(F, \mathbb{C}),$$

коммутирующий с инволюцией g^* . Следовательно, выполняются равенства

$$\mathrm{Tr}(g^*|H^2(F, \mathbb{C})) = \mathrm{Tr}(g^*|\Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{C})) = -10,$$

так как в пространстве $H^1(\widehat{F}, \mathbb{C})$ существует базис $\varphi_1, \dots, \varphi_{10}, \omega_1, \dots, \omega_{10}$ такой, что

$$g^*(\varphi_1) = \varphi_1, \dots, g^*(\varphi_{10}) = \varphi_{10}, \quad g^*(\omega_1) = -\omega_1, \dots, g^*(\omega_{10}) = -\omega_{10}.$$

Равенство (3.1) установлено, поэтому предложение 0.1 доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 0.2.

Хотя бы для одной из инволюций $g_{\pm}: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$ множество неподвижных точек непустое. Зафиксируем такую инволюцию и будем обозначать ее через $g: \widehat{F} \rightarrow \widehat{F}$. Неподвижные точки этой инволюции будем называть *вещественными точками*. Через $\mathbb{R}\widehat{F}$ будем обозначать множество вещественных точек на комплексной поверхности $\widehat{F}$. Выбор вещественной структуры на поверхности Фано $\widehat{F}$ определяет вещественную структуру на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}}^3$. Будем считать, что вещественная структура на двойном пространстве $\widehat{\mathbb{P}}^3$ выбрана согласованно с вещественной структурой на поверхности Фано $\widehat{F}$.

Пусть W – подмногообразие произведения $\widehat{F} \times \widehat{\mathbb{P}}^3$, состоящее из пар (L, x) таких, что прямая L содержит точку x . Тогда две проекции прямого произведения определяют диаграмму

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & \widehat{\mathbb{P}}^3 \\ \downarrow \mathrm{pr} & & \\ \widehat{F} & & \end{array}, \quad (3.3)$$

где $\mathrm{pr}: W \rightarrow \widehat{F}$ – локально тривиальное расслоение со слоем прямая, а $\varphi: W \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^3$ – конечнолистное накрытие. Диаграмма (3.3) называется *семейством Фано двойного пространства $\widehat{\mathbb{P}}^3$* . Она позволяет определить гомоморфизм групп гомологий

$$\Phi: H_1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}),$$

который называется *отображением цилиндра* (см. [12]). По определению отображение цилиндра равно композиции отображений

$$H_1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{pr}^{-1}} H_3(W, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_*} H_3(\widehat{\mathbb{P}}^3, \mathbb{Z}),$$

где отображение pr^{-1} сопоставляет замкнутой кривой γ на $\widehat{F}$ ее прообраз $\mathrm{pr}^{-1}(\gamma)$, который является цилиндром. В [1] доказано, что гомоморфизм цилиндра

$$\Phi: H_1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(\widehat{\mathbb{P}^3}, \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом. Из определения отображения цилиндра следует, что оно антикоммутирует с инволюцией комплексного сопряжения, т.е. выполняется равенство $g_* \circ \Phi = -\Phi \circ g_*$. Следовательно, отображение цилиндра для гомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{F}_2$ является изоморфизмом G -модулей. Поэтому отображение цилиндра индуцирует изоморфизм

$$\Phi_*: H^1(G, H_1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2)) \rightarrow H^1(G, H_3(\widehat{\mathbb{P}^3}, \mathbb{F}_2)).$$

Применим следствие 1.6 и предложение 1.7. Тогда из определения числа m в теореме 0.2 получим равенство

$$\dim H^1(G, H_3(\widehat{\mathbb{P}^3}, \mathbb{F}_2)) = 2m.$$

Поэтому также выполняются равенства

$$\dim H^1(G, H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2)) = \dim H^1(G, H_1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2)) = 2m, \quad \dim H^1(G, H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = m.$$

Равенство $\dim H^1(G, H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = m$ означает, что существует базис

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m, \psi_1, \dots, \psi_m, \omega'_1, \omega''_1, \dots, \omega'_{10-m}, \omega''_{10-m}$$

группы $H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})$ такой, что выполняются равенства

$$g_*(\varphi_1) = \varphi_1, \quad \dots, \quad g_*(\varphi_m) = \varphi_m, \quad g_*(\psi_1) = -\psi_1, \quad \dots, \quad g_*(\psi_m) = -\psi_m, \\ g_*(\omega'_1) = \omega''_1, \quad \dots, \quad g_*(\omega'_{10-m}) = \omega''_{10-m}.$$

Следовательно,

$$\dim H^1(G, \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = m^2 - m + 10, \quad \dim H^2(G, \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) = m^2 - m.$$

Из предложения 2.2 получаем точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\lambda} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ \rightarrow \mathbb{F}_3 \cdot [D_L]^* \rightarrow 0,$$

где $\mathbb{F}_3$ – поле из трех элементов. Так как

$$H^1(G, \mathbb{F}_3 \cdot [D_L]^*) = H^2(G, \mathbb{F}_3 \cdot [D_L]^*) = 0,$$

из этой точной последовательности вытекает, что гомоморфизм G -модулей

$$\lambda: \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+$$

индуцирует изоморфизмы

$$\lambda: H^1(G, \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(G, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+), \\ \lambda: H^2(G, \Lambda^2 H^1(\widehat{F}, \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(G, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+).$$

Поэтому выполняются равенства

$$\dim H^1(G, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+) = m^2 - m + 10, \quad \dim H^2(G, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+) = m^2 - m. \quad (3.4)$$

Из равенств (2.12) следует, что точную последовательность (2.13) можно переписать следующим образом:

$$0 \rightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{B} H^2(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+ \rightarrow 0,$$

где $B: H^1(F, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$ – гомоморфизм Бокштейна. Гомоморфизмы в этой точной последовательности коммутируют с действием группы G , поэтому из нее вытекает неравенство

$$\dim H^p(G, H^2(F, \mathbb{Z})) \leq \dim H^p(G, H^2(\widehat{F}, \mathbb{Z})_+) + \dim H^p(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)), \quad (3.5)$$

где $p = 1, 2$. Рассмотрим теперь гомоморфизм G -модулей

$$\pi^*: H^1(F, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2).$$

Он является эпиморфизмом и его ядро равно $\mathbb{F}_2$. Действительно, его ядро порождается характеристическим классом двулистного накрытия $\pi: \widehat{F} \rightarrow F$, а из равенств

$$\dim H^1(F, \mathbb{F}_2) = 21, \quad \dim H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2) = 20$$

следует эпиморфность этого гомоморфизма. Следовательно, имеем точную последовательность G -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(F, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\pi^*} H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\dim H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) \leq \dim H^1(G, H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2)) + 1.$$

Так как $\dim H^1(G, H^1(\widehat{F}, \mathbb{F}_2)) = 2m$, это неравенство можно переписать следующим образом: $\dim H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) \leq 2m + 1$. Следовательно, при $p = 1, 2$ справедливо неравенство

$$\dim H^p(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)) \leq 2m + 1. \quad (3.6)$$

Из двойственности Пуанкаре вытекает равенство

$$\dim H^1(G, H^3(F, \mathbb{F}_2)) = \dim H^1(G, H^1(F, \mathbb{F}_2)),$$

поэтому также выполняется неравенство

$$\dim H^1(G, H^3(F, \mathbb{F}_2)) \leq 2m + 1.$$

Гомоморфизм редукции по модулю 2 индуцирует изоморфизм G -модулей

$$H^3(F, \mathbb{Z}) = H^3(F, \mathbb{F}_2).$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\dim H^p(G, H^3(F, \mathbb{Z})) \leq 2m + 1, \quad (3.7)$$

где $p = 1, 2$. Заметим теперь, что для общего вещественного алгебраического многообразия X справедливы следующие неравенства (см., например, [6]):

$$\begin{aligned}\dim H^{\text{even}}(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^2(G, H^{\text{even}}(X, \mathbb{Z})) + \dim H^1(G, H^{\text{odd}}(X, \mathbb{Z})), \\ \dim H^{\text{odd}}(\mathbb{R}X, \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^1(G, H^{\text{even}}(X, \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, H^{\text{odd}}(X, \mathbb{Z})),\end{aligned}$$

где

$$H^{\text{even}}(\cdot, \cdot) = \oplus_{2q} H^{2q}(\cdot, \cdot), \quad H^{\text{odd}}(\cdot, \cdot) = \oplus_{2q+1} H^{2q+1}(\cdot, \cdot).$$

Применим их к поверхности Фано F , а также применим неравенства (3.5)–(3.7) и равенства (3.4). Тогда получим, что для поверхности Фано F выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\dim H^0(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) + \dim H^2(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) &\leq m^2 + 3m + 4, \\ \dim H^1(\mathbb{R}F, \mathbb{F}_2) &\leq m^2 + 3m + 12.\end{aligned}$$

Если теперь сложить эти неравенства, то получим неравенство в теореме 0.2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. E. Welters, *Abel–Jacobi Isogenies for Certain Types of Fano Threefolds*, Math. Centre Tracts, **141**, North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [2] H. G. Zeuthen, “Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre”, *Math. Ann.*, **7** (1874), 410–432.
- [3] В. М. Харламов, “Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ ”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **10**:4 (1976), 55–68.
- [4] В. М. Харламов, “Изотопические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{RP}^3$ ”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **12**:1 (1978), 86–87.
- [5] С. Н. Clemens, “Double solids”, *Adv. Math.*, **47**:2 (1983), 107–230.
- [6] В. А. Краснов, “Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:2 (1983), 268–297.
- [7] Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.
- [8] В. А. Краснов, “Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:3 (1994), 36–52.
- [9] В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM -многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66.
- [10] А. Гротендик, *О некоторых вопросах гомологической алгебры*, ИЛ, М., 1961.
- [11] В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177.
- [12] А. Н. Тюрин, “Пять лекций о трехмерных многообразиях”, *УМН*, **27**:5 (1972), 3–50.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет
E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

02.11.2005