Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Волкова, Аксиома Φ -голоморфных плоскостей для нормальных многообразий киллингова типа, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 364–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:23:41

УДК 517

АКСИОМА Φ -ГОЛОМОРФНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КИЛЛИНГОВА ТИПА

Е. С. Волкова

Изучаются свойства Φ -голоморфной секционной кривизны нормальных многообразий киллингова типа, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных плоскостей.

Библиография: 15 названий.

В последние десятилетия особым интересом геометров пользуются почти контактные метрические многообразия. Это объясняется не только богатой геометрией этих многообразий, но и их многочисленными приложениями в различных областях математики и теоретической физики.

Если проанализировать свойства почти контактных метрических структур, можно заметить, что у многих из них (таких, как квазисасакиевых, сасакиевых, косимплектических) структурный ковектор является киллинговой формой. Поэтому естественно возникает идея рассмотрения почти контактных метрических структур, для которых это свойство является определяющим. Примером такой структуры является нормальная структура киллингова типа (короче, $\mathcal{CN}$ -структура).

Одними из наиболее актуальных вопросов почти контактной геометрии являются изучение почти контактных многообразий, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных плоскостей [1], а также исследование почти контактных многообразий точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны [2].

Хорошо известно [3], что для сасакиевых и косимплектических многообразий выполнение аксиомы Φ -голоморфных плоскостей эквивалентно точечному постоянству их Φ -голоморфной секционной кривизны. Естественно возникает вопрос об аналогах этих результатов в случае $\mathcal{CN}$ -многообразий. Ответу на этот вопрос посвящена наша работа.

Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n + 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. *Почти контактной метрической структурой на многообразии M называется совокупность $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на M , где $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – (псевдо) риманова метрика, Φ – тензор типа (1.1), называемый *структурным оператором*, ξ – вектор, η – ковектор, называемые *структурными вектором* и *ковектором* соответственно. При этом*

- 1) $\Phi(\xi) = 0$;
- 2) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 3) $\eta(\xi) = 1$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \xi \otimes \eta$;

5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $\mathfrak{X}(M)$ – алгебра Ли гладких векторных полей на многообразии;

d – оператор внешнего дифференцирования, ∇ – риманова связность, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M . Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Напомним [4], что почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N + \frac{1}{2}\xi \otimes d\eta = 0$, где $4N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]$ – тензор Нейенхейса структурного оператора Φ .

Нормальную почти контактную метрическую структуру, структурный ковектор которой удовлетворяет тождеству $\nabla_X(\eta)Y + \nabla_Y(\eta)X = 0$, назовем *СНЖ-структурой*.

Известно [1], что задание почти контактной метрической структуры на многообразии M^{2n+1} определяет в модуле $\mathfrak{X}(M)$ пару взаимно-дополнительных проекторов: $m = \xi \otimes \eta$, $l = \text{id} - \xi \otimes \eta$. Известно также, что $l = -\Phi^2$, $\langle \Phi lX, \Phi lY \rangle = \langle lX, lY \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Это означает, что на распределении $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi$ пара $\{\Phi|_{\mathcal{L}}, g|_{\mathcal{L}}\}$ определяет почти эрмитову структуру; следовательно, $\mathcal{L}$ можно рассматривать как эрмитово векторное расслоение над M с метрикой $H(X, Y) = \langle X, Y \rangle + \sqrt{-1}\langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

В расслоении $\mathcal{L}^{\mathbb{C}} = \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}$ над M естественно определены взаимно-дополнительные проекторы $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}})$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}\Phi|_{\mathcal{L}})$ (здесь под оператором $\Phi|_{\mathcal{L}}$, вообще говоря, понимается его комплексификация [5] $\Phi^{\mathbb{C}} = (\Phi|_{\mathcal{L}}) \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}$), а также оператор τ естественного сопряжения, причем очевидно, что на $\mathcal{L}$ справедливо соотношение $\bar{\sigma} = \tau \circ \sigma$ [1].

Задание проекторов σ и $\bar{\sigma}$ равносильно распаданию модуля $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму двух подмодулей $\mathcal{D}$ и $\bar{\mathcal{D}}$ – образов этих проекторов. Легко видеть, что $\mathcal{D}$ и $\bar{\mathcal{D}}$ являются собственными подмодулями оператора Φ с собственными значениями $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно.

Пусть $p \in M$. Выберем в $\mathcal{L}_p$ репер $\{p, e_1, \dots, e_n\}$, унитарный относительно метрики H . Построим репер $\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$ модуля $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{M}_p$, где $\mathfrak{M}_p = \text{Im}(m_p)$, положив $\varepsilon_0 = \xi$, $\varepsilon_a = \sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \bar{\sigma}(e_a)$, где условимся считать, что индексы i, j, k, s пробегает значения от 0 до $2n$, а индексы a, b, c, d, g – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$. Заметим, что $\Phi(\varepsilon_a) = \sqrt{-1}\varepsilon_a$, $\Phi(\varepsilon_{\hat{a}}) = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\hat{a}}$, $\Phi(\varepsilon_0) = \Phi(\xi) = 0$.

Репер $\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$ называется *репером, адаптированным структуре*, или *A-репером* [6]. Известно [1], что задание почти контактной метрической структуры на многообразии M^{2n+1} равносильно заданию G -структуры на пространстве расслоения всех реперов на многообразии M^{2n+1} со структурной группой $G = U(n) \times \{1\}$. A-реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них имеют вид

$$(\Phi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n .

Пусть ω – форма смещения, φ – форма римановой связности ∇ на пространстве присоединенной G -структуры. На пространстве этой G -структуры форма связности φ задается формами $\{\omega_j^i\}$, а форма смещения ω – формами $\{\omega^i\}$. На пространстве присоединенной G -структуры полная группа структурных уравнений СНЖ-многообразия

имеет вид [7]

$$\begin{aligned}
 d\omega &= 2B_a{}^b\omega^a \wedge \omega_b, & d\omega^a &= \Theta_b^a \wedge \omega_b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b, \\
 d\omega_a &= -\Theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega^b \wedge \omega_c, \\
 d\Theta_b^a &= \Theta_g^a \wedge \Theta_b^g + A_{bg}^a\omega^g \wedge \omega_c + A_{bgc}^a\omega^g \wedge \omega^c + A_b^{agc}\omega_g \wedge \omega_c, \\
 dB^{ab}{}_c &= B^{gb}{}_c\Theta_g^a + B^{ag}{}_c\Theta_b^g - B^{ab}{}_g\Theta_a^g + B^{ab}{}_cg\omega^g + B^{ab}{}_c{}^g\omega_g, \\
 dB_{ab}{}^c &= -B_{gb}{}^c\Theta_a^g - B_{ag}{}^c\Theta_b^g + B_{ab}{}^g\Theta_g^a + B_{ab}{}^cg\omega^g + B_{ab}{}^c{}^g\omega_g,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Theta_b^a = \omega_b^a - B_b{}^a\omega$. Причем

$$\begin{aligned}
 \omega^{\hat{a}} &= \omega_a, & B_a{}^b &= \sqrt{-1}\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}, & \bar{B}_a{}^b &= -B_b{}^a, \\
 B_{ab}{}^c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}, & \bar{B}_{ab}{}^c &= -B^{ab}{}_c, & B_{ab}{}^c &= -B_{ba}{}^c, \\
 \bar{A}_{bd}^{ac} &= A_{ac}^{bd}, & \bar{A}_{bdc}^a &= -\bar{A}_a^{bdc}, \\
 \bar{B}_{ab}{}^{cd} &= -B^{ab}{}_{cd}, & \bar{B}_{ab}{}^c{}_d &= -B^{ab}{}_c{}^d, & B_{ab}{}^{cd} &= -B_{ba}{}^{cd}, & B_{ab}{}^c{}_d &= -B_{ba}{}^c{}_d.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Соотношения (2) представляют собой системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами соответствующих тензоров. Отметим также существование структурного тождества [7]

$$A_{[ab]}^{cd} = B^{cd}{}_{[ab]} - B^{ch}{}_{[a}B_{b]h}{}^d. \tag{3}$$

Скобки $[\cdot]$ и $(\cdot)$ означают соответственно операции альтернирования и симметризации объекта по заключенным в них индексам.

Рассматривая второе уравнение Картана связности ∇ [8], получаем спектр тензора Римана–Кристоффеля, т.е. выражение его компонент на пространстве присоединенной G -структуры [7]:

$$\begin{aligned}
 R^a{}_{bcd} &= 2A_{bcd}^a, & R^a{}_{bc\hat{d}} &= A_{bc}^{a\hat{d}} - 2B_b{}^aB_c{}^{\hat{d}} - B_c{}^aB_b{}^{\hat{d}} + B^{ah}{}_cB_{hb}{}^{\hat{d}}, \\
 R^a{}_{bc0} &= -C_{bc}^a, & R^{\hat{a}}{}_{bcd} &= 0, & R^0{}_{bcd} &= 0, \\
 R^{\hat{a}}{}_{bc\hat{d}} &= -B_{ab}{}^{\hat{d}}{}_c - B_{ab}{}^hB_{hc}{}^{\hat{d}}, & R^{\hat{a}}{}_{b\hat{c}\hat{d}} &= 2(B_a{}^{[c}B_b{}^{\hat{d}]} + B_{ab}{}^{[cd]}), \\
 R^{\hat{a}}{}_{bc0} &= 0, & R^0{}_{bc0} &= 0, & R^0{}_{b\hat{c}\hat{d}} &= 0, & R^0{}_{b\hat{c}0} &= -B_b{}^hB_{hc}{}^{\hat{d}}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним [9], что почти контактная метрическая структура $\{\Phi, \xi, \eta, g = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ называется *квазисасакиевой*, если она нормальная и ее фундаментальная 2-форма $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, замкнута. На пространстве присоединенной G -структуры первая группа структурных уравнений квазисасакиева многообразия в принятых обозначениях (2) имеет вид [10]

$$d\omega = 2B_b{}^a\omega^b \wedge \omega_a, \quad d\omega^a = \Theta_b^a \wedge \omega^b, \quad d\omega_a = -\Theta_a^b \wedge \omega_b. \tag{5}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [6]. Пусть M – $(2n + 1)$ -мерное почти контактное многообразие. Говорят, что оно *удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей*, если $\forall p \in M$, $\forall L \subset T_p(M)$, где L – двумерная Φ -инвариантная площадка, ортогональная ξ , $\Phi(L) \subset L$, $\exists N \subset M$ – вполне геодезическое Φ -инвариантное подмногообразие, т.е. $\Phi(N) = N$ такое, что $p \in N \implies T_p(N) = L$.

Пусть M^{2n+1} – $\mathcal{CNH}$ -многообразие, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных плоскостей, $p \in M$ – произвольная точка многообразия M , $T_p(M)$ – касательное пространство в этой точке, $L \subset T_p(M)$ – Φ -инвариантное пространство, ортогональное вектору ξ .

Пусть $\{p, \xi, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}\}$ – произвольный A -репер в пространстве $T_p(M)$, $(p, \beta, \bar{\beta})$ – A -репер в $T_p(N)$. Если $j: T_p(N) \rightarrow T_p(M)$ – естественное вложение, то оно задается формулами

$$\beta = G^a \varepsilon_a, \quad (6_1)$$

$$\bar{\beta} = G_a \varepsilon_{\hat{a}}. \quad (6_2)$$

В силу вещественности j имеем $\overline{G^a} = G_a$. Соотношения, двойственные соотношениям (6), задаются формулами

$$\omega^a = G^a \theta, \quad (7_1)$$

$$\omega_a = G_a \theta, \quad (7_2)$$

где $(p, \theta, \bar{\theta})$ – корепер, дуальный A -реперу $(p, \beta, \bar{\beta})$.

Продифференцируем внешним образом соотношение (7₁):

$$d\omega^a = dG^a \wedge \theta + G^a d\theta.$$

С учетом формул (1), (7₁), (7₂) последнее выражение можно записать в виде

$$d\theta = G_a (G^b \Theta_b^a - B^{ab} {}_c G^c G_b \bar{\theta} - dG^a) \wedge \theta. \quad (8)$$

Рассмотрим в выражении (8) слагаемое $-B^{ab} {}_c G^c G_a G_b \bar{\theta}$. В силу кососимметричности тензора $B^{ab} {}_c$ по индексам a и b имеем

$$-B^{ab} {}_c G^c G_a G_b \bar{\theta} = B^{ba} {}_c G^c G_b G_a \bar{\theta} = B^{ab} {}_c G^c G_a G_b \bar{\theta}.$$

Следовательно, $B^{ab} {}_c G^c G_a G_b \bar{\theta} = 0$. С учетом этого тождества выражение (8) принимает вид

$$d\theta = G_a (G^b \Theta_b^a - dG^a) \wedge \theta. \quad (9)$$

Обозначим $\psi = G^b \Theta_b^a G_a - G_a dG^a$. Тогда выражение (9) запишется в виде

$$d\theta = \psi \wedge \theta. \quad (10)$$

С учетом тождеств (10) и (8) будем иметь

$$(G^b \Theta_b^a - dG^a - B^{ab} {}_c G^c G_b \bar{\theta} - G^a \psi) \wedge \theta = 0.$$

Отсюда в силу леммы Картана получаем

$$G^b \Theta_b^a - dG^a - B^{ab} {}_c G^c G_b \bar{\theta} - G^a \psi = \Delta^a \theta,$$

или это можно записать в виде

$$G^b \Theta_b^a - dG^a - G^a \psi = \Delta^a \theta + B^{ab} {}_c G^c G_b \bar{\theta}. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 1. *$\mathcal{CNK}$ -многообразие M , удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных плоскостей, является квазисасакиевым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многообразие M удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей. Тогда вторая квадратичная форма этого многообразия равна нулю, т.е. из равенства (11) имеем

$$\Delta^a \theta + B^{ab}{}_c G^c G_b \bar{\theta} = 0.$$

В силу линейной независимости форм θ и $\bar{\theta}$ имеем

$$\Delta^a = 0, \quad (12_1)$$

$$B^{ab}{}_c G^c G_b = 0. \quad (12_2)$$

Аналогично найдем

$$\Delta_a = 0, \quad (13_1)$$

$$B_{ab}{}^c G_c G^b = 0. \quad (13_2)$$

Заметим, что тождества (12₂) и (13₂) должны выполняться тождественно относительно G^i ; следовательно,

$$B^{ab}{}_c = 0, \quad B_{ab}{}^c = 0. \quad (14)$$

Равенства (14) означают, что первая группа структурных уравнений (1) $\mathcal{CNK}$ -многообразия, удовлетворяющего аксиоме Φ -голоморфных плоскостей, имеет вид

$$d\omega = 2B_a{}^b \omega^a \wedge \omega_b, \quad d\omega^a = \Theta_b^a \wedge \omega^b, \quad d\omega_a = -\Theta_a^b \wedge \omega_b.$$

Сравнивая эту группу уравнений с группой уравнений (5), получаем, что многообразие M является квазисасакиевым.

Известно [11], что квазисасакиево многообразие удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей тогда и только тогда, когда верно равенство

$$A_{bd}^{ag} = \frac{A}{n(n+1)} \hat{\delta}_{bd}^{ag}, \quad (15)$$

где A – результат свертки тензора $A_d^g = A_{(da)}^{ag}$ по индексам g и d , $\hat{\delta}_{bd}^{ag} = \delta_b^a \delta_d^g + \delta_b^g \delta_d^a$. Тогда с учетом теоремы 1 справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *$\mathcal{CNK}$ -многообразие M^{2n+1} удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей тогда и только тогда, когда оно квазисасакиево и выполняется равенство (15).*

Напомним [2], что почти контактное метрическое многообразие M называется *многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны*, если

$$\forall X \in \mathcal{L} \implies \langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c \|X\|^4, \quad c \in C^\infty(M).$$

На пространстве присоединенной G -структуры это равенство запишется в виде

$$R_{ijk}s X^i (\Phi X)^j X^k (\Phi X)^s = 2c \hat{\delta}_{gd}^{ab} X^g X^d X_a X_b. \quad (16)$$

ТЕОРЕМА 3. *$\mathcal{CNH}$ -многообразие M является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда выражение для A_{ab}^{gd} имеет вид*

$$A_{ab}^{gd} = \frac{c}{2} \widehat{\delta}_{ab}^{gd} + 3B_{(a} {}^{(g} B_{b)} {}^{d)} + B_{ab} [gd] - B_{ha} {}^d B^{gh}{}_b. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – $\mathcal{CNH}$ -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Расписывая подробно тождество (16) с учетом соотношений (4) и тождеств $(\Phi X)^a = \sqrt{-1}X^a$, $(\Phi X)^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}X^{\hat{a}}$, получим

$$(A_{(ab)}^{(gd)} + B_{h(a} {}^{(g} B^{d)h}{}_{b)} - 3B_{(a} {}^{(g} B_{b)} {}^{d)})X^a X^b X_g X_d = \frac{c}{2} \widehat{\delta}_{ab}^{gd} X^a X^b X_g X_d.$$

Введем в рассмотрение 4-форму $C(X, Y, Z, W)$ формулой

$$C(X, Y, Z, W) = \left(A_{(ab)}^{(gd)} + B_{h(a} {}^{(g} B^{d)h}{}_{b)} - 3B_{(a} {}^{(g} B_{b)} {}^{d)} - \frac{c}{2} \widehat{\delta}_{ab}^{gd} \right) X^a Y^b Z_g W_d \\ \forall X, Y, Z, W \in \mathcal{L}.$$

Легко показать, что 4-форма $C(X, Y, Z, W)$ обладает свойствами:

- 1) $C(X, X, X, X) = 0$;
- 2) линейна по первой паре аргументов;
- 3) антилинейна по второй паре аргументов.

Опираясь на эти свойства, нетрудно найти

$$C(X, Y, Z, W) = 0 \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathcal{L}.$$

Из этого следует справедливость равенства

$$A_{(ab)}^{(gd)} = \frac{c}{2} \widehat{\delta}_{ab}^{gd} + 3B_{(a} {}^{(g} B_{b)} {}^{d)} - B_{h(a} {}^{(g} B^{d)h}{}_{b)}. \quad (18)$$

Запишем объект A_{ab}^{gd} в форме

$$A_{ab}^{gd} = A_{[ab]}^{[gd]} + A_{(ab)}^{[gd]} + A_{[ab]}^{(gd)} + A_{(ab)}^{(gd)}. \quad (19)$$

Из соотношений (3), (18), (19) с учетом кососимметричности $B_{ab} {}^{gd}$, $B^{ab} {}_{gd}$ по индексам a и b получим выражение (17).

Обратное очевидно.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть M – $\mathcal{CNH}$ -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Многообразие M удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей тогда и только тогда, когда M локально эквивалентно одному из следующих многообразий:*

- 1) $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$;
- 2) $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{R}$;
- 3) $\mathbb{CD}^n \times \mathbb{R}$;
- 4) $M^2 \times \mathbb{R}$;

- 5) нечетномерной сфере, снабженной канонической сасакиевой структурой или структурой, полученной из канонической преобразованием $\mathcal{D}$ -гомотетии [6], [12];
- 6) нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны -3 ;
- 7) нечетномерной сфере, снабженной сасакиевой структурой, полученной из канонической $\mathcal{D}$ -инверсией [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — $\mathcal{CN}$ -многообразие точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, удовлетворяющее аксиоме Φ -голоморфных плоскостей. Тогда с учетом теоремы 1 и теоремы 3 оно квазисасакиево и справедливы равенства (15), (17). Но для квазисасакиева многообразия тензоры $B_{ab}{}^g, B_a{}^b{}_g, B_{ab}{}^{gd}$ нулевые; следовательно, равенства (15) и (17) будут равносильны следующему:

$$\frac{c}{2}\widehat{\delta}_{ab}^{gd} + 3B_a{}^g B_b{}^d = \frac{A}{n(n+1)}\widehat{\delta}_{ab}^{gd},$$

откуда находим

$$B_a{}^d B_b{}^g + B_b{}^d B_a{}^g = \frac{2}{3}\widehat{\delta}_{ab}^{gd} \left(\frac{A}{n(n+1)} - \frac{c}{2} \right).$$

Обозначим

$$k = \frac{2}{3} \left(\frac{A}{n(n+1)} - \frac{c}{2} \right).$$

Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$B_a{}^d B_b{}^g + B_b{}^d B_a{}^g = k\widehat{\delta}_{ab}^{gd}. \quad (20)$$

Поскольку $\overline{B}_b{}^a = -B_a{}^b$, то оператор $B: \mathcal{D}_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \rightarrow \mathcal{D}_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ косоэрмитов и, значит, в подходящем A -репере $(p, \varepsilon_a, \varepsilon_{\bar{a}})$ приводится к диагональному виду относительно базиса $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ пространства $(\mathcal{D}_{\Phi}^{\sqrt{-1}})_p$. В этом базисе выражение для $B_a{}^b$ принимает вид $B_a{}^b = B_b\delta_a{}^b$. Тогда соотношение (20) в этом базисе записывается в форме

$$B_d B_g \widehat{\delta}_{ab}^{gd} = k\widehat{\delta}_{ab}^{gd}.$$

Положив здесь $a = b = g = d$, получим

$$(B_a)^2 = k. \quad (21)$$

Полагая теперь $a = d, b = g, a \neq b$, получим

$$B_a \cdot B_b = k. \quad (22)$$

В частности, из (21), (22) следует, что $(B_a)^2 \cdot B_b = k \cdot B_a$, т.е. $k \cdot B_b = k \cdot B_a$, т.е. $k(B_b - B_a) = 0$.

1) Если $k = 0$, то из соотношения (21) следует, что $B_1 = B_2 = \dots = B_n = 0$, откуда в силу соотношения $B_a{}^b = B_b\delta_a{}^b$ получаем $B_a{}^b = 0$. Это означает выполнение равенств $\nabla\Phi = \nabla\eta = \nabla\xi = 0$. Значит, многообразие M косимплектическое.

2) Если $k \neq 0$, то $B_a = B_b$, $a \neq b$. При этом, очевидно, $B_a = B_b = \sqrt{k}$. Итак, $B_a^b = \sqrt{k}\delta_a^b$. Заметим, что при комплексном сопряжении этого равенства, оно принимает вид

$$-B_b^a = \overline{\sqrt{k}\delta_b^a},$$

т.е. $\overline{\sqrt{k}} = -\sqrt{k}$. Иначе говоря, $\sqrt{k}$ – число чисто мнимое, т.е. $k < 0$. Пусть $k = -\gamma^2$, где $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда

$$B_a^b = \sqrt{-1}\gamma\delta_a^b.$$

В этом случае имеем

$$d\eta = d\omega = 2\sqrt{-1}\gamma\delta_a^b\omega^a \wedge \omega_b = 2\sqrt{-1}\gamma\omega^a \wedge \omega_b = -\gamma\Omega.$$

Продифференцируем внешним образом соотношение $-d\omega = \gamma\Omega$. Получаем

$$d\gamma \wedge \Omega + \gamma d\Omega = 0.$$

С учетом теоремы 1 $\mathcal{CNH}$ -многообразие, удовлетворяющее аксиоме плоскостей, квазисасакиево, т.е. его фундаментальная 2-форма Ω замкнута; следовательно, имеем

$$d\gamma \wedge \Omega = 0,$$

т.е.

$$d\gamma \wedge \omega^a \wedge \omega_a = 0.$$

Пусть $d\gamma = \gamma_b\omega^b + \gamma^0\omega$. Тогда с учетом предыдущего равенства находим

$$\gamma_b\omega^b \wedge \omega^a \wedge \omega_a + \gamma^0\omega \wedge \omega^a \wedge \omega_a = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости базисных форм находим

$$\gamma_b = \gamma^b = \gamma^0 = 0,$$

т.е. $d\gamma = 0$; значит, $\gamma = \text{const}$.

Совершим гомотетическое преобразование метрического тензора структуры $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$, положив $\tilde{g} = \gamma^2 g$. Тогда в новой метрике $\|\xi\|_{\tilde{g}}^2 = \gamma^2$. Выбрав $\tilde{\xi} = \frac{1}{\gamma}\xi$, получим $\|\tilde{\xi}\|_{\tilde{g}}^2 = 1$. Однако $\eta(\tilde{\xi}) = \frac{1}{\gamma}\eta(\xi)$. Поэтому положим $\tilde{\eta} = \gamma\eta$. Тогда $\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = 1$. Наконец, $\tilde{\Omega}(X, Y) = \tilde{g}(X, \Phi Y) = \gamma^2 g(X, \Phi Y) = \gamma^2 \Omega(X, Y)$. Итак, для новой почти контактной метрической структуры $\{\Phi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$, где $\tilde{\xi} = \frac{1}{\gamma}\xi$, $\tilde{\eta} = \gamma\eta$, $\tilde{g} = \gamma^2 g$, имеем $d\tilde{\eta} = \gamma d\eta = \gamma^2 \Omega = \tilde{\Omega}$, т.е. структура $\{\Phi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$ сасакиева.

Переход от структуры $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ к структуре $\{\Phi, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g}\}$ называется *гомотетическим преобразованием структуры*. Значит, наша структура гомотетична сасакиевой.

Итак, если $\mathcal{CNH}$ -многообразие M точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны удовлетворяет аксиоме Φ -голоморфных плоскостей, то M либо косимплектическое, либо с точностью до гомотетического преобразования структуры сасакиево.

Известно [13], что косимплектическое многообразие постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны локально эквивалентно произведению келерова многообразия постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны на вещественную прямую. В свою очередь,

келерово многообразие постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны локально эквивалентно одному из следующих многообразий [14], [15]:

- а) $\mathbb{C}^n$ – комплексному евклидовому пространству;
- б) $\mathbb{C}P^n$ – комплексному проективному пространству;
- в) CD^n – комплексному гиперболическому пространству;
- г) M^2 – двумерному многообразию, снабженному канонической келеровой структурой.

С другой стороны, в работах [1], [12] приведена классификация сасакиевых многообразий точно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, удовлетворяющих аксиоме Φ -голоморфных плоскостей. Всякое такое многообразие эквивалентно одному из многообразий, перечисленных в утверждении теоремы 4.

Обратное немедленно следует из того, что многообразия, перечисленные в списке теоремы 4, являются косимплектическими либо сасакиевыми пространственными формами и, следовательно, как хорошо известно, имеют постоянную Φ -голоморфную секционную кривизну и удовлетворяют аксиоме Φ -голоморфных плоскостей [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной почти эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71.
- [2] Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1979. V. 2. P. 171–186.
- [3] Tanno S. Sasakian manifolds with constant φ -holomorphic sectional curvature // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21. №3. P. 501–507.
- [4] Goldberg S., Jano K. Integrability of almost cosymplectic structures // Pacific J. Math. 1969. V. 31. №2. P. 373–382.
- [5] Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
- [6] Кириченко В. Ф. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. №4. С. 711–734.
- [7] Волкова Е. С. О геометрии нормальных многообразий киллингова типа // Деп. ВИНТИ РАН № 2111-B96. М.: ВИНТИ, 1996.
- [8] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
- [9] Blair D. E. The theory of Quasi-Sasakian structures // J. Diff. Geometry. 1967. V. 1. P. 331–345.
- [10] Рустанов А. Р. О геометрии квазисасакиевых многообразий // Деп. ВИНТИ РАН № 962-B94. М.: ВИНТИ, 1994.
- [11] Рустанов А. Р. Аксиома Φ -голоморфных плоскостей для квазисасакиевых многообразий // Научные труды МПГУ им. В. И. Ленина. М., 1994. С. 39–45.
- [12] Kiritchenko V. F. Classification des variétés presque sasakiennes satisfaisant à l'axiome des plans Φ -holomorphes // C. R. Acad. Sci. Sér. I. 1982. V. 295. №13. P. 739–742.
- [13] Kiritchenko V. F. Sur la géométrie des variétés approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Sér. I. 1982. V. 295. №12. P. 673–676.
- [14] Hawley N. S. Constant holomorphic sectional curvature // Canad. Math. J. 1953. V. 5. P. 53–56.
- [15] Igusa J. On the structure of a certain class of Kähler manifolds // Nat. Sc. Rep. Ochanomizu Univ. 1980. V. 31. №1. P. 42–54.