Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Скоробогатов, Об элементарном препятствии к существованию рациональных точек, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 112–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:39:15

Об элементарном препятствии к существованию рациональных точек

А. Н. Скоробогатов

В этой работе дифференциалы спектральной последовательности, сходящейся к группе Брауэра–Гротендика алгебраического многообразия X над произвольным полем, интерпретируются как $\cup$ -произведение с классом так называемого “элементарного препятствия”. В свою очередь, этот класс тесно связан с классом когомологий многообразия Альбанезе X степени 1. В случае, когда X – однородное пространство алгебраической группы, элементарное препятствие явно описывается в терминах естественных когомологических инвариантов X . Это сводит задачу вычисления группы Брауэра–Гротендика к вычислению некоторого спаривания в когомологиях Галуа.

Библиография: 20 названий.

Введение. Пусть X – гладкое алгебраическое многообразие над произвольным полем k характеристики 0. Когомологическая группа Брауэра–Гротендика $\text{Br } X = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ важна в силу своей бирациональной инвариантности; если же k – числовое поле, то с элементами $\text{Br } X$ связаны условия, которым удовлетворяют образы k -точек X в пространстве аделных точек X (препятствие Манина–Брауэра). Для вычисления $\text{Br } X$ используется спектральная последовательность Хохшильда–Серра

$$H^p(k, H_{\text{ét}}^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X, \mathbb{G}_m), \quad (0.1)$$

где через $\bar{X}$ обозначается многообразие над алгебраическим замыканием $\bar{k}$, полученное из X подъемом основного поля, а через $H^i(k, \cdot)$ – когомологии Галуа поля k . Предположим, что на $\bar{X}$ нет обратимых, всюду регулярных функций, отличных от констант. Чтобы вычислить факторгруппу группы Брауэра $\text{Br } X$ по модулю группы Брауэра основного поля $\text{Br } k$ при помощи этой спектральной последовательности, нужно знать группу Пикара $\text{Pic } \bar{X}$, группу Брауэра $\text{Br } \bar{X}$ вместе с действием на них группы Галуа $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$, а также дифференциалы

$$\begin{aligned} d_2^{1,1}: H^1(k, \text{Pic } \bar{X}) &\rightarrow H^3(k, \bar{k}^*), & d_2^{0,2}: (\text{Br } \bar{X})^\Gamma &\rightarrow H^2(k, \text{Pic } \bar{X}), \\ d_3^{0,2}: \text{Ker}(d_2^{0,2}) &\rightarrow H^3(k, \bar{k}^*). \end{aligned}$$

Вычисление упрощается в следующих случаях:

- $\text{Br}(\bar{X}) = 0$ (это эквивалентно тому, что все циклы в $H^2(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell(1))$ алгебраические, а группа $H^3(\bar{X}, \mathbb{Z}_\ell(1))$ не имеет кручения ни при каких ℓ ; см. [1; п. III.8]);

- на X имеется 0-цикл степени 1, определенный над k , например, k -точка (в этом случае $d_2^{1,1} = 0$, – см. далее п. 1);
- $H^3(k, \bar{k}^*) = 0$ (это так, если k – числовое или локальное поле).

В литературе часто встречаются формулы для $\mathrm{Br} X$, опирающиеся на эти упрощающие предположения. Наша цель в этой работе – дать некоторый ответ на вопрос о том, что можно сказать о группе Брауэра без этих дополнительных предположений.

Мы докажем в общем случае (см. предложение 1.1), что с точностью до знака дифференциалы $d_2^{i,1}$ совпадают с $\cup$ -произведением с классом $e(X)$, который отличается только знаком от класса естественного 2-расширения модулей Галуа

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \mathrm{Div} \bar{X} \rightarrow \mathrm{Pic} \bar{X} \rightarrow 0.$$

Это расширение рассматривалось Ж.-Л. Кольо-Теленом и Ж.-Ж. Сансюком [2] в связи с тем, что условие $e(X) = 0$, эквивалентное существованию Галуа-эквивариантного сечения гомоморфизма $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$, является необходимым условием для существования на X рациональных точек (а также 0-циклов степени 1, определенных над k). Класс $e(X)$ называется “элементарным препятствием” к существованию рациональных точек на X . В случае, когда $\mathrm{Pic} \bar{X}$ не имеет кручения, обращение в нуль $e(X)$ есть необходимое и достаточное условие для существования универсальных торсоров на X , а в общем случае из него следует существование торсоров любого данного типа (см. [2] или [3; гл. 2]). Из предложения 1.1 вытекает формула для “алгебраической” части $\mathrm{Br} X$ в терминах когомологий Галуа (следствие 1.2).

Предположим дополнительно, что X – проективное многообразие. Пусть J – многообразие Пикара X ; группа $\bar{k}$ -точек J отождествляется с компонентой $\mathrm{Pic}^0 \bar{X}$ группы Пикара $\bar{X}$, параметризующей классы дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Пусть A – многообразие Альбанезе X ; оно двойственно J как абелево многообразие. Выбор $\bar{k}$ -точки на X задает отображение Альбанезе $\bar{X} \rightarrow \bar{A}$, переводящее эту точку в нуль. Это отображение спускается до отображения $X \rightarrow D$, где D – некоторое главное однородное пространство со структурной группой A , определенное над k . Обозначим его класс $\delta(X) \in H^1(k, A)$. Классы $e(X)$ и $\delta(X)$ тесно связаны между собой (см. предложение 2.1).

Пусть теперь X – кривая; тогда $J = A$ и $J(\bar{k}) = \mathrm{Pic}^0 \bar{X}$ параметризует классы дивизоров степени 0, а $D(\bar{k}) = \mathrm{Pic}^1 \bar{X}$ – классы дивизоров степени 1 на X . Из предложения 2.1 получается формула для группы Брауэра кривой X : изоморфизм Барзотти–Вейля задает естественное спаривание

$$H^1(k, J) \times H^1(k, J) \rightarrow H^3(k, \bar{k}^*),$$

причем $(\delta(X), \delta(X)) = 0$; наш результат (теорема 2.2) состоит в том, что факторгруппа $\mathrm{Br} X$ по образу группы Брауэра поля $\mathrm{Br} k$ канонически изоморфна факторгруппе ортогонального дополнения $\delta(X)^\perp \subset H^1(k, J)$ по циклической подгруппе, порожденной $\delta(X)$.

Сходные формулы получаются и в случае, когда X – главное однородное пространство полупростой алгебраической группы или однородное пространство односвязной полупростой группы со связными стабилизаторами (см. предложения 3.1 и 3.2).

Результаты настоящей работы используются в статье М. В. Борового, Ж.-Л. Кольо-Телена и автора [4], где доказана эквивалентность зануления элементарного препятствия $e(X)$ и инъективности естественного отображения $\mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br} X$, когда k –

локальное поле. Если X – однородное пространство связной алгебраической группы со связными стабилизаторами над локальным полем, то из зануления $e(X)$ следует наличие на X рациональных точек. В [4] получены также аналоги этих результатов для случая числовых и ряда других полей. Например, если k – числовое поле, а на X имеются точки всюду локально, то из зануления $e(X)$ следует тривиальность части препятствия Манина к принципу Хассе, а именно той его части, которая связана с подгруппой локально постоянных классов. Обратное утверждение верно, если $\text{Pic } \overline{X}$ – конечно порожденная абелева группа без кручения [2], но в общем случае вопрос об эквивалентности этих двух утверждений, по-видимому, открыт¹.

1. Предложение из гомологической алгебры. Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{X}$ – абелевы категории с достаточным количеством инъективных объектов, и $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ – точный слева аддитивный функтор, у которого есть левый присоединенный функтор f^* . Пусть $\mathcal{E} \in \text{Ob}(\mathcal{Y})$, $\mathcal{M} \in \text{Ob}(\mathcal{X})$. Спектральная последовательность

$$E_2 = \text{Ext}_{\mathcal{X}}^p(\mathcal{M}, R^q f_* \mathcal{E}) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{p+q}(f^* \mathcal{M}, \mathcal{E}) \quad (1.1)$$

является частным случаем спектральной последовательности композиции функторов. Наша цель состоит в описании дифференциалов

$$d_2^{i,j}: \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+2}(\mathcal{M}, R^{j-1} f_* \mathcal{E})$$

в терминах $\cup$ -произведения. Рассмотрим вспомогательную спектральную последовательность

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^p(R^j f_* \mathcal{E}, R^q f_* \mathcal{E}) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{Y}}^{p+q}(f^*(R^j f_* \mathcal{E}), \mathcal{E}), \quad (1.2)$$

являющуюся частным случаем (1.1) при $\mathcal{M} = R^j f_* \mathcal{E}$, и ее дифференциал

$$\partial = \partial_2^{0,j}: \text{Hom}_{\mathcal{X}}(R^j f_* \mathcal{E}, R^j f_* \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}).$$

Образ тождественного морфизма $\text{Id}_j \in \text{Hom}_{\mathcal{X}}(R^j f_* \mathcal{E}, R^j f_* \mathcal{E})$ дает выделенный элемент $\partial(\text{Id}_j) \in \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E})$. Следующее предложение, возможно, хорошо известно специалистам, но мы приведем его с полным доказательством, так как нам не удалось отыскать его в существующей литературе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Для любых $i \geq 0$, $j \geq 1$ и любого $\alpha \in \text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E})$

$$d_2^{i,j}(\alpha) = (-1)^i \alpha \cup \partial(\text{Id}_j),$$

где $\cup$ есть спаривание Йонеды:

$$\text{Ext}_{\mathcal{X}}^i(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E}) \times \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+2}(\mathcal{M}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для $i = 0$, $j = 1$ наше утверждение есть лемма 1.A.4 работы [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $i = 1$. Пусть

$$0 \rightarrow R^j f_* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

– расширение, класс которого в $\text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E})$ есть α . Обозначим через d связывающий гомоморфизм длинной точной последовательности Ext’ов от первого аргумента, задаваемой последовательностью (1.3). По определению спаривания Йонеды

¹Положительный ответ на этот вопрос недавно получен О. Виттенбергом (O. Wittenberg).

для $\xi \in \text{Ext}_X^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E})$ имеем $\alpha \cup \xi = d(\xi)$. Докажем, что следующая диаграмма антикоммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(R^j f_* \mathcal{E}, R^j f_* \mathcal{E}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}) \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \text{Ext}_{\mathcal{X}}^1(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E}) & \xrightarrow{d_2^{1,j}} & \text{Ext}_{\mathcal{X}}^3(\mathcal{M}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}) \end{array} . \quad (1.4)$$

Отсюда следует утверждение предложения для $i = 1$. Для доказательства рассмотрим произвольную точную последовательность в $\mathcal{X}$:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Пусть $\mathcal{D}^+(\mathcal{X})$ – производная категория ограниченных снизу комплексов и

$$\cdots \rightarrow C^\bullet[-1] \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow \cdots$$

– выделенный треугольник в $\mathcal{D}^+(\mathcal{X})$, задаваемый (1.5). Для любого $F \in \mathcal{D}^+(\mathcal{X})$, $i \in \mathbb{Z}$, функторы обрезания задают выделенные треугольники

$$\cdots \rightarrow \tau_{\leq j-1}(F) \rightarrow F \rightarrow \tau_{\geq j}(F) \rightarrow \cdots .$$

Мы получаем следующую естественную диаграмму в производной категории абелевых групп:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(A^\bullet, \tau_{\geq j}(F)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(A^\bullet, \tau_{\leq j-1}(F))[1] \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(C^\bullet, \tau_{\geq j}(F))[1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(C^\bullet, \tau_{\leq j-1}(F))[2] \end{array} .$$

Эта диаграмма антикоммутативна [5; предложение 1.1.11]. В частном случае, когда $F = \tau_{[j-1, j]}(Rf_* \mathcal{E})$, а в качестве точной последовательности (1.5) берется (1.3), получается антикоммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}((R^j f_* \mathcal{E})^\bullet, \tau_{[j]}(Rf_* \mathcal{E})) & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}((R^j f_* \mathcal{E})^\bullet, \tau_{[j-1]}(Rf_* \mathcal{E}))[1] \\ d \downarrow & & d \downarrow \\ \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}^\bullet, \tau_{[j]}(Rf_* \mathcal{E}))[1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}^\bullet, \tau_{[j-1]}(Rf_* \mathcal{E}))[2] \end{array} .$$

Искомая антикоммутативная диаграмма (1.4) получается отсюда переходом к группам когомологий степени j . Действительно, отождествление объектов и вертикальных стрелок не вызывает затруднений, а тот факт, что дифференциалы в спектральной последовательности композиции функторов получаются из связывающих гомоморфизмов обрезанных комплексов, легко выводится из явной конструкции этой спектральной последовательности при помощи инъективной резольвенты Картана–Эйленберга (см., например, [6; приложение В]).

Для доказательства предложения при $i > 1$ достаточно разложить i -кратное расширение α в произведение однократных расширений и применить только что доказанное утверждение i раз.

Осталось разобрать случай $i = 0$. Тогда $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E})$. Из функториальности спектральной последовательности (1.2) по первому аргументу вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{X}}(R^j f_* \mathcal{E}, R^j f_* \mathcal{E}) & \xrightarrow{\partial} & \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(R^j f_* \mathcal{E}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}) \\ \alpha^* \downarrow & & \alpha^* \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}, R^j f_* \mathcal{E}) & \xrightarrow{d_2^{0,j}} & \text{Ext}_{\mathcal{X}}^2(\mathcal{M}, R^{j-1} f_* \mathcal{E}) \end{array} .$$

На этом доказательство предложения заканчивается.

Пусть k – поле характеристики 0 с алгебраическим замыканием $\bar{k}$, $\Gamma = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Пусть X – гладкое геометрически неприводимое и приведенное многообразие, $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$. Мы будем предполагать, что на $\bar{X}$ нет обратимых регулярных функций, отличных от констант, т.е. $H^0(\bar{X}, \mathbb{G}_m) = \bar{k}^*$. Рассмотрим спектральную последовательность

$$\text{Ext}_k^p(\mathcal{M}, H^q(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \Rightarrow \text{Ext}_X^{p+q}(p^* \mathcal{M}, \mathbb{G}_m), \quad (1.6)$$

получающуюся из (1.1) в частном случае, когда $\mathcal{Y}$ – категория этальных пучков на X , $\mathcal{X}$ – категория дискретных Γ -модулей (совпадающая с категорией этальных пучков на $\text{Spec}(k)$), $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ индуцирован структурным морфизмом $p: X \rightarrow \text{Spec}(k)$, $\mathcal{E} = \mathbb{G}_m$. Возьмем $\mathcal{M} = \text{Pic } \bar{X}$. Сопоставим X канонический элемент

$$e(X) := \partial(\text{Id}) \in \text{Ext}_k^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^*),$$

где $\text{Id} \in \text{Hom}_k(\text{Pic } \bar{X}, \text{Pic } \bar{X})$ – тождественное отображение, как это было сделано выше. Класс $e(X)$ является важной характеристикой многообразия X ; напомним его основные свойства (см. [3; теорема 2.3.4]):

(1) класс $-e(X)$ совпадает с классом естественного 2-расширения Γ -модулей

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow 0; \quad (1.7)$$

(2) $e(X) = 0$ тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$ имеет Γ -эквивариантное сечение;

(3) если на X есть 0-цикл степени 1, например, k -точка, то $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$ имеет Галуа-эквивариантное сечение, откуда $e(X) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Класс $e(X)$ функториален в следующем смысле: если $f: Y \rightarrow X$ – морфизм многообразий, не имеющих непостоянных обратимых регулярных функций над $\bar{k}$, то $e(X)$ получается из $e(Y)$ при помощи гомоморфизма $f^*: \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \text{Pic } \bar{Y}$. Действительно, из функториальности спектральной последовательности (1.6) по $\mathcal{M}$ и по X вытекает коммутативность нижеприведенной диаграммы, откуда и следует это утверждение:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_k(\text{Pic } \bar{Y}, \text{Pic } \bar{Y}) & \longrightarrow & \text{Ext}_k^2(\text{Pic } \bar{Y}, \bar{k}^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_k(\text{Pic } \bar{X}, \text{Pic } \bar{Y}) & \longrightarrow & \text{Ext}_k^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^*) \\ \uparrow & & \parallel \\ \text{Hom}_k(\text{Pic } \bar{X}, \text{Pic } \bar{X}) & \longrightarrow & \text{Ext}_k^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^*) \end{array} .$$

Напомним, что через $\mathrm{Br}_1 X$ обозначается так называемая “алгебраическая” часть группы Брауэра, т.е. ядро естественного гомоморфизма $\mathrm{Br} X \rightarrow \mathrm{Br} \bar{X}$, а через $\mathrm{Br}_0 X$ – образ $\mathrm{Br} k$ в $\mathrm{Br} X$. Поскольку $\mathrm{Br} \bar{k} = 0$, то $\mathrm{Br}_0 X$ лежит в $\mathrm{Br}_1 X$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Факторгруппа $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br}_0 X$ канонически изоморфна подгруппе $H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X})$, состоящей из элементов ξ таких, что $\xi \cup e(X) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в (1.6) положить $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$, то получим спектральную последовательность (0.1). Остается применить предложение 1.1 в случае $i = j = 1$.

Если $e(X) = 0$, то из (0.1) и предложения 1.1 следует точность последовательности

$$0 \rightarrow \mathrm{Br} k \rightarrow \mathrm{Br}_1 X \rightarrow H^1(k, \mathrm{Pic} \bar{X}) \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

2. Группа Брауэра и изоморфизм Барзотти–Вейля. Пусть $k\text{-gps}$ – категория коммутативных алгебраических групп над полем k . Эта категория абелева, и для $A, B \in \mathrm{Ob}(k\text{-gps})$ можно определить $\mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^i(A, B)$ как группу классов эквивалентности i -кратных расширений A при помощи B (см. краткий обзор в [7; п. I.0], [8]). Если k – совершенное поле, имеется спектральная последовательность [9]

$$H^p(k, \mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^q(A, B)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^{p+q}(A, B). \quad (2.1)$$

Пусть Φ – точный функтор из $k\text{-gps}$ в категорию дискретных Γ -модулей, сопоставляющий группе A модуль Галуа $A(\bar{k})$, т.е. “забывающий” структуру алгебраической группы на $A(\bar{k})$.

Формула Барзотти–Вейля утверждает наличие канонического изоморфизма модулей Галуа

$$\mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^1(A, \mathbb{G}_m) = A^t(\bar{k}),$$

где A – абелево многообразие, а A^t – двойственное к нему абелево многообразие [10; п. VII.3]. Кроме того, $\mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^i(A, \mathbb{G}_m) = 0$ для $i \neq 1$ [8; предложение 12.3]. С учетом этих фактов из спектральной последовательности (2.1) вытекает наличие естественного изоморфизма

$$H^1(k, A^t) = \mathrm{Ext}_{k\text{-gps}}^2(A, \mathbb{G}_m). \quad (2.2)$$

Напомним конструкцию изоморфизма Барзотти–Вейля. Пусть $\mathcal{P}$ – линейное расслоение Пуанкаре на $A^t \times A$. Сопоставим $a \in A^t(\bar{k})$ главное однородное пространство W_a над A со структурной группой $\mathbb{G}_m$, получающееся из ограничения $\mathcal{P}$ на $a \times A$ удалением нулевого сечения. W_a канонически наделяется структурой коммутативной групповой схемы, так что мы имеем расширение в $k\text{-gps}$ (см. [7; приложение C]): $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow W_a \rightarrow A \rightarrow 1$.

Вернемся к ситуации, рассматривавшейся в конце предыдущего раздела. Пусть J – многообразие Пикара гладкого полного геометрически неприводимого и приведенного многообразия X , $A = J^t$ – многообразие Альбанезе X . Группа $\bar{k}$ -точек J отождествляется с подгруппой $\mathrm{Pic}^0 \bar{X} \subset \mathrm{Pic} \bar{X}$, состоящей из дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Обозначим через i естественное вложение $J(\bar{k})$ в $\mathrm{Pic} \bar{X}$.

Если на X имеется рациональная точка, то определено отображение Альбанезе $X \rightarrow A$, переводящее ее в нуль. В общем случае А. Вейль [11] построил определенные над k главное однородное пространство D со структурной группой A и морфизм

$\text{Alb}: X \rightarrow D$ такие, что при подъеме основного поля до $\bar{k}$ этот морфизм становится классическим отображением Альбанезе. Обозначим $\delta(X) \in H^1(k, A)$ класс $[D]$. Следующее предложение показывает, как связаны между собой классы $\delta(X)$ и $e(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пусть X – гладкое полное геометрически неприводимое и приведенное многообразие над полем k характеристики 0, J – многообразие Пикара X , а $A = J^t$ – многообразие Альбанезе X . Тогда $-i^*(e(X)) \in \text{Ext}_k^2(J(\bar{k}), \bar{k}^*)$ получается из $\delta(X) \in H^1(k, A) = \text{Ext}_{k\text{-gps}}^2(J, \mathbb{G}_m)$ применением забывающего функтора Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\text{Div}^0 \bar{X}$ группу дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю. Элемент $-i^*(e(X))$ является классом расширения

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^* \rightarrow \text{Div}^0 \bar{X} \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

получающегося из (1.7) посредством гомоморфизма $i: J(\bar{k}) \rightarrow \text{Pic} \bar{X}$. Соответствующее 2-расширение для D имеет вид

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(D)^* \rightarrow \text{Div}^0 \bar{D} \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow 0,$$

так как Γ -модуль $\text{Pic}^0 \bar{D}$ канонически изоморфен $\text{Pic}^0 \bar{X}$.

Выберем раз и навсегда точку $P \in D(\bar{k})$, лежащую в образе морфизма Alb , и пусть $\phi: \Gamma \rightarrow A(\bar{k})$ – 1-коцикл такой, что для любого $g \in \Gamma$ точка $g(P)$ получается сдвигом P на $\phi(g)$. По определению, $\delta(X) \in H^1(k, A)$ является классом ϕ . отождествим $\bar{D}$ с $\bar{A}$, выбрав P в качестве нуля группового закона. Обозначим $\mathfrak{P}$ орбиту P при действии группы Галуа. Пусть $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ – локальное кольцо D в $\mathfrak{P}$. Обозначим $\text{Div}^0(\bar{D})_{\mathfrak{P}}$ группу дивизоров, алгебраически эквивалентных нулю, носители которых не пересекаются с $\mathfrak{P}$. Имеется естественное 2-расширение Γ -модулей

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \otimes_k \bar{k})^* \rightarrow \text{Div}^0(\bar{D})_{\mathfrak{P}} \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Морфизм Alb задает естественное Γ -эквивариантное отображение расширений (2.4) на (2.3), поэтому они представляют один и тот же класс в $\text{Ext}_k^1(J(\bar{k}), \bar{k}^*)$.

Пусть $k(P)$ – поле вычетов точки P . Перейдя к факторгруппе $(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \otimes_k \bar{k})^*$ по подгруппе рациональных функций на D , регулярных и принимающих значение 1 в каждой из точек $\mathfrak{P}$, получим эквивалентное (2.4) расширение

$$1 \rightarrow \bar{k}^* \rightarrow (k(P) \otimes_k \bar{k})^* \rightarrow C_{\mathfrak{P}} \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow 0,$$

служащее определением $C_{\mathfrak{P}}$. Мы утверждаем, что оно происходит из некоторого 2-расширения коммутативных алгебраических групп над k :

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) \rightarrow ? \rightarrow J \rightarrow 0,$$

где $R_{k(P)/k}$ обозначает спуск основного поля по Вейлю. Для этого достаточно показать, что расширение

$$1 \rightarrow (k(P) \otimes_k \bar{k})^* / \bar{k}^* \rightarrow C_{\mathfrak{P}} \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

получается из расширения J при помощи k -тора $T = R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) / \mathbb{G}_m$ в категории $k\text{-gps}$. Этот факт достаточно проверить над $\bar{k}$, откуда наше утверждение вытекает применением спуска Галуа. Согласно [10; гл. VII, п. 1.4] достаточно убедиться в том, что (2.5) задается рациональной симметрической системой факторов, т.е.

2-коциклом $J(\bar{k})$ с коэффициентами в $(\bar{k}^*)^{|\mathfrak{P}|}/\bar{k}^*$, задаваемым рациональными функциями на J . Над $\bar{k}$ мы можем работать непосредственно с A вместо D .

Пусть $\mathcal{D}$ – дивизор Пуанкаре на $A \times J$. По теореме о квадрате и “принципу качелей” на $A \times J \times J$ существует рациональная функция f , дивизор которой равен

$$(f) = s_{23}^{-1}(\mathcal{D}) - p_{12}^{-1}(\mathcal{D}) - p_{13}^{-1}(\mathcal{D}),$$

где s_{23} задается суммированием второй и третьей координат, а p_{12} и p_{13} – проекции $A \times J \times J \rightarrow A \times J$. Рациональное сечение s гомоморфизма $C_{\mathfrak{F}} \rightarrow J(\bar{k})$ в (2.5) можно задать сопоставив точке $x \in J(\bar{k})$ пересечение $\mathcal{D}$ с $A \times x$. Соответствующая система факторов задается формулой [10]:

$$\delta(s)(x, y) := s(x + y) - s(x) - s(y).$$

В нашем случае этот дивизор есть дивизор функции f , ограниченной на $A \times x \times y$, рассматриваемый с точностью до дивизоров функций, принимающих равные ненулевые значения во всех точках, сопряженных с P . Таким образом, $\delta(s)(x, y)$ есть значение f в этих точках с точностью до общего множителя из $\bar{k}^*$. Полученная система факторов рациональна, так как задается рациональной функцией. Итак доказано, что (2.5) происходит из расширения коммутативных алгебраических групп над k

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) \rightarrow J_{\mathfrak{F}} \rightarrow J \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

для некоторой коммутативной алгебраической группы $J_{\mathfrak{F}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если X – кривая, то $J_{\mathfrak{F}}$ – обобщенный якобиан X , задаваемый модулем $\mathfrak{F}$ (см. [10; п. I.1]).

Расширение (2.6) можно разложить в произведение Йонеды $\alpha \cup \beta$, где α – расширение торov

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m) \rightarrow T \rightarrow 1,$$

а β – только что построенное расширение коммутативных алгебраических групп

$$1 \rightarrow T \rightarrow J_{\mathfrak{F}} \rightarrow J \rightarrow 0.$$

Над $\bar{k}$ тор $R_{k(P)/k}(\mathbb{G}_m)$ распадается в произведение экземпляров $\mathbb{G}_m$ по числу сопряженных точек $g(P)$, $g \in \Gamma$. Пусть $\pi_{g(P)}$ обозначает проекции на соответствующие компоненты; эти отображения задают сечения α в категории коммутативных $\bar{k}$ -групп. Спектральная последовательность Милна (2.1) дает следующее каноническое отображение (являющееся на самом деле изоморфизмом):

$$H^1(k, \text{Hom}_{\bar{k}\text{-gps}}(T, \mathbb{G}_m)) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{k}\text{-gps}}^1(T, \mathbb{G}_m),$$

причем коцикл, задающий α , имеет вид

$$g \longmapsto \psi(g) = \pi_{g(P)}/\pi_P \in \text{Hom}_{\bar{k}\text{-gps}}(T, \mathbb{G}_m).$$

Отсюда следует, что (2.6) получается аналогичным отображением

$$H^1(k, \text{Ext}_{\bar{k}\text{-gps}}^1(J, \mathbb{G}_m)) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{k}\text{-gps}}^2(J, \mathbb{G}_m)$$

из коцикла, сопоставляющего $g \in \Gamma$ расширение, индуцированное β при помощи гомоморфизма $\pi_{g(P)}/\pi_P$. Нетрудно найти систему факторов этого расширения $\bar{J}$ при помощи $\mathbb{G}_{m, \bar{k}}$. Взяв s в качестве рационального сечения и повторяя приведенные выше вычисления, получаем, что она имеет вид $f(g(P), x, y)/f(P, x, y) \in \bar{k}(\bar{J} \times \bar{J})^*$. Однако согласно замечанию к теореме 6 [10; п. VII.3] тот же вид имеет и система факторов расширения, которое получается посредством изоморфизма Барзотти–Вейля из $\delta(X)(g) = g(P) - P \in A(\bar{k})$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если X – кривая рода 0, то на X имеется Γ -инвариантный класс дивизоров степени 1, поэтому естественно считать, что $\delta(X) = 0$. Однако $e(X) \in \text{Ext}_k^2(\mathbb{Z}, \bar{k}^*) = \text{Br } X$ есть класс X как многообразия Севери–Брауэра. При этом $e(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X \simeq \mathbb{P}_k^1$. Аналогичные примеры существуют и для кривых рода больше 1. Пусть, например, X – кривая рода 2, являющаяся циклическим накрытием степени 3 коники C без k -точек, разветвленным в 4 точках. Тогда $e(X) \neq 0$. Действительно, в противном случае гомоморфизм $\bar{k}^* \rightarrow \bar{k}(X)^*$ имеет сечение, но тогда имеет сечение и соответствующий гомоморфизм для C , а это противоречит тому, что $e(C) \neq 0$. В то же время X обладает Γ -инвариантным классом дивизоров степени 1 (прообраз $\bar{k}$ -точки C минус канонический класс X). Таким образом, в общем случае $\delta(X) = 0$ не влечет $e(X) = 0$. Однако, если X – кривая рода 1, то условие $\delta(X) = 0$ эквивалентно непустоте множества $X(k)$, и поэтому влечет $e(X) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть X – произвольное гладкое проективное многообразие, а J – его многообразие Пикара. Если $e(X) = 0$, то на X существуют торсоры любого данного типа (см., например, [3; с. 31]). Пусть $Y \rightarrow X$ – торсор, типом которого является гомоморфизм $J[n](\bar{k}) \rightarrow \text{Pic } \bar{X}$. Тогда $Y = X \times_D B$, где $B \rightarrow D$ – торсор типа $J[n](\bar{k}) \rightarrow \text{Pic } \bar{J}$. Согласно [3; предложение 3.3.4 (b)] существование B эквивалентно делимости класса $[D] \in H^1(k, A)$ на n . Поэтому $\delta(X) = [D]$ – делимый элемент группы $H^1(k, A)$. Таким образом, если $H^1(k, A)$ не содержит делимых элементов, отличных от нуля, то $e(X) = 0$ влечет $\delta(X) = 0$. Этим свойством обладает поле вещественных чисел, но не обладает поле p -адических чисел. Однако и здесь (как и в более общем случае поля частных гензелева кольца дискретного нормирования с конечным полем вычетов) из зануления $e(X)$ следует зануление $\delta(X)$ (см. [12], а также [4]). Однако для некоторых других полей, например, для поля рядов Лорана $\mathbb{C}((t))$ это уже неверно: как показал недавно О. Виттенберг, $e(X) = 0$ для любого многообразия над полем когомологической размерности 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть, наконец, X – кривая над числовым полем, имеющая 0-цикл степени 1 над каждым пополнением поля k . Тогда $\delta(X) = 0$ влечет $e(X) = 0$. Действительно, выбор Γ -инвариантного элемента $\text{Pic } \bar{X}$ степени 1 представляет $\text{Pic } \bar{X}$ в виде прямой суммы $J(\bar{k}) \oplus \mathbb{Z}$. Отсюда

$$\text{Ext}_k^2(\text{Pic } \bar{X}, \bar{k}^*) \simeq \text{Ext}_k^2(J(\bar{k}), \bar{k}^*) \oplus \text{Br } k,$$

причем $e(X) \in \text{Br } k$. Из наличия на X 0-циклов степени 1 всюду локально и из закона взаимности Хассе следует, что $e(X) = 0$.

В предположении гипотезы о конечности группы Тейта–Шафаревича абелева многообразия J обратная импликация верна для любого гладкого проективного

многообразия X над числовым полем, имеющего точки всюду локально. В этом случае согласно теореме 2.12 работы [4] из $e(X) = 0$ вытекает, что любая адельная точка на X , а значит и на D , ортогональна в смысле спаривания Брауэра–Манина подгруппе $B(D) \subset \text{Br } D$, состоящей из локально постоянных классов. По теореме Ю.И. Манина (см. [3; теорема 6.2.3]) отсюда следует, что $\delta(X)$ лежит в ядре спаривания Касселса–Тейта. Если $\text{III}(J)$ конечна, то это спаривание невырождено, поэтому $D \cong J$, т.е. $\delta(X) = 0$.

Пусть A – абелево многообразие над совершенным полем k , и $J = A^t$ – двойственное абелево многообразие. Каноническое спаривание

$$(\cdot, \cdot): H^1(k, J) \times H^1(k, A) \rightarrow H^3(k, \bar{k}^*) \quad (2.7)$$

индуцируется композицией изоморфизма (2.2) и гомоморфизма, забывающего структуру алгебраической группы,

$$H^1(k, A) \rightarrow \text{Ext}_{k\text{-gps}}^2(J, \mathbb{G}_m) \rightarrow \text{Ext}_k^2(J(\bar{k}), \bar{k}^*),$$

из спаривания, задаваемого произведением Йонеды в когомологиях Галуа:

$$\cup: H^1(k, J) \times \text{Ext}_k^2(J(\bar{k}), \bar{k}^*) \rightarrow H^3(k, \bar{k}^*).$$

Пусть J (соответственно, A) – многообразие Пикара (соответственно, многообразие Альбанезе) гладкого полного геометрически неприводимого и приведенного многообразия X над полем k . Из предложения 2.1 и функториальности последнего спаривания следует, что для любого $y \in H^1(k, J)$ имеем

$$(y, \delta(X)) = -y \cup i^*(e(X)) = -i_*(y) \cup e(X). \quad (2.8)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть X – гладкая полная геометрически неприводимая и приведенная кривая над полем k характеристики 0. Тогда $\text{Br } X / \text{Br}_0 X$ канонически изоморфна факторгруппе ортогонального дополнения к $\delta(X)$ в $H^1(k, J)$ относительно спаривания (2.7) по модулю циклической подгруппы, порожденной $\delta(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\text{Br } \bar{X} = 0$ по теореме Тзена, поэтому $\text{Br } X = \text{Br}_1 X$. В случае кривой $J = A$. Хорошо известно и легко проверяется, что точная последовательность Γ -модулей

$$0 \rightarrow J(\bar{k}) \rightarrow \text{Pic } \bar{X} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

представляет класс $\delta(X) \in H^1(k, J) = \text{Ext}_k^1(\mathbb{Z}, J(\bar{k}))$. Отсюда $i_*(\delta(X)) = 0$ и из формулы (2.8) следует $(\delta(X), \delta(X)) = 0$. Из той же точной последовательности получаем, что $H^1(k, \text{Pic } \bar{X})$ есть факторгруппа $H^1(k, J)$ по подгруппе, порожденной $\delta(X)$. Утверждение теоремы теперь вытекает из следствия 1.2 и предложения 2.1.

3. Однородные пространства. Пусть G – полупростая группа над полем k характеристики 0. Многообразие G геометрически неприводимо и приведено, причем на $\bar{G}$ нет регулярных обратимых функций, отличных от констант (по лемме Розенлихта такие функции с точностью до умножения на константу являются характеристиками $\bar{G}$). Пусть $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая G . Как хорошо известно, $\tilde{G}$ является центральным расширением G при помощи некоторой конечной абелевой группы μ , называемой фундаментальной группой G . Согласно [13] с таким расширением связано естественное отображение пунктированных множеств $d: H^1(k, G) \rightarrow H^2(k, \mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть X – главное однородное пространство полупростой группы G , определенное над k , и $[X]$ – его класс в $H^1(k, G)$. Тогда $\mathrm{Br} X / \mathrm{Br}_0 X$ есть множество элементов $H^1(k, \hat{\mu})$, ортогональных $d([X])$ относительно спаривания

$$H^1(k, \hat{\mu}) \times H^2(k, \mu) \rightarrow H^3(k, \bar{k}^*),$$

где $\hat{\mu} = \mathrm{Hom}(\mu, \bar{k}^*)$ – коммутативная k -группа, двойственная к μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [14] имеем $\mathrm{Br} \bar{G} = 0$, поэтому $\mathrm{Br} X = \mathrm{Br}_1 X$. Модуль Галуа $\mathrm{Pic} \bar{X}$ канонически изоморфен $\hat{\mu}$ (см., например, [3; п. 3.2]). Поэтому класс $e(X)$ лежит в $\mathrm{Ext}_k^2(\hat{\mu}, \bar{k}^*) = H^2(k, \mu)$. Из результата Ж. Жиро [15; п. V.3.2.9] и предложения 2.3.11 [3] следует, что $e(X) = d([X])$ (подробнее см. [3; с. 54]). Теперь предложение вытекает из следствия 1.2.

Теперь предположим, что G – односвязная группа, т.е. $G = \tilde{G}$, и пусть X – однородное пространство G , определенное над k , не обязательно главное, но такое, что стабилизатор $\bar{H}$ некоторой $\bar{k}$ -точки X связан. Однородному пространству X канонически сопоставляется множество когомологий Галуа $H^2(k, \bar{H})$, содержащее выделенное подмножество нейтральных элементов (подробности см. в [16] или [17]). Т. Спрингер определил класс $\eta_X \in H^2(k, \bar{H})$, который нейтрален в том и только в том случае, когда X поднимается до главного однородного пространства G [16] (см. также [3; п. 9.2]). Известно, что X определяет канонический k -тор T такой, что $\bar{T}$ – максимальный торический фактор $\bar{H}$ (см. [17] или [18]). Обозначим через t естественное отображение множеств $H^2(k, \bar{H}) \rightarrow H^2(k, T)$ (ср. [17; п. 1.7]). Пусть $\hat{T}$ – модуль характеров тора T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть X – однородное пространство односвязной полупростой группы, определенное над k , причем на X имеется $\bar{k}$ -точка, стабилизатор которой связан. Тогда $\mathrm{Br}_1 X / \mathrm{Br}_0 X$ есть множество элементов $H^1(k, \hat{T})$, ортогональных $t(\eta_X) \in H^2(k, T)$ относительно спаривания

$$H^1(k, \hat{T}) \times H^2(k, T) \rightarrow H^3(k, \bar{k}^*). \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В ходе доказательства теоремы 9.5.1 в [3] строится канонический изоморфизм Γ -модулей $\mathrm{Pic} \bar{X} = \hat{T}$ (формула на с. 176; здесь используется односвязность G). Поэтому $e(X)$ лежит в $\mathrm{Ext}_k^2(\hat{T}, \bar{k}^*) = H^2(k, T)$. Там же доказывается, что $e(X) = t(\eta_X)$ [3; с. 177]. Остается воспользоваться следствием 1.2.

По-видимому, предположение об односвязности G можно отбросить ценой некоторого усложнения. В этом случае вместо $\hat{T}$ следует рассматривать гиперкогомологии естественного комплекса Γ -модулей $\hat{G} \rightarrow \hat{T}$ (ср. [19]).

Напомним, что если M – дискретный Γ -модуль, то $\mathrm{Ш}_\omega^i(k, M) \subset H^i(k, M)$ определяется как пересечение ядер гомоморфизмов ограничения на все проциклические замкнутые подгруппы Γ .

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В условиях и обозначениях предложения 3.2 пусть X_c – гладкая полная компактификация X . Тогда $\mathrm{Br} X_c / \mathrm{Br}_0 X$ есть множество элементов подгруппы $\mathrm{Ш}_\omega^1(k, \hat{T}) \subset H^1(k, \hat{T})$, ортогональных $t(\eta_X)$ относительно спаривания (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказал Ф. А. Богомолов [20], $\mathrm{Br} \overline{X}_c = 0$, откуда $\mathrm{Br} X_c = \mathrm{Br}_1 X_c$. Вложение $X \hookrightarrow X_c$ задает естественное отображение соответствующих спектральных последовательностей (0.1). Гомоморфизм ограничения $r: \mathrm{Pic} \overline{X}_c \rightarrow \mathrm{Pic} \overline{X} = \widehat{T}$ сюръективен в силу гладкости X_c . Его ядро свободно порождается классами дивизоров $\overline{X}_c$, лежащими в дополнении к $\overline{X}$, так как на $\overline{X}$ нет непостоянных обратимых регулярных функций. Мы получаем короткую точную последовательность Γ -модулей

$$0 \rightarrow \mathrm{Div}_{\overline{X}_c \setminus \overline{X}} \overline{X}_c \rightarrow \mathrm{Pic} \overline{X}_c \rightarrow \widehat{T} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

причем Γ -модуль $\mathrm{Div}_{\overline{X}_c \setminus \overline{X}} \overline{X}_c$ пермутационный, т.е. обладает Γ -инвариантным базисом. Согласно недавнему результату Ж.-Л. Кольо-Телена и Б.Э. Кунявского [18] Γ -модуль $\mathrm{Pic} \overline{X}_c$ вялый (flasque), т.е.

$$H^1(\Gamma', \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Pic} \overline{X}_c, \mathbb{Z})) = 0$$

для любой замкнутой подгруппы $\Gamma' \subset \Gamma$. Как хорошо известно и легко доказывается, отсюда вытекает, что гомоморфизм r индуцирует изоморфизм $H^1(k, \mathrm{Pic} \overline{X}_c)$ с подгруппой $\mathrm{III}_{\omega}^1(k, \widehat{T})$. Тот же гомоморфизм задает коммутативную диаграмму спариваний

$$\begin{array}{ccc} H^1(k, \mathrm{Pic} \overline{X}) \times \mathrm{Ext}_k^2(\mathrm{Pic} \overline{X}, \bar{k}^*) & \longrightarrow & H^3(k, \bar{k}^*) \\ \uparrow & & \downarrow \quad \parallel \\ H^1(k, \mathrm{Pic} \overline{X}_c) \times \mathrm{Ext}_k^2(\mathrm{Pic} \overline{X}_c, \bar{k}^*) & \longrightarrow & H^3(k, \bar{k}^*) \end{array}.$$

Теперь утверждение вытекает из функториальности $e(X)$ (см. замечание в п. 1).

Это следствие несколько усиливает утверждение теоремы А (iii) статьи [18] в случае, когда G не имеет торической части.

Автор благодарен Ж.-Л. Кольо-Телену, А. М. Левину и С. Ленгу за полезные беседы, а также Институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Grothendieck, “Le groupe de Brauer. I, II, III”, *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, eds. A. Grothendieck, N.H. Kuipers, North-Holland & Masson, Amsterdam–Paris, 1968, 46–66, 67–87, 88–188.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, “La descente sur les variétés rationnelles. II”, *Duke Math. J.*, **54**:2 (1987), 375–492.
- [3] A. Skorobogatov, *Torsors and Rational Points*, Cambridge Tracts in Math., **144**, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [4] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov, “The elementary obstruction and homogeneous spaces”, *Preprint*, 2006.
- [5] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, “Faisceaux pervers”, *Analysis and topology on singular spaces*, I (Luminy, 1981), *Astérisque*, **100**, Soc. Math. France, Paris, 1982, 5–171.
- [6] A. N. Skorobogatov, “Beyond the Manin obstruction”, *Invent. Math.*, **135**:2 (1999), 399–424.
- [7] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Math., **1**, Academic Press, Boston, MA, 1986.
- [8] F. Oort, *Commutative Group Schemes*, Lecture Notes in Math., **15**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1966.

- [9] J. S. Milne, “The homological dimension of commutative group schemes over a perfect field”, *J. Algebra*, **16** (1970), 436–441.
- [10] Ж. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, Мир, М., 1968.
- [11] A. Weil, “On algebraic groups and homogeneous spaces”, *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 493–512.
- [12] J. van Hamel, “Lichtenbaum–Tate duality for varieties over p -adic fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **575** (2004), 101–134.
- [13] Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*, Мир, М., 1968.
- [14] B. Iversen, “Brauer group of a linear algebraic group”, *J. Algebra*, **42**:2 (1976), 295–301.
- [15] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
- [16] T. Springer, “Nonabelian H^2 in Galois cohomology”, *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proc. Symp. Pure Math., **9**, eds. A. Borel, G. D. Mostow, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966, 164–182.
- [17] M. V. Borovoi, “Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology”, *Duke Math. J.*, **72**:1 (1993), 217–239.
- [18] J.-L. Colliot-Thélène, B. È. Konyavskii, “Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d’espaces homogènes”, *J. Algebraic Geom.*, **15**:4 (2006), 733–752.
- [19] M. Borovoi, “A cohomological obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces”, *Math. Ann.*, **314**:3 (1999), 491–504.
- [20] Ф. А. Богомолов, “Группа Брауэра полей инвариантов алгебраических групп”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 279–293.

А. Н. Скоробогатов

Институт проблем передачи информации РАН,

Imperial College London, England

E-mail: a.skorobogatov@imperial.ac.uk

Поступило

21.10.2005

Исправленный вариант

04.07.2006