Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Щерба, Единичный круг наименьшего самопериметра на плоскости Минковского, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 125–135

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:05:52

Единичный круг наименьшего самопериметра на плоскости Минковского

А. И. Щерба

На плоскости Минковского с несимметричной метрикой найдены все единичные круги с самопериметром, равным наименьшему возможному значению 6.

Библиография: 14 названий.

Пусть B – выпуклая ограниченная фигура на аффинной плоскости A^2 , для которой начало координат $\bar{o}$ – внутренняя точка. Точки плоскости A^2 отождествляем с их радиус-векторами.

Через R^2 обозначаем присоединенную к A^2 евклидову плоскость, которую получаем из A^2 определением в ней скалярного произведения с помощью некоторой положительно определенной, симметричной билинейной формы.

Каждой паре $(B; \bar{o})$ взаимно однозначно соответствует дистанционная функция $g(\bar{x})$: если $\bar{x} \in A^2$, $\bar{x} \neq \bar{o}$ и $\bar{x}_0$ – граничная точка на луче, идущем из начала $\bar{o}$ через $\bar{x}$, то

$$g(\bar{x}) = \frac{|\bar{x}|}{|\bar{x}_0|} > 0. \quad (1)$$

Хорошо известно [1], [2], что дистанционная функция обладает свойствами неотрицательности, положительной однородности и полуаддитивности. С иным подходом к определению дистанционной функции как калибровочной функции выпуклого множества на аффинной плоскости A^2 можно ознакомиться, например, в [3; с. 81]. Как обычно [1], [4], с помощью дистанционной функции $g(\bar{x})$ фигуры B вводится расстояние между произвольными точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из A^2 :

$$\rho_B(\bar{x}; \bar{y}) = g(\bar{x} - \bar{y}).$$

В силу определения (1) расстояние $\rho_B(\bar{x}; \bar{y})$ не зависит от выбора скалярного произведения в присоединенной к A^2 евклидовой плоскости R^2 . Аффинную плоскость A^2 с введенной (возможно несимметричной) метрикой ρ_B принято называть *плоскостью M^2 , наделенной геометрией Минковского* [5]. Фигуру B называют *нормирующей* или *единичным кругом* на M^2 .

Следует отметить, что равенство $\rho_B(\bar{x}; \bar{y}) = \rho_B(\bar{y}; \bar{x})$ для любой пары точек $\bar{x}, \bar{y} \in M^2$ имеет место тогда, когда начало координат $\bar{o}$ – центр симметрии фигуры B , т.е. $B = -B$ (см. [4; с. 113]).

Под *длиной* отрезка $\bar{a}\bar{b}$ в метрике Минковского плоскости M^2 понимаем расстояние $\rho_B(\bar{a}; \bar{b})$ от конца отрезка $\bar{a}$ до $\bar{b}$.

Пусть P – некоторый выпуклый ограниченный многоугольник.

Под $l^+(P)$ понимаем сумму длин сторон многоугольника P , граница которого обходится против часовой стрелки, а под $l^-(P)$ – длину границы P , обходимой по часовой стрелке.

Через $\{P\}$ обозначаем множество всех выпуклых многоугольников, содержащихся в некоторой компактной выпуклой фигуре K . Тогда по непрерывности могут быть определены первый $U^-(K)$ и второй $U^+(K)$ периметры фигуры K :

$$U^\mp(K) = \sup_{P \in \{P\}} l^\mp(P).$$

ЗАМЕЧАНИЕ А (подробности см. в [4; с. 119], [6; с. 112]). Если на плоскости Минковского M^2 выпуклая фигура L содержится в выпуклой фигуре K , то для их соответствующих периметров справедливо неравенство

$$U^\mp(L) \leq U^\mp(K).$$

Кроме того, для выпуклого многоугольника $P \subset M^2$ периметры $U^\mp(P)$ совпадают соответственно с суммами длин его сторон

$$U^\mp(P) = l^\mp(P).$$

На плоскости Минковского с центрально симметричной относительно $\bar{o}$ нормирующей фигурой B первый и второй периметры фигуры K совпадают:

$$U^+(K) = U^-(K) = U(K).$$

В 1932 г. С. Голаб [7] установил, что для самопериметра $U(B)$ центрально симметричного относительно $\bar{o}$ единичного круга B справедливы оценки

$$6 \leq U(B) \leq 8,$$

причем равенство $U(B) = 6$ достигается, когда B – аффинно правильный шестиугольник, а равенство $U(B) = 8$ достигается, когда B – параллелограмм.

В 1953 г. Ю. Г. Решетняк [8], а несколько позднее Д. Лаугвиц [9], переоткрыли результат Голаба.

В 1967 г. Дж. Шеффер [10] доказал, что возможное наименьшее значение 6 самопериметра $U(B)$ достигается только для аффинно правильного шестиугольника, а возможное наибольшее значение $U(B) = 8$ достигается только для параллелограмма.

Обратим внимание на то, что при доказательстве утверждений Голаба–Решетняка–Лаугвица и Шеффера их авторы существенным образом использовали наличие симметричности фигуры B относительно начала $\bar{o}$.

Отвечая на вопрос в 2003 г. В. И. Дисканта [11], автором было показано, что и в случае несимметричного единичного круга B его самопериметры не меньше 6, т.е. $U^\mp(B) \geq 6$.

Как оказалось, эта задача имеет более длинную историю и была сформулирована Голабом в 1932 г. [7] (на что нам и указал Б. Грюнбаум; см. об этом также работу [12]).

Наличие простейших примеров свидетельствует об отсутствии абсолютной постоянной, ограничивающей сверху самопериметр $U^\mp(B)$ в M^2 , наделенной геометрией Минковского. Однако в 1964 г. Грюнбаум [13] доказал, что внутри выпуклой нормирующей фигуры B можно выбрать точку $\bar{o}$ так, что самопериметры $U^\mp(B) \leq 9$, причем для треугольника оценка не может быть улучшена. Тем самым было подтверждено еще одно предположение Голаба из работы [7].

В 2003 г. В. В. Макеев [14] переоткрыл это утверждение.

До сих пор оставался открытым вопрос нахождения всех нормирующих фигур, для которых неравенство $U^\mp(B) \geq 6$ превращается в равенство. В работе получен следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Равенство $U^-(B) = 6$ или $U^+(B) = 6$ для самопериметра единичного круга на плоскости M^2 , наделенной геометрией Минковского, возможно лишь в случае, когда B – аффинно правильный шестиугольник.*

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. Не ограничивая общности, далее рассматриваем выпуклую компактную фигуру B , расположенную в одной из присоединенных к A^2 евклидовых плоскостей R^2 с декартовой системой координат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение теоремы достаточно доказать для одного из самопериметров фигуры B .

Действительно, если через B' обозначить фигуру, зеркально симметричную B относительно оси абсцисс, т.е. $B' = \{(x; -y) : (x; y) \in B\}$, то $U^\mp(B) = U^\pm(B')$.

Пусть вершины многоугольника находятся в точках $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots, \bar{f}$. Тогда для краткости записи обозначаем этот многоугольник $abc\dots f$.

УТВЕРЖДЕНИЕ А. *В границу выпуклой фигуры B можно вписать (по часовой стрелке) шестиугольник $abcdef$ так, чтобы*

- 1) точка $\bar{o}$ начала координат лежала на диагонали ad ;
- 2) векторы $\{\bar{bc}; \bar{ef}; \bar{ad}\}$ были коллинеарны и $|\bar{bc}| = |\bar{ao}|$, $|\bar{ef}| = |\bar{do}|$;
- 3) векторы $\bar{cd}$ и $\bar{be}$ были сонаправлены.

Это утверждение содержится в утверждениях 1 и 4 работы [11]. В силу замечания А имеем

$$U^\mp(B) \geq U^\mp(abcdef).$$

В [11] было показано, что у этого “особого” шестиугольника периметр $U^\mp(abcdef) \geq 6$.

ПРИМЕР 1. На плоскости R^2 с декартовой системой координат в качестве нормирующей фигуры B выберем правильный треугольник pqr с вершинами в точках

$$\bar{p}(-\sqrt{3}; -1), \quad \bar{q}(0; 2), \quad \bar{r}(\sqrt{3}; -1).$$

Тогда правильный шестиугольник $abcdef$ с вершинами в точках

$$\bar{a}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right), \quad \bar{b}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right), \quad \bar{c}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right), \quad \bar{d}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right), \quad \bar{e}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right), \quad \bar{f}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

– единственный особый шестиугольник, все вершины которого лежат на сторонах pqr . Как видим, ни одна из вершин $abcdef$ не является угловой точкой границы ∂B .

Приведенный пример указывает на невозможность использования далее метода Шеффера из работы [10] для доказательства сформулированной выше теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЕ В. Если самопериметр единичного круга B на плоскости M^2 , наделенной геометрией Минковского, наименьший: $U^-(B) = 6$, то в границу ∂B можно вписать аффинно правильный шестиугольник $\Pi(B) = abcdef$ с центром в начале координат $\bar{o}$.

Для полноты изложения приведем краткую схему доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть шестиугольник $abcdef$ из утверждения А. Как и в доказательстве теоремы из [11], при помощи невырожденного аффинного преобразования в R^2 переведем этот шестиугольник в шестиугольник $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ с соответствующими одноименными вершинами

$$\bar{a}_1(-1; 0), \quad \bar{b}_1(-1; 1), \quad \bar{c}_1(0; 1), \quad \bar{d}_1(u; 0), \quad \bar{e}_1(u + w; -v), \quad \bar{f}_1(w; -v),$$

где u, v, w – определяющие параметры.

Выпуклость фигуры B и свойства особого шестиугольника $abcdef$ (см. утверждение А) обеспечивают для определяющих параметров выполнение неравенств $u > 0$, $v > 0$, $w \geq -1$.

Просматривая доказательство теоремы из [11; с. 105–106], убеждаемся, что

$$U^-(B) \geq l^-(a_1b_1c_1d_1e_1f_1) \geq \min \left\{ 3 + \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + u \cdot v; 2 + \left(u + \frac{1}{u} \right) + \left(v + \frac{1}{v} \right) \right\} \geq 6.$$

Заметим, что равенство $U^-(B) = 6$ возможно лишь в случае $u = v = 1$. Тогда прямая o_1e_1 , как параллельная c_1d_1 на плоскости R^2 , задана уравнением $y = -x$, а прямая $e_1f_1 \parallel a_1d_1$ – уравнением $y = -1$. Легко видеть, что координаты точки $\bar{e}_1(1; -1)$. Так как прямая $d_1e_1 \parallel o_1f_1$, координаты $\bar{f}_1(0; -1)$. Следовательно, шестиугольник $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, а вместе с ним и шестиугольник $abcdef$, аффинно правильные. Утверждение В доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если первый самопериметр единичного круга на плоскости Минковского M^2 наименьший: $U^-(B) = 6$, то для произвольной выпуклой компактной фигуры A такой, что $B \supset A \supset \Pi(B)$, выполняется равенство $U^-(A) = 6$.

Этот факт очевиден, так как

$$6 = U^-(B) \geq U^-(A) \geq U^-(abcdef) \geq 6.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если три различные точки $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ плоскости M^2 находятся на одной прямой и u , кроме того, лежат на границе ∂B , то существует граничный отрезок $nm \subset \partial B$ такой, что $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in nm$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Векторы $\bar{x}, \bar{y}$ коллинеарны и $g(\bar{x} + \bar{y}) = g(\bar{x}) + g(\bar{y})$ тогда и только тогда, когда векторы сонаправлены: $\bar{x} \uparrow \bar{y}$.

В дальнейшем в соответствии с определением (1) значений $g(\bar{x}), g(\bar{y}), g(\bar{z}), \dots$ через $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \dots$ обозначаем точки на границе ∂B , принадлежащие лучам $ox, oy, oz, \dots$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ из M^2 с нормирующей фигурой B . Равенство $g(\bar{x} + \bar{y}) = g(\bar{x}) + g(\bar{y})$ выполняется тогда и только тогда, когда отрезок x_0y_0 граничный для B , т.е. $x_0y_0 \subset \partial B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ коллинеарны, то данное утверждение следует из утверждения 3.

Рассмотрим случай, когда $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не коллинеарны.

Обозначим $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$. Как и раньше, под записью $|\bar{x}|$ понимаем евклидову длину вектора $\bar{x}$ в присоединенной к A^2 евклидовой плоскости R^2 . Через $\bar{r}$ обозначим точку пересечения отрезка x_0y_0 с лучом, идущим из начала $\bar{o}$ через точку $\bar{z}$.

Пусть $|\bar{x}\bar{r}| = \alpha$, $|\bar{y}\bar{r}| = \beta$. Тогда вектор $\bar{r}$ можем представить в следующем виде:

$$\bar{r} = \frac{\beta}{\beta + \alpha} \cdot \bar{x}_0 + \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot \bar{y}_0.$$

Так как по построению $\bar{z} \uparrow \bar{r}$, $\bar{x} \uparrow \bar{x}_0$, $\bar{y} \uparrow \bar{y}_0$ и $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$, параллелограмм $oxzy$ гомотетичен параллелограмму с вершинами в точках

$$\bar{o}, \quad \frac{\beta}{\beta + \alpha} \cdot \bar{x}_0, \quad \bar{r}, \quad \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \cdot \bar{y}_0.$$

Тогда

$$\frac{|\bar{z}|}{|\bar{r}|} = \frac{|\bar{x}|}{(\beta/(\beta + \alpha)) \cdot |\bar{x}_0|} = \frac{|\bar{y}|}{(\alpha/(\beta + \alpha)) \cdot |\bar{y}_0|}$$

или

$$\frac{\beta + \alpha}{\beta} \cdot g(\bar{x}) = \frac{\beta + \alpha}{\alpha} \cdot g(\bar{y}) = \frac{|\bar{z}_0|}{|\bar{r}|} \cdot g(\bar{z}).$$

В силу условий утверждения 4 отсюда получаем, что

$$g(\bar{z}) = g(\bar{x}) + g(\bar{y}) = \frac{|\bar{z}_0|}{|\bar{r}|} \cdot g(\bar{z}) \cdot \left(\frac{\beta}{\beta + \alpha} + \frac{\alpha}{\beta + \alpha} \right) = \frac{|\bar{z}_0|}{|\bar{r}|} \cdot g(\bar{z}).$$

Таким образом, $|\bar{z}_0|/|\bar{r}| = 1$. Вместе с тем векторы $\bar{z}_0$ и $\bar{r}$ сонаправлены, а значит, точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ (по предположению $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не коллинеарны) принадлежат ∂B . В силу утверждения 2 отрезок x_0y_0 граничный для B . Утверждение 4 доказано.

Далее через A и $\Pi(B)$ обозначаем фигуры на M^2 , удовлетворяющие условиям утверждения 1, а фигуру B считаем такой, что $B \neq \Pi(B)$. Тогда существует точка $\bar{h} \in \partial B$ и $\bar{h} \notin \Pi(B)$. Вершины шестиугольника $\Pi(B)$ подпишем в циклическом порядке по часовой стрелке: $\Pi(B) = abcdef$. Для определенности пусть точка $\bar{h}$ находится между $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Выберем в качестве фигуры A семиугольник $ahbcdef$. По построению $\Pi(B) \subset A \subset B$; значит, в силу утверждения 1 периметр $U^-(A) = 6$.

Так как периметр семиугольника A можно записать таким образом:

$$6 = U^-(A) = U^-(\Pi(B)) + \rho_B(\bar{a}; \bar{h}) + \rho_B(\bar{h}; \bar{b}) - \rho_B(\bar{a}; \bar{b}) = 6 + [g(\bar{a}\bar{h}) + g(\bar{h}\bar{b}) - g(\bar{a}\bar{b})],$$

то

$$g(\bar{a}\bar{b}) = g(\bar{a}\bar{h}) + g(\bar{h}\bar{b}). \quad (2)$$

Пусть граничной точкой B на луче, идущем из начала $\bar{o}$ параллельно вектору $\bar{a}\bar{h}$, будет $\bar{n}$; соответственно для вектора $\bar{h}\bar{b}$ пусть это будет точка $\bar{m} \in \partial B$. Тогда в

силу утверждения 4 равенство (2) для метрики плоскости M^2 выполняется тогда и только тогда, когда отрезок nm является граничным для B , т.е. $nm \subset \partial B$. Вершина $\bar{c}$ шестиугольника $\Pi(B)$ принадлежит отрезку nm .

Рассмотрим отдельно три возможные случая расположения отрезка nm по отношению к шестиугольнику $\Pi(B)$, вписанному в границу фигуры B .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Точка $\bar{m}$ не может принадлежать стороне cd шестиугольника $abcdef$, если первый самопериметр $U^-(B) = 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $\bar{m}$ лежит на стороне cd шестиугольника. Из невырожденности треугольника Δahb заключаем, что точка $\bar{m}$ внутренняя на отрезке cd ; в свою очередь, точка $\bar{c}$ внутренняя на отрезке nm .

Выберем в качестве фигуры A шестиугольник $abndef$; по построению $\Pi(B) \subset A \subset B$. По аналогии с равенством (2) для треугольника Δbnc выполняется равенство

$$\rho_B(\bar{b}; \bar{c}) = \rho_B(\bar{b}; \bar{n}) + \rho_B(\bar{n}; \bar{c}). \quad (3)$$

Через $\bar{p}$ обозначим граничную точку B такую, что $\bar{p} \uparrow \bar{bn}$. Кроме того, аффинная правильность шестиугольника $abcdef$ обеспечивает соотношения $\bar{e} \uparrow \bar{nc}$, $\bar{d} \uparrow \bar{bc}$. Равенство (3) и невырожденность Δbnc обеспечивают по утверждению 4 принадлежность точки $\bar{p}$ прямой ed . Здесь точка $\bar{d}$ есть внутренняя по отношению к отрезку ep , но отрезок $nm \subset \partial B$ и, значит, отрезок nd граничный для B . Получили противоречие с выпуклостью B . Значит, $\bar{m} \notin cd$. Утверждение 5 доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Точка $\bar{n}$ не может принадлежать стороне bc шестиугольника $\Pi(B) \subset B$, если первый самопериметр $U^-(B) = 6$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $\bar{n}$ лежит на стороне bc шестиугольника $abcdef$. При помощи невырожденного аффинного преобразования в R^2 переведем $\Pi(B)$ в правильный шестиугольник $abcdef$ с указанным порядком соответствия вершин:

$$\bar{a}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{b}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{c}(1; 0), \quad \bar{d}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{e}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{f}(-1; 0).$$

Из невырожденности Δahb следует, что точка $\bar{c}$ внутренняя на отрезке nm .

Через $\bar{p}$ обозначаем точку на прямой cm такую, что $\bar{p}$ – угловая точка границы ∂B и $\overline{cm} \uparrow \overline{cp}$, где $|\overline{cm}| \leq |\overline{cp}|$. Если в качестве фигуры A в утверждении 1 выбрать шестиугольник $abpdef$, то можно утверждать, что его периметр равен 6. Значит, для Δcpd выполняется равенство

$$\rho_B(\bar{c}; \bar{d}) = \rho_B(\bar{c}; \bar{p}) + \rho_B(\bar{p}; \bar{d}). \quad (4)$$

Через $\bar{s}$ обозначаем точку на границе ∂B такую, что $\bar{s} \uparrow \bar{pd}$. Правильность шестиугольника $abcdef$ обеспечивает соотношения $\overline{cp} \uparrow \bar{d}$, $\overline{cd} \uparrow \bar{e}$. Из формулы (4) следует, что точка $\bar{e}$ внутренняя на отрезке sd . Значит, точка $\bar{s} \in \partial B$ и $\bar{s} \notin \Pi(B)$. Пусть $\bar{u}$ – точка пересечения отрезков os и ef . Тогда eu – биссектриса угла $\widehat{oes} = 2\pi/3$. Легко видеть, что в Δeou величина $\angle eou = \alpha$ находится в пределах $0 < \alpha < \pi/3$. Тогда в Δeus величина $\angle eus = \pi/3 + \alpha$, а $\angle esu = \pi/3 - \alpha$. Сторона es треугольника лежит против большего угла, поэтому $|\overline{ue}| < |\overline{es}|$. Так как Δdcp и Δoeu равные: $\angle eou = \angle cdp$, $\angle oeu = \angle dcp$ и $|\overline{cd}| = |\overline{e}| = 1$, то

$$|\overline{cp}| < |\overline{es}|. \quad (5)$$

Таким образом, получено следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $abcdef$ – правильный шестиугольник, вписанный в границу ∂B по часовой стрелке, где $U^-(B) = 6$, и на продолжении стороны bc имеется точка $\bar{p} \in \partial B$. Тогда и на продолжении стороны de имеется точка $\bar{s} \in \partial B$, причем $|\bar{cp}| < |\bar{es}|$.

Повторим это предложение применительно к точке $\bar{s} \in \partial B$, лежащей на продолжении стороны de . Получим существование некоторой точки $\bar{r} \in \partial B$, лежащей на продолжении стороны fa шестиугольника $\Pi(B)$, причем

$$|\bar{es}| < |\bar{ar}|. \quad (6)$$

Еще раз повторим наше предложение, только уже применительно к точке $\bar{r} \in \partial B$ и стороне fa как исходной: на продолжении стороны bc имеется точка $\bar{q} \in \partial B$ такая, что

$$|\bar{ar}| < |\bar{cq}|. \quad (7)$$

Учитывая неравенства (5)–(7), заключаем, что $|\bar{cp}| < |\bar{cq}|$. Получили противоречие с тем, что точка $\bar{p}$ была выбрана изначально на прямой cm как угловая граничная точка фигуры B и $\bar{cm} \uparrow \bar{cp}$.

Таким образом, точка $\bar{n} \notin bc$. Утверждение 6 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Шестиугольник $psuwlt$ называется *почти правильным*, если начало координат $\bar{o}$ – его внутренняя точка и выполнены соотношения сонаправленности

$$\bar{ps} \uparrow \bar{u}, \quad \bar{su} \uparrow \bar{w}, \quad \bar{uw} \uparrow \bar{l}, \quad \bar{wl} \uparrow \bar{t}, \quad \bar{lt} \uparrow \bar{p}, \quad \bar{tp} \uparrow \bar{s}.$$

На плоскости M^2 приведем пример, иллюстрирующий различие между понятиями аффинно правильного и почти правильного шестиугольников.

ПРИМЕР 2. На плоскости R^2 с декартовой системой координат в качестве нормирующей фигуры B выберем шестиугольник с вершинами в точках

$$\bar{p}(-1; 1), \quad \bar{s}(1; 1), \quad \bar{u}(1; 0), \quad \bar{w}(0; -1), \quad \bar{l}(-1; -1), \quad \bar{t}(-2; 0).$$

Легко видеть, что

$$\bar{ps} = 2\bar{u}, \quad \bar{su} = \bar{w}, \quad \bar{uw} = \bar{l}, \quad \bar{t} = 2\bar{wl}, \quad \bar{lt} = \bar{p}, \quad \bar{tp} = \bar{s},$$

т.е. $psuwlt$ – почти правильный шестиугольник. Однако этот шестиугольник не аффинно правильный, так как для двух противоположных и параллельных сторон ps и wl выполнено равенство $|\bar{ps}| = 2 \cdot |\bar{wl}|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если почти правильный шестиугольник центрально симметричен относительно начала координат, то этот шестиугольник аффинно правильный.

Это сразу следует из того, что в указанном случае стороны шестиугольника параллельны его диагоналям.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Если первый самопериметр единичного круга B на плоскости Минковского M^2 наименьший: $U^-(B) = 6$, то фигура B есть почти правильный шестиугольник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $B = \text{Ш}(B)$, приведенное утверждение очевидно. Если же $B \neq \text{Ш}(B)$, то в силу утверждений 5 и 6 точки $\bar{n}$ и $\bar{m}$ суть внешние к шестиугольнику $abcdef = \text{Ш}(B)$. Последнее условие обеспечивает невырожденность $\triangle bnc$ и $\triangle cmd$. Заметим, что восьмиугольник $ahbnmdef$ имеет периметр, равный 6, так как он удовлетворяет требованиям утверждения 1 к фигуре А:

$$\text{Ш}(B) \subset ahbnmdef \subset B, \quad U^-(B) = 6 = U^-(\text{Ш}(B)).$$

Тогда в $\triangle bnc$

$$\rho_B(\bar{b}; \bar{c}) = \rho_B(\bar{b}; \bar{n}) + \rho_B(\bar{n}; \bar{c}), \quad (8)$$

а в $\triangle cmd$

$$\rho_B(\bar{c}; \bar{d}) = \rho_B(\bar{c}; \bar{m}) + \rho_B(\bar{m}; \bar{d}). \quad (9)$$

По аналогии с формулой (2) равенство (8) выполняется только при условии наличия граничных точек $\bar{r}, \bar{p} \in \partial B$ таких, что $\bar{r} \uparrow \bar{bn}$, $\bar{p} \uparrow \bar{nc}$, где отрезок $rp \subset \partial B$ и точка $\bar{d} \in rp$. В свою очередь, равенство (9) обеспечивает существование граничной точки $\bar{q} \in \partial B$ такой, что $\bar{q} \uparrow \bar{md}$, отрезок $qp \subset \partial B$ и точка $\bar{e} \in qr$.

Невырожденность $\triangle bnc$ и $\triangle cmd$ обеспечивает неравенства

$$\bar{r} \neq \bar{d}, \quad \bar{p} \neq \bar{d}, \quad \bar{p} \neq \bar{e}, \quad \bar{q} \neq \bar{e}.$$

По построению и из аффинной правильности шестиугольника $abcdef$ получаем принадлежность точки $\bar{p}$ дуге $\widehat{de}$ границы ∂B . Кроме того, $\bar{p} \uparrow \bar{nm}$, где отрезок nm граничный для B .

В силу утверждений 5 и 6 точка $\bar{p}$ – угловая точка границы нормирующей фигуры B , причем ломаная $rpq \subset \partial B$ и точка $\bar{d}$ внутренняя для rp , а точка $\bar{e}$ внутренняя для отрезка pq . Таким образом, существование точки $\bar{h} \subset \partial B$ между вершинами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ шестиугольника $\text{Ш}(B)$ и условие $\bar{h} \notin \text{Ш}(B)$ обеспечивают наличие на границе ∂B угловой точки $\bar{p}$ как вершины ломаной rpq . Эта точка $\bar{p}$ расположена с началом координат $\bar{o}$ относительно стороны de шестиугольника $abcdef$ по разные стороны.

Выполняя аналогичные рассуждения для точки $\bar{n} \in \partial B$, $\bar{n} \notin \text{Ш}(B)$, расположенной между вершинами $\bar{b}$ и $\bar{c}$, получаем угловую точку $\bar{s}$ на ∂B , причем некоторая ломаная $psv \subset \partial B$, где $\bar{e} \in ps$, $\bar{f} \in sv$.

Повторяя подобные рассуждения еще четыре раза к последовательности точек $\bar{m}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{v}$, получаем, что граница ∂B есть шестиугольник. При этом, по выполненному построению, векторы сторон шестиугольника-границы ∂B сонаправлены соответствующим векторам его вершин. Утверждение 7 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что почти правильный шестиугольник $psuwlt$ строго описан вокруг аффинно правильного шестиугольника $abcdef$, если на каждой стороне $psuwlt$ лежит и притом только одна вершина вписанного в него шестиугольника $abcdef$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если нормирующая фигура B удовлетворяет условиям утверждения 7 и $B \neq \text{Ш}(B)$, то B – почти правильный шестиугольник, строго описанный вокруг аффинно правильного $\text{Ш}(B)$.

Легко убеждаемся в справедливости сформулированного замечания 3, просматривая доказательство утверждения 7.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Пусть $psuwlt$ и $p_1s_1u_1w_1l_1t_1$ – два почти правильных шестиугольника, строго описанных вокруг аффинно правильного шестиугольника $abcdef$, для вершин которых выполнен указанный ниже циклический порядок следования по часовой стрелке:

$$awblctdpesfu, \quad aw_1bl_1ct_1dp_1es_1fu_1.$$

Тогда если точка $\bar{l}_1$ внутренняя для $\triangle blc$, то точка $\bar{t}$ внутренняя для $\triangle ct_1d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью невырожденного аффинного преобразования в M^2 шестиугольник $abcdef$ переведем в правильный на присоединенной евклидовой плоскости R^2 . По условию нашего утверждения 8 почти правильные шестиугольники строго описаны вокруг $abcdef$, а значит, лучи $\widehat{ot}$ и $\widehat{ot_1}$ находятся внутри угла $\widehat{cod}$. Кроме того, выполнены равенства углов $\widehat{b\bar{t}c} = \widehat{t\bar{o}d}$, $\widehat{l_1\bar{b}c} = \widehat{t_1\bar{o}d}$. Так как точка $\bar{l}_1$ лежит внутри $\triangle blc$, то $\widehat{b\bar{t}c} > \widehat{l_1\bar{b}c}$, $\widehat{c\bar{o}t} > \widehat{c\bar{o}t_1}$ и $\widehat{t_1\bar{c}d} > \widehat{t\bar{c}d}$. Отсюда заключаем, что точка $\bar{t}$ лежит внутри $\triangle ct_1d$.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях утверждения 8 точка $\bar{l}$ внутренняя для $\triangle bl_1c$, то точка $\bar{t}_1$ внутренняя для $\triangle ctd$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть, как и раньше, $\Pi(B)$ – аффинно правильный шестиугольник, вписанный в границу ∂B . Наличие $\Pi(B)$ оговорено в утверждении В.

Если $B = \Pi(B)$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть далее $B \neq \Pi(B)$. При помощи невырожденного аффинного преобразования в присоединенном пространстве R^2 переведем $\Pi(B)$ в правильный шестиугольник $abcdef$ со следующим набором координат вершин:

$$\bar{a}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{b}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{c}(1; 0), \quad \bar{d}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{e}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \bar{f}(-1; 0).$$

По условию теоремы один из самопериметров равен 6; для определенности скажем $U^-(B) = 6$. Тогда по утверждению 7 единичный круг B есть почти правильный шестиугольник, т.е. $B = psuwlt$, для которого соблюдаются соотношения сонаправленности сторон и радиус-векторов вершин:

$$\overline{ps} \uparrow\uparrow \bar{u}, \quad \overline{su} \uparrow\uparrow \bar{w}, \quad \overline{uw} \uparrow\uparrow \bar{l}, \quad \overline{wl} \uparrow\uparrow \bar{t}, \quad \overline{lt} \uparrow\uparrow \bar{p}, \quad \overline{tp} \uparrow\uparrow \bar{s}.$$

Наше доказательство будет осуществляться по следующему плану: вначале для почти правильного шестиугольника $B = psuwlt$ мы построим строго описанный вокруг $\Pi(B) = abcdef$ аффинно правильный шестиугольник $p_1s_1u_1w_1l_1t_1$, а затем покажем, что он совпадает с B .

Далее считаем, что соблюдается следующий циклический порядок следования точек:

$$\bar{a}, \bar{w}, \bar{b}, \bar{l}, \bar{c}, \bar{t}, \bar{d}, \bar{p}, \bar{e}, \bar{s}, \bar{f}, \bar{u}.$$

Особо выделим пятиугольник $oawlc$, где лучи aw и ol параллельны, а треугольники $\triangle oab$ и $\triangle obc$ правильные.

Рассмотрим три возможных случая расположения точки $\bar{w}$ по отношению к окрестности, описанной вокруг $\triangle oab$.

1⁰. Пусть точка $\bar{w}$ лежит на указанной окружности. Покажем, что тогда точка $\bar{l}$ лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle obc$.

Угол $\widehat{boa} = \pi/3$, а угол $\widehat{awb} = 2\pi/3$ – как два угла, опирающихся на одну хорду ab окружности. Пусть прямые fa и bc , касающиеся окружности, описанной вокруг $\triangle oab$, пересекаются в точке $\bar{h}$. Отрезки fa и bc – хорды выпуклой фигуры B , поэтому дуга $\widehat{ab}$ границы ∂B находится в $\triangle ahb$. Так как $B = wltpsu$ – почти правильный шестиугольник, строго описанный вокруг $abcdef$, вершина $\bar{w}$ – внутренняя точка правильного $\triangle ahb$. Если в $\triangle awb$ угол $\bar{baw} = \alpha$, $0 < \alpha < \pi/3$, то угол $\bar{abw} = \pi/3 - \alpha$. Тогда величина угла

$$\widehat{lb\bar{c}} = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{2}{3}\pi = \alpha.$$

Укажем две пары параллельных лучей: $aw \parallel ol$, $ab \parallel oc$. Отсюда следует равенство углов $\widehat{col} = \widehat{baw} = \alpha$. Таким образом, имеем два равных угла $\widehat{lb\bar{c}} = \widehat{loc} = \alpha$, опирающихся на отрезок lc . Значит, точка $\bar{l}$ лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle obc$, и величина угла $\widehat{bl\bar{c}} = 2\pi/3$. Применив рассуждения, аналогичные приведенным выше для пары точек $\{\bar{w}; \bar{l}\}$, к последовательности пар $\{\bar{l}; \bar{t}\}$, $\{\bar{t}; \bar{p}\}$, $\{\bar{p}; \bar{s}\}$, $\{\bar{s}; \bar{u}\}$, устанавливаем равенства для углов

$$\widehat{baw} = \widehat{cbl} = \widehat{dct} = \widehat{edp} = \widehat{fes} = \widehat{afu} = \alpha, \quad (10)$$

$$\widehat{awb} = \widehat{bl\bar{c}} = \widehat{ctd} = \widehat{dpe} = \widehat{esf} = \widehat{fua} = \frac{2}{3}\pi. \quad (11)$$

Соотношения (10), (11) обеспечивают равенства треугольников $\triangle awb$, $\triangle blc$, $\triangle ctd$, $\triangle dpe$, $\triangle esf$, $\triangle fua$ и, следовательно, правильность шестиугольника $psuwlt = B$. Итак, в случае, когда точка $\bar{w}$ лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle oab$, теорема доказана.

2⁰. Пусть точка $\bar{w}$ лежит внутри этой окружности. Через w_1 обозначим точку пересечения луча aw с окружностью, описанной вокруг $\triangle oab$. В силу пункта 1⁰ точка $\bar{l}_1$ как пересечение лучей ol и w_1b лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle obc$. Легко видеть, что $|\bar{ol}| > |\bar{ol}_1|$. Поэтому если точка $\bar{w}$ лежит внутри окружности, описанной вокруг $\triangle oab$, то точка $\bar{l}$ лежит во внешности окружности, описанной вокруг $\triangle obc$. В свою очередь, точка $\bar{l}_1$ лежит внутри $\triangle blc$. Отметим также, что в силу пункта 1⁰ отрезок w_1l_1 служит одной из сторон правильного шестиугольника, строго описанного вокруг $abcdef$. Этот строго описанный шестиугольник далее назовем $w_1l_1t_1p_1s_1u_1$.

Почти правильные шестиугольники $psuwlt$ и $p_1s_1u_1w_1l_1t_1$ удовлетворяют всем требованиям утверждения 8. Тогда точка $\bar{t}$ лежит внутри $\triangle ct_1d$. Продолжая последовательно применять утверждение 8 к последовательности пар точек $\{\bar{t}; \bar{p}_1\}$, $\{\bar{p}_1; \bar{s}\}$, $\{\bar{s}; \bar{u}_1\}$, $\{\bar{u}_1; \bar{w}\}$, получим, что точка $\bar{p}_1$ лежит внутри $\triangle dpe$, $\bar{s}$ – внутри $\triangle esf$, $\bar{u}_1$ – внутри $\triangle fua$ и, наконец, точка $\bar{w}$ – внутри треугольника $\triangle aw_1b$. Но последний факт противоречит положению о том, что $\bar{w}$ лежит на стороне $\triangle aw_1b$. Следовательно, точка $\bar{w}$ не может находиться внутри окружности, описанной вокруг $\triangle oab$.

3⁰. Пусть вершина $\bar{w}$ лежит во внешности указанной окружности. Через $\bar{w}_1$ обозначаем точку пересечения отрезка aw с окружностью, описанной вокруг $\triangle oab$. По аналогии с пунктом 2⁰ строим правильный шестиугольник $w_1l_1t_1p_1s_1u_1$, строго описанный вокруг $abcdef$. Так как $|\bar{ol}| < |\bar{ol}_1|$, точка $\bar{l}$ лежит внутри $\triangle bl_1c$. Тогда

по утверждению 8 точка $\bar{t}_1$ лежит внутри $\triangle ctd$. Применяя утверждение 8 к последовательности пар точек $\{\bar{t}_1; \bar{p}\}$, $\{\bar{p}; \bar{s}_1\}$, $\{\bar{s}_1; \bar{u}\}$, $\{\bar{u}; \bar{w}_1\}$, получаем, что точка $\bar{w}_1$ лежит внутри $\triangle awb$. Но это противоречит принадлежности точки $\bar{w}_1$ стороне aw в $\triangle awb$. Значит, точка $\bar{w}$ не может лежать во внешности окружности, описанной вокруг $\triangle oab$.

Таким образом, показано, что B , как почти правильный шестиугольник $psuwlt$, совпадает с одним из правильных шестиугольников $p_1s_1u_1w_1l_1t_1$, строго описанных вокруг правильного шестиугольника $\Pi(B) = abcdef$.

Итак, если $U^-(B) = 6$ или $U^+(B) = 6$, то B – аффинно правильный шестиугольник. Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Дисканту за полезное обсуждение рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig–Berlin, 1910.
- [2] Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002.
- [3] В. А. Садовничий, *Теория операторов*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986.
- [4] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, Наука, М., 1985.
- [5] В. И. Дискант, “Уточнение изодиаметрального неравенства в геометрии Минковского”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **1:2** (1994), 216–226.
- [6] A. C. Thompson, *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [7] S. Golab, “Quelques problèmes métriques de la géométrie de Minkowski”, *Trav. l’Acad. Mines Cracovie*, **6** (1932), 1–79.
- [8] Ю. Г. Решетняк, “Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых”, *УМН*, **8:6** (1953), 125–126.
- [9] D. Laugwitz, “Konvexe Mittelpunktsbereiche und normierte Raume”, *Math. Z.*, **61** (1954), 235–244.
- [10] J. J. Schäffer, “Inner diameter, perimeter, and girth of spheres”, *Math. Ann.*, **173** (1967), 59–79.
- [11] А. И. Щерба, “Об оценке периметра единичного круга на плоскости Минковского”, *Тр. Рубцовского индустриального ин-та*, 2003, № 12, 96–107.
- [12] B. Grünbaum, “The perimeter of Minkowski unit discs”, *Colloq. Math.*, **15** (1966), 135–139.
- [13] B. Grünbaum, “Self-circumference of convex sets”, *Colloq. Math.*, **13** (1964), 55–57.
- [14] В. В. Макеев, “Об оценке сверху периметра несимметричного единичного круга на плоскости Минковского”, *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **299** (2003), 262–266.

А. И. Щерба

Черкасский государственный технологический университет

г. Черкассы, Украина

E-mail: shcherba_anatoly@mail.ru

Поступило

20.12.2005

Исправленный вариант

30.05.2006