Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Белошадка, Контрпример к гипотезе о размерности, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 136–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:09:42

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Контрпример к гипотезе о размерности

В. К. Белошапка

В работе [1] с ростком каждого вполне невырожденного вещественного подмногообразия комплексного пространства была связана касательная вещественно полиномиальная модельная поверхность, некий аналог соприкасающегося параболоида. Например, если исходный росток – это росток вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$, заданный уравнением $\operatorname{Im} w = |z|^2$ + мономы степени три и выше, то модельная поверхность – это параболоид, заданный уравнением $\operatorname{Im} w = |z|^2$, проективно эквивалентный стандартной трехмерной сфере. Модельные поверхности замечательны во многих отношениях, в частности, группа голоморфных автоморфизмов модельной поверхности обладает естественной структурой группы Ли, сама эта поверхность естественно отождествляется с подгруппой этой группы, а локальная группа голоморфных автоморфизмов ростка исходной вполне невырожденной поверхности локально вкладывается в группу автоморфизмов модельной. При этом, если поверхность не совпадает со своей касательной модельной поверхностью, то это вложение в качестве собственного подмногообразия. Таким образом, модельная поверхность симметричнее исходного вполне невырожденного ростка. Это утверждение почти автоматически распространяется на ростки, вполне невырожденные в точке общего положения, но не распространяется на ростки, не являющиеся вполне невырожденными всюду. В рассмотренном выше частном случае гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ сфера имеет 8-мерную группу голоморфных симметрий, но симметрии гиперплоскости $\operatorname{Im} w = 0$ бесконечномерны. Однако в целом положение дел в $\mathbb{C}^2$ таково: если росток гиперповерхности не эквивалентен ни гиперплоскости, ни гиперсфере, то размерность группы симметрий не превосходит четырех. Поэтому для произвольного ростка вещественно аналитической поверхности размерности d и коразмерности K без каких-либо предположений о невырожденности представлялась правдоподобной следующая альтернатива: либо размерность локальной группы бесконечна, либо она не превосходит максимума размерностей модельных поверхностей тех же размерности и коразмерности (он всегда конечен). Эта гипотеза была доказана для четырехмерных и пятимерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ [2], [3]. Цель данной работы – показать, что в данной формулировке гипотеза нарушается для девятимерных поверхностей в $\mathbb{C}^7$.

Примером такой поверхности является поверхность, заданная в $\mathbb{C}^7$ уравнениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_1 &= |z_1|^2, & \operatorname{Im} w_2 &= |z_2|^2, & \operatorname{Im} w_3 &= |z_2|^2 \cdot 2 \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} w_4 &= |z_2|^2 \cdot 2 \operatorname{Im} z_2, & \operatorname{Im} w_5 &= |z_2|^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Эта поверхность представляет собой прямое произведение двух модельных поверхностей: трехмерной сферы $\operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2$ в $\mathbb{C}^2$ и шестимерной модельной поверхности в $\mathbb{C}^5$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-0981 и № НШ-2040.2003.1.

вида

$$\operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = |z_2|^2 \cdot 2 \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} w_4 = |z_2|^2 \cdot 2 \operatorname{Im} z, \quad \operatorname{Im} w_5 = |z_2|^4. \quad (2)$$

Размерность группы первой поверхности, как хорошо известно, – восемь и второй [4] – тоже восемь. Можно показать, что группа этого произведения есть прямое произведение групп, но, даже не апеллируя к этому, можно утверждать, что ее размерность не меньше шестнадцати.

Оба сомножителя имеют одномерную комплексную касательную, т.е. первая – это поверхность типа $(1, 1)$, а вторая – типа $(1, 4)$; таким образом, их произведение имеет тип $(2, 5)$. Произведение двух модельных поверхностей не является модельной поверхностью типа $(2, 5)$, например потому, что оно не является вполне невырожденным. Полная невырожденность означает, что распределение касательных пространств получается из распределения комплексных касательных с помощью минимального числа операций взятия скобок векторных полей. В соответствии с этим, чтобы получить из комплексно двумерной комплексной касательной дополнительные пять размерностей надо взять четыре однократные скобки и одну двукратную. В соответствии с этим вполне невырожденная модельная поверхность типа $(2, 5)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w_1 = |z_1|^2, \quad \operatorname{Im} w_2 = |z_2|^2, \quad \operatorname{Im} w_3 = 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2, \quad \operatorname{Im} w_4 = 2 \operatorname{Im} z_1 \bar{z}_2, \\ \operatorname{Im} w_5 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z, z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\Phi(z, z, \bar{z})$ произвольный не равный тождественному нулю вещественный многочлен от $(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ бистепени $(2, 1)$, т.е. степени 2 по голоморфным переменным и степени 1 по антиголоморфным.

Все модельные поверхности голоморфно однородны, поэтому вопрос о размерности группы автоморфизмов сводится к вопросу о размерности стабилизатора точки. В частности, утверждения о размерностях групп наших сомножителей эквивалентны тому, что стабилизатор первой имеет размерность пять, а второй два. Было бы не трудно показать, исходя непосредственно из описания алгебры Ли [5], соответствующей группе поверхности (3), что алгебра стабилизатора состоит только из нулевой градуированной компоненты, соответствующей линейной подгруппе стабилизатора. Но, к счастью, соответствующее утверждение в общем виде (для всех кубических модельных поверхностей) недавно было доказано И. Коссовским [6] и мы можем на него сослаться. Таким образом, интересующий нас стабилизатор изоморфен подгруппе L группы $GL(2, \mathbb{C})$, состоящей из преобразований, сохраняющих многочлен $\Phi(z, z, \bar{z})$ с точностью до ненулевого множителя, т.е. $\Phi(Az, Az, \bar{A}\bar{z}) = \rho \Phi(z, z, \bar{z})$. Если в качестве λ взять $\lambda = \rho^{1/3}$ и положить $C = \lambda A$, то условие на подгруппу L примет вид $\Phi(Az, Az, \bar{A}\bar{z}) = \Phi(z, z, \bar{z})$, т.е. наша группа – это прямое произведение $\mathbb{R}^*$ на подгруппу L_0 , состоящую из линейных преобразований $\mathbb{C}^2$, сохраняющих $\Phi(z, z, \bar{z})$. Алгебра Ли, соответствующая L_0 , определяется соотношением вида

$$2\Phi(az, z, \bar{z}) + \Phi(z, z, \bar{a}\bar{z}) = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы анализировать это соотношение, положим $\Phi(z, z, \bar{z}) = \phi_1(z, z)\bar{z}_1 + \phi_2(z, z)\bar{z}_2$, где ϕ_1 и ϕ_2 – квадратичные формы от двух переменных. Условие невырожденности означает, что хотя бы одна из этих форм не равна нулю тождественно. Соответствующие им билинейные формы запишем как $\phi_j(z, \zeta) = P_j z_1 \zeta_1 + Q_j(z_1 \zeta_2 + z_2 \zeta_1) + R_j z_2 \zeta_2$, где $j = 1, 2$, а элементы матрицы A обозначим

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда, подставляя все это в условие (4) и отделяя коэффициенты при шести мономах нашей кубической формы, получаем

$$\begin{aligned} 2P_1x_1 + 2Q_1x_3 + P_1\bar{x}_1 + P_2\bar{x}_3 &= 0, \\ Q_1x_1 + R_1x_3 + Q_1x_4 + P_1x_2 + Q_1\bar{x}_1 + Q_2\bar{x}_3 &= 0, \\ 2Q_1x_2 + 2R_1x_4 + R_1\bar{x}_1 + R_2\bar{x}_3 &= 0, \\ 2P_2x_1 + 2Q_2x_3 + P_1\bar{x}_2 + P_2\bar{x}_4 &= 0, \\ P_2x_2 + Q_2x_1 + Q_2x_4 + R_2x_3 + Q_1\bar{x}_2 + Q_2\bar{x}_4 &= 0, \\ 2Q_2x_2 + 2R_2x_4 + R_1\bar{x}_2 + R_2\bar{x}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Покажем, что вещественная размерность пространства решений этой вещественно линейной системы уравнений относительно восьми переменных (вещественных и мнимых частей x_1, x_2, x_3, x_4) не превосходит четырех при условии, что хотя бы один из шести комплексных коэффициентов $(P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2)$ отличен от нуля.

Если $P_1 \neq 0$, то из первого и второго уравнения x_1 и x_2 выражаются через x_3 и x_4 и размерность, тем самым, не выше четырех. Симметрично если $R_2 \neq 0$, то из шестого и пятого уравнений x_4 и x_3 выражаются через x_1 и x_2 и размерность, также, не выше четырех. Пусть теперь $P_1 = R_2 = 0$ и система принимает вид

$$\begin{aligned} 2Q_1x_3 + P_2\bar{x}_3 &= 0, \\ Q_1x_1 + R_1x_3 + Q_1x_4 + Q_1\bar{x}_1 + Q_2\bar{x}_3 &= 0, \\ 2Q_1x_2 + 2R_1x_4 + R_1\bar{x}_1 &= 0, \\ 2P_2x_1 + 2Q_2x_3 + P_2\bar{x}_4 &= 0, \\ P_2x_2 + Q_2x_1 + Q_2x_4 + Q_1\bar{x}_2 + Q_2\bar{x}_4 &= 0, \\ 2Q_2x_2 + R_1\bar{x}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда, если $Q_1 \neq 0$, то из второго уравнения выражаем x_4 через x_1 и x_3 , а из третьего — x_2 , т.е. размерность не выше четырех. Симметрично если $Q_2 \neq 0$, то из пятого уравнения выражаем x_1 через x_2 и x_4 , а из четвертого — x_3 , и размерность тоже не выше четырех. Пусть теперь $Q_1 = Q_2 = 0$; тогда система принимает вид

$$\begin{aligned} P_2\bar{x}_3 &= 0, \\ R_1x_3 &= 0, \\ 2R_1x_4 + R_1\bar{x}_1 &= 0, \\ 2P_2x_1 + P_2\bar{x}_4 &= 0, \\ P_2x_2 &= 0, \\ R_1\bar{x}_2 &= 0, \end{aligned}$$

из которого сразу видно, что если хотя бы один из оставшихся параметров P_2 или R_1 отличен от нуля, то размерность не выше четырех.

Размерность четыре реализуется, например, в случае, если $P_1 = 1$, а все остальные параметры равны нулю, т.е. для формы вида $\Phi(z, z, \bar{z}) = z_1^2 \bar{z}_1$. Таким образом, размерность стабилизатора точки у этой поверхности равна $1 + 4 = 5$, а размерность полной группы равна $9 + 1 + 4 = 14$. Итак, резюмируя, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Размерность стабилизатора группы модельной поверхности типа (2,5) не превосходит пяти, а размерность полной группы — четырнадцати. Для локальной группы автоморфизмов роста произвольной вполне невырожденной поверхности и стабилизатора точки в ней 14 и 5 будут оценками сверху.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Стандартным рассуждением можно показать, что оценка 14 остается справедливой и для ростков вполне невырожденных лишь в точке общего положения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Другим стандартным рассуждением, апеллирующим к формальной нормальной форме, можно показать, что если для вполне невырожденного аналитического ростка размерности 5 или 14 реализуются, то росток эквивалентен модельной поверхности.

Итак, гипотеза, в прежней формулировке, оказалась неверной. А вопрос остался. Какой класс поверхностей фиксированного CR-типа претендует на роль самых симметричных? В частности, это не ясно для типа $(2, 5)$ и неизвестно, чему равен максимум размерностей. Ясно лишь то, что он не меньше 16-ти.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. К. Белошапка, *Матем. заметки*, **75**:4 (2004), 507–522. [2] В. К. Белошапка, В. В. Ежов, Г. Шмальц, “Голоморфная классификация четырехмерных поверхностей в $\mathbb{C}^3$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006 (в печати). [3] В. К. Белошапка, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 171–179. [4] Е. Н. Шананина, *Матем. заметки*, **67**:3 (2000), 452–459. [5] В. К. Белошапка, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 503–519. [6] Р. Гаммель, И. Коссовский, “Оболочка голоморфности модельной поверхности степени три и феномен “жесткости”, *Тр. МИАН*, 2006 (в печати).

В. К. Белошапка

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: vkb@strogino.ru

Поступило

19.01.2006