Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Игнатьева, Неравенство типа Соболева–Пуанкаре на метрических пространствах в терминах шарп-максимальных функций, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 140–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:11:36

Неравенство типа Соболева–Пуанкаре на метрических пространствах в терминах шар-максимальных функций

Е. В. Игнатьева

Пусть X – хаусдорфово пространство с квазиметрикой d и регулярной борелевской мерой μ , связанными условием удвоения порядка $\gamma > 0$:

$$\mu B(x, s) \leq cs^\gamma t^{-\gamma} \mu B(x, t), \quad x \in X, \quad 0 < t < s. \quad (1)$$

(Через c всюду обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от определенных параметров, но эти зависимости для нас несущественны.) Тройку (X, d, μ) тогда называют *пространством однородного типа* [1].

Целью нашей работы является доказательство аналогов классического неравенства Пуанкаре

$$\left(\int_B \left| f(x) - \frac{1}{|B|} \int_B f dx \right|^p dx \right)^{1/p} \leq cr \left(\int_B |\nabla f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

($B \subset \mathbb{R}^n$ – шар радиуса r , $|B|$ – мера Лебега B) для функций на пространствах однородного типа. Такие обобщения рассматривались в работах [2]–[4], при этом роль градиента играли некоторые максимальные функции. Именно, для $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ положим

$$\mathcal{S}_{\eta, A} f(x) = \mathcal{S}_{\eta} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\eta(r) \mu B} \int_B |f - A_B f| d\mu, \quad (2)$$

где $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – возрастающая положительная функция и $\sup$ берется по всем шарам $B = B(y, r)$, содержащим точку x . Здесь $A_B: L^1_{\text{loc}}(X) \rightarrow L^1_{\text{loc}}(X)$ – линейный оператор, определенный для каждого шара $B \subset X$, удовлетворяющий условиям (см. [3]):

1) для любой функции $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ и для любого шара $B \subset X$

$$|A_B f(y)| \leq c |f|_B, \quad \text{где} \quad f_B = \frac{1}{\mu B} \int_B f d\mu = \int_B f d\mu; \quad (3)$$

2) если $B' \subset B$, то $A_{B'}(A_B f) = A_B f$, а также для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $B \subset X$, $A_B(\lambda) = \lambda$.

Простейшим примером могут служить средние значения $A_B f = f_B$ функции $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ на шаре B . В случае $X = \mathbb{R}^n$ в качестве A_B можно взять проекторы на подпространство полиномов степени не выше заданного числа $k \in \mathbb{N}$.

Максимальные функции $\mathcal{S}_{\eta} f$ для $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, изучались в [3]. Впервые же операторы подобного рода появились в работах Кальдерона [5], Кальдерона–Скотта [6]. Исследования по обобщению и применению операторов из [5], [6] в дальнейшем были развиты в монографии [7], где для $X = \mathbb{R}^n$ подробно изучены максимальные функции $\mathcal{S}_{\eta} f$, $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, а A_B – проектор на подпространство полиномов степени $[\alpha]$ или $\max\{n \in \mathbb{Z}: n < \alpha\}$.

Использование таких максимальных функций дает возможность определить аналоги классов Соболева на произвольном метрическом пространстве с мерой и дать эквивалентные описания (см., например, [8] и [9], где определены классы Соболева первого и высших порядков соответственно в терминах неравенств типа Пуанкаре).

Основной результат нашей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p > 0$, $0 < \alpha < \gamma/p$, $q = \gamma p/(\gamma - \alpha p)$, $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$, $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$. Если x_0 – точка Лебега функции f , то

$$|f(x_0) - A_{B(x_0, r)} f(x_0)| \leq c\eta(r)(\mathcal{S}_\eta f(x_0))^{1-\alpha p/\gamma} \left(\int_{B(x_0, r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{\alpha/\gamma}. \quad (4)$$

В частности, для любого шара $B = B(x, r)$

$$\left(\int_B |f - A_B f|^q d\mu \right)^{1/q} \leq c\eta(r) \left(\int_{2a_d B} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (5)$$

Здесь $\Omega[\alpha, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta < \infty$, – класс положительных возрастающих функций $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, для которых $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает и $\eta(t)t^{-\beta+\delta}$ почти убывает при некотором $0 < \delta < \beta - \alpha$. (Говорят, что функция $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ почти возрастает (убывает), если найдется такая постоянная $c \geq 1$, что для всех $0 < t_1 < t_2$ выполняется неравенство $\eta(t_1) \leq c\eta(t_2)$ (соответственно $\eta(t_2) \leq c\eta(t_1)$)). Пусть еще $\Omega[\alpha, \infty) = \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega[\alpha, \beta]$.

Отметим, что при более жестких ограничениях на меру μ и $\eta(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, $1 < p < \gamma/\alpha$ неравенство (5) имеется в [3]. Частный случай $A_B f = f_B$ теоремы 1 доказан в работе [4]. При доказательстве теоремы 1 мы опираемся на схему работы [4].

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, $0 < r_1 \leq r_2$. Тогда

1) если $x_0 \in X$, то

$$\|A_{B(x_0, r_1)} f - A_{B(x_0, r_2)} f\|_{L^\infty(B(x_0, r_1))} \leq c \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\gamma \int_{B(x_0, r_2)} |f - A_{B(x_0, r_2)} f| d\mu;$$

2) если $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \neq \emptyset$, то для любых точек $z_1, z_2 \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ выполнено неравенство

$$|A_{B(x_1, r_1)} f(z_1) - A_{B(x_2, r_2)} f(z_1)| \leq c \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\gamma \int_{B(z_2, R)} |f - A_{B(z_2, R)} f| d\mu,$$

где $R = 2a_d r_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для любой точки $z \in B(x_0, r_1)$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned} |A_{B(x_0, r_1)} f(z) - A_{B(x_0, r_2)} f(z)| &= |A_{B(x_0, r_1)} f(z) - A_{B(x_0, r_1)}(A_{B(x_0, r_2)} f)(z)| \\ &= |A_{B(x_0, r_1)}[f - A_{B(x_0, r_2)} f](z)| \leq \int_{B(x_0, r_1)} |f - A_{B(x_0, r_2)} f| d\mu \\ &\leq c \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\gamma \int_{B(x_0, r_2)} |f - A_{B(x_0, r_2)} f| d\mu. \end{aligned}$$

2) Легко видеть, что $B(x_i, r_i) \subset B(z_2, R)$, $i = 1, 2$; тогда $\mu B(z_2, R)/(\mu B(x_i, r_i)) \leq c(R/r_i)^\gamma$ (см. лемму 1 в [4]) и

$$\begin{aligned} |A_{B(x_1, r_1)} f(z_1) - A_{B(x_2, r_2)} f(z_1)| &= |(A_{B(x_1, r_1)} f - A_{B(z_2, R)} f)(z_1)| + |(A_{B(x_2, r_2)} - A_{B(z_2, R)} f)(z_1)| \\ &\leq \int_{B(x_1, r_1)} |f - A_{B(z_2, R)} f| d\mu + \int_{B(x_2, r_2)} |f - A_{B(z_2, R)} f| d\mu \\ &\leq c \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^\gamma \int_{B(z_2, R)} |f - A_{B(z_2, R)} f| d\mu. \end{aligned}$$

Если $x \in X$ – точка Лебега для функции $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$, то по определению

$$\lim_{r \rightarrow +0} \int_{B(x, r)} |f - f(x)| d\mu = 0. \quad (6)$$

Для каждой функции $f \in L^1_{\text{loc}}(X)$ соотношение (6) выполнено μ -почти всюду [1]. Кроме того, равенство

$$\lim_{r \rightarrow +0} A_{B(x,r)} f(x) = f(x) \quad (7)$$

также выполнено μ -почти всюду. В самом деле, при $x \in X$

$$|A_{B(x,r)} f(x) - f(x)| = |A_{B(x,r)} [f - f(x)](x)| \leq c \int_{B(x,r)} |f - f(x)| d\mu.$$

Заметим также, что для любой функции $\eta \in \Omega[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, выполнены неравенства

$$\int_0^t \eta(s) \frac{ds}{s} \leq c\eta(t), \quad \int_t^\infty \eta(s) s^{-\beta-1} ds \leq c\eta(t) t^{-\beta}, \quad t > 0. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть

$$u(x, s) = \frac{1}{\eta(s)} \int_{B(x,s)} |f - A_{B(x,s)} f| d\mu.$$

Тогда в силу первого утверждения леммы 1 справедливо неравенство

$$u(x, t) \leq cu(x, s) \quad \text{при} \quad t \leq s \leq 2t. \quad (9)$$

Пусть $B_k = B(x_0, 2^{-k}r)$, $k \geq 0$; тогда с учетом (7) и леммы 1 имеем

$$|f(x_0) - A_{B(x_0,r)} f(x_0)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (A_{B_{k+1}} f(x_0) - A_{B_k} f(x_0)) \right| \leq c \sum_{k=0}^{\infty} \eta(2^{-k}r) u(x_0, 2^{-k}r). \quad (10)$$

Отсюда, из условия $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$ и из (9) выводим

$$\begin{aligned} |f(x_0) - A_{B(x_0,r)} f(x_0)| &\leq c\eta(r)u(x_0, r) + c \sum_{k=1}^{\infty} \eta(2^{-k}r)u(x_0, 2^{-k}r) \\ &\leq c\eta(r)u(x_0, r) + c \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}r}^{2^{-(k-1)}r} \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} \\ &\leq c\eta(r)u(x_0, r) + c \int_0^r \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для оценки последнего интеграла обозначим для краткости

$$I = \left(\int_{B(x_0,r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p}$$

и рассмотрим два случая.

1. Пусть $\mathcal{S}_\eta f(x_0) \leq I$; тогда в силу условия $\eta \in \Omega[\alpha, \gamma/p]$ и (8)

$$\begin{aligned} \int_0^r \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} &\leq \mathcal{S}_\eta f(x_0) \int_0^r \eta(s) \frac{ds}{s} \leq c\eta(r)\mathcal{S}_\eta f(x_0) \\ &= c\eta(r)(\mathcal{S}_\eta f(x_0))^{1-\alpha p/\gamma} (\mathcal{S}_\eta f(x_0))^{\alpha p/\gamma} \leq c\eta(r)(\mathcal{S}_\eta f(x_0))^{1-\alpha p/\gamma} I^{\alpha p/\gamma}. \end{aligned} \quad (12)$$

2. Пусть $\mathcal{S}_\eta f(x_0) > I$. Положим

$$t = r \left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)} \right)^{p/\gamma} < r$$

и разобьем последний интеграл в (11) на две части

$$\int_0^r \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} = \left(\int_0^t + \int_t^r \right) \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} \equiv I_1 + I_2,$$

которые будем оценивать по-разному. I_1 оценивается аналогично (12):

$$I_1 \leq c\eta(t)\mathcal{S}_\eta f(x_0) \leq c\eta\left(r\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{p/\gamma}\right)\mathcal{S}_\eta f(x_0). \quad (13)$$

Для оценки I_2 заметим, что $u(x_0, s) \leq \mathcal{S}_\eta f(x)$, $x \in B(x_0, s)$. Усредняя это неравенство по шару $B(x_0, s)$, а также используя условие удвоения (1), получим

$$u(x_0, s) \leq \left(\int_{B(x_0, s)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\mu B(x_0, r)}{\mu B(x_0, s)} \right)^{1/p} I \leq c \left(\frac{r}{s} \right)^{\gamma/p} I. \quad (14)$$

Следовательно, в силу (8)

$$\begin{aligned} I_2 &\leq cIr^{\gamma/p} \int_t^r \eta(s)s^{-\gamma/p-1} ds \leq cI \left(\frac{r}{t} \right)^{\gamma/p} \eta(t) \\ &\leq cIr^{\gamma/p} \eta\left(r\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{p/\gamma}\right) \left(r\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{p/\gamma}\right)^{-\gamma/p} \leq c\eta\left(r\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{p/\gamma}\right) \mathcal{S}_\eta f(x_0). \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (13), вытекает, что в рассматриваемом случае 2 выполнена оценка

$$\int_0^r \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} \leq c\eta\left(r\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{p/\gamma}\right) \mathcal{S}_\eta f(x_0).$$

Поэтому с учетом того, что $\eta(t)t^{-\alpha}$ почти возрастает, справедливо соотношение

$$\int_0^r \eta(s)u(x_0, s) \frac{ds}{s} \leq c\eta(r)\left(\frac{I}{\mathcal{S}_\eta f(x_0)}\right)^{\alpha p/\gamma} \mathcal{S}_\eta f(x_0) = c\eta(r)(\mathcal{S}_\eta f(x_0))^{1-\alpha p/\gamma} I^{\alpha p/\gamma}.$$

Первое слагаемое справа в (11) оценивается с помощью неравенства (14), в котором надо взять $s = r$:

$$u(x_0, r) = [u(x_0, r)]^{1-\alpha p/\gamma} [u(x_0, r)]^{\alpha p/\gamma} \leq [\mathcal{S}_\eta f(x_0)]^{1-\alpha p/\gamma} I^{\alpha p/\gamma},$$

и неравенство (4) доказано.

Для доказательства (5) запишем

$$\begin{aligned} \int_B |f - A_B f|^q d\mu &= \int_B |[f(y) - A_{B(y,r)} f(y)] + [A_{B(y,r)} f(y) - A_B f(y)]|^q d\mu(y) \\ &\leq \int_B |f(y) - A_{B(y,r)} f(y)|^q d\mu(y) + \int_B |A_{B(y,r)} f(y) - A_B f(y)|^q d\mu(y) \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для оценки интеграла I_1 заметим, что $B(y, r) \subset B(x, 2a_d r)$ при $y \in B(x, r)$. Поэтому в силу уже доказанного неравенства (4) получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c\eta^q(r) \int_B (\mathcal{S}_\eta f(y))^{q(1-\alpha p/\gamma)} \left(\int_{B(y,r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{q\alpha/\gamma} d\mu(y) \\ &\leq c\eta^q(r) \left(\int_{B(x, 2a_d r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{q\alpha/\gamma} \int_B (\mathcal{S}_\eta f(y))^p d\mu(y) \\ &\leq c\eta^q(r) \left(\int_{B(x, 2a_d r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Выражение под знаком интеграла I_2 оцениваем с помощью утверждения 2) леммы 1:

$$|A_{B(y,r)}f(y) - A_Bf(y)| \leq c \int_{B(x,2a_d r)} |f - A_{B(x,2a_d r)}f| d\mu \leq c\eta(r)\mathcal{S}_\eta f(z)$$

при всех $y \in B$ и $z \in B(x, 2a_d r)$. Следовательно, усреднение по $z \in B(x, 2a_d r)$ приводит нас к неравенствам

$$|A_{B(y,r)}f(y) - A_Bf(y)| \leq c\eta(r) \left(\int_{B(x,2a_d r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p}, \quad y \in B, \quad (15)$$

и, значит,

$$I_2 \leq c\eta^q(r) \left(\int_{B(x,2a_d r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{q/p}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что для $\alpha p = \gamma$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ справедливы следующие аналоги оценок (4), (5):

$$\begin{aligned} |f(x_0) - A_{B(x_0,r)}f(x_0)| &\leq c\eta(r) \left(\int_{B(x_0,r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\quad \times \max \left(1, \ln \left[\mathcal{S}_\eta f(x_0) \left(\int_{B(x_0,r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{-1/p} \right] \right), \\ \int_B \exp \left(c \frac{|f - A_Bf|}{\eta(r)} \left(\int_{2a_d B} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{-1/p} \right) d\mu &\leq c \end{aligned}$$

для любого шара $B = B(x, r)$.

В случае же $\alpha p > \gamma$, $\eta \in \Omega[\alpha, \infty)$ для любой точки Лебега x_0 функции f выполнено

$$|f(x_0) - A_{B(x_0,r)}f(x_0)| \leq c\eta(r) \left(\int_{B(x_0,r)} (\mathcal{S}_\eta f)^p d\mu \right)^{1/p}.$$

(см. [4] в случае $A_Bf = f_B$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. R. Coifman, G. Weiss, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1977), 569–645.
 [2] J. Dorransoro, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **297**:2 (1986), 669–685. [3] P. Cifuentes, J. Dorransoro, J. Sueiro, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **332**:1 (1992), 331–350. [4] И. А. Ива-
 нишко, В. Г. Кротов, *Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси*, **14**:1 (2005). [5] A. P. Calderon, *Studia Math.*, **44** (1972), 563–582. [6] A. P. Calderon, R. Scott, *Studia Math.*, **62** (1978), 75–92. [7] R. DeVore, R. Sharpley, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **47**:293 (1984). [8] P. Hajlasz, P. Koskela, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **145**:688 (2000). [9] Y. Liu, G. Lu, R. L. Wheeden, *Ann. Math.*, **323**:1 (2002), 157–174.

Е. В. Игнатьева

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: ignatieval@mail.ru

Поступило

17.05.2006