Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кочергин, Невырожденные седла и отсутствие перемешивания II, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 145–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:34:31

Невырожденные седла и отсутствие перемешивания II

А. В. Кочергин

1. Такие специальные потоки возникают при рассмотрении гладких потоков на компактных поверхностях, эргодических относительно меры с гладкой плотностью и имеющих неподвижные точки. Как показано в [1], время прохождения траектории через окрестность невырожденной седловой точки гладкого потока имеет порядок логарифма минимального расстояния от этой точки, поэтому в случае, когда поток имеет конечное число неподвижных точек и все они суть невырожденные седла, поток представляется в виде специального потока, построенного, вообще говоря, по перекладыванию отрезков окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и функции вида

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^N (-A_i \ln\{x - \bar{x}_i\} - B_i \ln\{\bar{x}_i - x\}), \quad A_i, B_i > 0, \quad (1)$$

где f_0 – функция ограниченной вариации и $\sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N B_i$. В отдельных случаях рассматриваемое перекладывание является поворотом окружности [2].

Функцию вида (1) с ограничением $\sum_{i=1}^N A_i = \sum_{i=1}^N B_i$ мы называем *симметричной функцией с логарифмическими особенностями*.

ТЕОРЕМА 1. *Специальный поток, построенный по любому повороту окружности и симметричной функции с логарифмическими особенностями, не перемешивает.*

Аналогичный результат, но для углов, допускающих аппроксимацию рациональными дробями со скоростью $\text{const}/(q^2 \ln q)$, получен в работе автора [1]. М. Леманчик [3] заметил одну очень простую ситуацию, когда утверждение верно для любого иррационального угла – это случай симметричных особенностей, когда $A_i = B_i$ для любого i .

Заметим, что если все особенности функции степенные, что соответствует вырожденным неподвижным точкам в потоке на поверхности, то специальный поток над эргодическим перекладыванием отрезков перемешивает [4].

Для гладких асимметричных функций с логарифмическими особенностями, когда $\sum_{i=1}^N A_i \neq \sum_{i=1}^N B_i$ (такие потоки возникли в работе В. И. Арнольда [5]), напротив, доказано наличие перемешивания как для некоторого класса диофантовых чисел вращения, т.е. достаточно плохо аппроксимируемых рациональными числами [6], [7], так и для достаточно хорошо аппроксимируемых, лиувиллевых, чисел при некоторых ограничениях на коэффициенты A_i и B_i [8].

Остается открытым вопрос о существовании неперемешивающего специального потока, построенного по какому-нибудь эргодическому повороту окружности и асимметричной функции с логарифмическими особенностями. Ничего не известно также о перемешивающих свойствах специального потока над перекладыванием отрезков с “крышей”, имеющей логарифмические особенности.

2. Через T мы будем обозначать поворот окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол ρ , $\rho = [k_1, \dots, k_n, \dots]$ – разложение ρ в цепную дробь, p_n/q_n – n -ю подходящую к ρ дробь, $\delta_n = q_n \rho - p_n$. Известно, что $|\delta| < 1/q_{n+1}$ (см. [9]).

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Ведущие научные школы РФ”, грант № 6849.2006.1.

Основным инструментом изучения перемешивающих свойств специального потока над поворотом окружности служат “биркгофовы суммы”, построенные по T и функции f : для $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(x) = f_T^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f(T^k x), \quad f^{-r}(x) = -f^r(T^{-r}x), \quad f^0(x) \equiv 0.$$

Через $O_{f,n}(\eta)$ обозначим объединение (η/q_n) -окрестностей особых точек биркгофовой суммы f^{q_n} . Заметим, что $\mu(O_{f,n}(\eta)) \leq 2N\eta$, где N – число особых точек функции f .

Доказательство отсутствия перемешивания сводится к следующей теореме о поведении биркгофовых сумм симметричной функции f с логарифмическими особенностями.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $\eta > 0$ существует такое число $M > 0$, что для бесконечной подпоследовательности номеров n значения каждой биркгофовой суммы f^{q_n} на множестве $\mathbb{S}^1 \setminus O_{f,n}(\eta)$ содержатся в объединении не более, чем 5^{2N-1} отрезков, каждый из которых не длиннее M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричную функцию f с N особыми точками можно представить в виде суммы $f = f_0 + \sum_{i=1}^{2N-1} c_i g_i$ с неотрицательными коэффициентами c_i , где каждая из функций g_i является сдвигом функции $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ вида $g(x) = -\ln\{x-a\} - \ln\{-a-x\}$ для некоторого a . Нетрудно видеть, что теорему 2 достаточно доказать для функции g .

Укажем правило выбора подпоследовательности номеров подходящих дробей, для которых будет показана справедливость теоремы. Если последовательность неполных частных разложения p в цепную дробь ограничена, то выберем подпоследовательность номеров n , для которых $q_n|\delta| < 1/2$ (такой номер есть среди каждых двух последовательных номеров [9]). Если же последовательность неполных частных k_n не ограничена, то выберем подпоследовательность номеров n , для каждого из которых $k_{n+1} \geq \max(k_1, \dots, k_n)$. В этом случае $q_n|\delta| < q_n/q_{n+1} < 1/k_{n+1} < 1/2$, начиная с некоторого номера.

Фиксируем n . Обозначим $K_n = \max(k_1, \dots, k_n)$. В дальнейшем для краткости индекс n будем опускать: будем писать просто p/q , $\delta = q\rho - p$, K , а вместо $O_{g,n}(\eta)$ будем писать $O(\eta)$.

Для удобства обозначим $u(x) = -\ln x$, $g(x) = u(\{x-a\}) + u(\{-x-a\})$. Тогда

$$g^q(x) = \sum_{r=0}^{q-1} u(\{x+r\rho-a\}) + \sum_{r=0}^{q-1} u(\{-(x+r\rho)-a\}). \quad (2)$$

Положим

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{q} + \frac{a_0}{q}, & A \in \mathbb{Z}_+, & \quad 0 \leq A \leq q-1, & \quad -\frac{1}{2} < a_0 \leq \frac{1}{2}, \\ x &= \frac{X}{q} + \frac{t}{q}, & X \in \mathbb{Z}_+, & \quad 0 \leq X \leq q-1, & \quad -\frac{1}{2} < t \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, перенумеруем слагаемые в (2) следующим образом. В первой сумме положим

$$s = \{X - A + r\rho\}_q \iff r = \pi_X^+(s) = \{p^{-1}(-X + A + s)\}_q,$$

где p^{-1} – вычет, обратный к $p \pmod{q}$, $\{\cdot\}_q = q\{\cdot/q\}$. Аналогично, для второй суммы положим

$$s = \{-X - A - r\rho\}_q, \quad \pi_X^-(s) = \{p^{-1}(-X - A - s)\}_q.$$

В итоге для $x \in ((X-1/2)/q, (X+1/2)/q]$ получим $g^q(x) = \varphi_{X,1}(t) + \varphi_{X,2}(t)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_{X,1}(t) &= \sum_{s=2}^{q-2} \left(u\left(\frac{1}{q}(t - a_0 + \pi_X^+(s)\delta + s)\right) + u\left(\frac{1}{q}(-t - a_0 - \pi_X^-(s)\delta + s)\right) \right), \\ \varphi_{X,2}(t) &= \sum_{s=0,1,q-1} \left(u\left(\frac{\{t - a_0 + \pi_X^+(s)\delta + s\}_q}{q}\right) + u\left(\frac{\{-t - a_0 - \pi_X^-(s)\delta + s\}_q}{q}\right) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для каждого X обозначим через $O'_X(\eta)$ объединение η -окрестностей особых точек функции $\varphi_{X,2}$. В силу (3) условие $x \in O(\eta) \cap (X/q - 1/(2q), X/q + 1/(2q)]$ равносильно $t \in O'_X(\eta)$.

Справедливость теоремы 2 для функции g легко следует из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. Для любого $\eta \in (0, 1/2)$ существуют не более пяти отрезков $I_{n,1}, \dots, I_{n,5}$, длина каждого из которых не более $5 \ln(1/\eta) + 6$ и объединение которых содержит множества значений функций $\varphi_{X,2}((-1, 1] \setminus O'_X(\eta))$ для всех $X = 0, \dots, q-1$.

Доказательство леммы основано на том, что функция $\varphi_{X,2}$ может иметь в интервале $(-1/2, 1/2)$ не менее одной и не более пяти особых точек.

ЛЕММА 2. Существует отрезок $I_{n,0}$ длины не более, чем $40K/k_{n+1} + 11$, содержащий множества значений функций $\varphi_{X,1}$ для всех $X = 0, \dots, q-1$.

Справедливость леммы 1 очевидно следует из следующих двух оценок.

ЛЕММА 3. Для любого $X = 0, \dots, q-1$ и любого $t \in (-1/2, 1/2)$ выполнено неравенство $|\varphi'_{X,1}(t)| < 7$.

Аналогичная лемма доказана, например, в [7].

ЛЕММА 4. Множество $\bigcup_{X=0}^{q-1} \varphi_{X,1}(0)$ содержится в отрезке длины не более, чем $40K/k_{n+1} + 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем (4). Воспользовавшись разложением логарифма и учитывая равенство

$$\pi_X^+(s) - \pi_X^-(s) = \{p^{-1}(2A + 2s)\}_q - \frac{q}{2} + \frac{q}{2}\varepsilon_X(s),$$

$$\text{где } \varepsilon_X(s) = 1 \text{ при } \pi_X^+(s) \geq \pi_X^-(s), \quad \varepsilon_X(s) = -1 \text{ при } \pi_X^+(s) < \pi_X^-(s),$$

можно показать, что

$$|\varphi_{X,1}(0) - \Phi| \leq \frac{q\delta}{2}\Sigma + 2,$$

где

$$\Phi = \sum_{s=2}^{q-2} \left(2 \ln \frac{q}{-a_0 + s} + \frac{(\{p^{-1}(2A + 2s)\}_q - q/2)\delta}{-a_0 + s} \right)$$

— константа, не зависящая от X и t (и, тем самым, от x), и $\Sigma = \sum_{s=2}^{q-2} \varepsilon_X(s)/s$.

Применим к Σ преобразование Абеля: положим $\sigma(s) = \sum_{r=2}^s \varepsilon_X(r)$; тогда

$$\Sigma = \frac{\sigma(q-2)}{q-2} + \sum_{s=2}^{q-3} \frac{\sigma(s)}{s(s+1)}.$$

Осталось доказать следующую лемму.

ЛЕММА 5. Для любого $s = 3, \dots, q-2$

$$|\sigma(s)| \leq 8K(3 \ln s + 2). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha = \{p^{-1}X/q\}$, $\beta_0 = \{p^{-1}A/q\}$, $\beta = \{p^{-1}/q\}$, $\beta_s = \{\beta_0 + s\beta\}$. Тогда условие $\pi_X^+(s) \geq \pi_X^-(s)$ равносильно условию $\beta_s \in F$, где $F = [0, \alpha) \cup [1/2, 1 - \alpha]$ при $0 \leq \alpha \leq 1/2$, или $F = [0, 1 - \alpha] \cup [1/2, \alpha)$ при $1/2 < \alpha < 1$. Множество F зависит от X , но мы получим оценку, от X не зависящую. Положим $\tilde{F}(z) = 1$ при $z \in F$, $\tilde{F}(z) = -1$ при $z \notin F$. Очевидно, что $\mu(F) = 1/2$, $\int_{\mathbb{S}^1} \tilde{F}(z) dz = 0$, $\text{Var}(\tilde{F}) \leq 8$. В этих обозначениях $\sigma(s)$ можно интерпретировать как биркгофову сумму, определенную по функции $\tilde{F}$ и повороту $\tilde{T}$ окружности на угол β : $\sigma(s) = \tilde{F}^{s-1}(\beta_0 + 2\beta)$. В силу

соотношения $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$ (см. [9]) имеем $\beta = q_{n-1}/q_n$ при нечетном n и $\beta = 1 - q_{n-1}/q_n$ при четном n . Рассмотрим случай $\beta = q_{n-1}/q_n$; другой случай сводится к этому. Согласно [9] $q_{n-1}/q_n = [k_n, \dots, k_1]$. Значит, все неполные частные разложения β не превосходят K .

Неравенство (5) теперь следует из неравенства Данжуа

$$|\tilde{F}_T^{q'_i}(z_1) - \tilde{F}_T^{q'_i}(z_2)| \leq \text{Var}(\tilde{F}) \leq 8$$

и разложения Островского числа $s-1$ по знаменателям q'_i подходящих к q_{n-1}/q_n дробей.

Лемма 5, а вместе с ней и теорема 2, доказаны.

Подробное доказательство предполагается опубликовать в Трудах Математического института им. В. А. Стеклова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Кочергин, *Матем. заметки*, **19**:3 (1976), 453–468. [2] А. А. Блохин, *Тр. ММО*, **27** (1972), 113–128. [3] М. Lemańczyk, *Colloq. Math.*, **84/85** (2000), 29–41. [4] А. В. Кочергин, *Матем. сб.*, **96 (138)**:3 (1975), 471–502. [5] В. И. Арнольд, *Функцион. анализ и его прилож.*, **25**:2 (1991), 1–12. [6] Я. Г. Синай, К. М. Ханин, *Функцион. анализ и его прилож.*, **26**:3 (1992), 1–21. [7] А. В. Кочергин, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 83–112. [8] А. В. Кочергин, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 19–36. [9] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматгиз, М., 1961.

А. В. Кочергин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

21.07.2006