Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Кузьмин, О двухкомпонентных обобщениях уравнения Камассы–Холма, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 149–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:23:34

О двухкомпонентных обобщениях уравнения Камассы–Холма

П. А. Кузьмин

Известно, что уравнение Камассы–Холма может быть интерпретировано как бигамильтонова система на коприсоединенной орбите группы диффеоморфизмов окружности. Уравнение было впервые получено в [1]–[3], двухкомпонентные обобщения введены в [4]–[8], где также изучены некоторые свойства этих систем. Все эти системы оказываются бигамильтоновыми потоками на регулярной части $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ двойственного пространства к алгебре Ли $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$.

В данной работе рассматривается класс гамильтоновых потоков на пространстве $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ с квадратичными функциями Гамильтона специального вида. Целью является описание всех бигамильтоновых потоков относительно модифицированной структуры Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$. Получено семейство двухкомпонентных вполне интегрируемых систем, обобщающих уравнение Камассы–Холма.

Существует общий способ построения пары согласованных пуассоновых структур и получения интегрируемого потока. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – двойственное пространство к $\mathfrak{g}$ (регулярная часть двойственного пространства к $\mathfrak{g}$). Определяют каноническую структуру Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}^*$: для любых гладких $f, g: \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\{f, g\}(m) = m([df, dg]). \quad (1)$$

Каждый коцикл $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$ определяет другую пуассонову структуру на $\mathfrak{g}^*$, согласованную с канонической. Такая структура называется модифицированной структурой Ли–Пуассона.

Кратко напомним основные факты об уравнении Камассы–Холма. Каноническая структура Ли–Пуассона на регулярной части дуального пространства к $\text{Vect}(S^1)$ задается косимметричным оператором

$$j_0(m) = m_x + 2m\partial, \quad m \in \text{Vect}(S^1)_{\text{reg}}^*.$$

Регулярная часть $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ двойственного пространства определяется как множество всех линейных функционалов на $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1)$, имеющих вид

$$\bar{m}: f \mapsto \int_{S^1} f m \, dx, \quad m \in C^\infty(S^1);$$

кроме того, мы отождествляем функционал $\bar{m}$ с функцией m [9]. Для модифицированной структуры Ли–Пуассона, связанной с коциклом Вирасоро, имеем

$$j(m) = 2m_0\partial + (m_0)_x - c_1\partial^3,$$

где $m_0 \in \text{Vect}(S^1)^*$, $c_1 \in \mathbb{R}$ и $\partial = d/dx$. Рассмотрим гамильтоново векторное поле $x(m) = j_0(m)\delta h_0(m)$ на $\text{Vect}(S^1)_{\text{reg}}^*$ с функцией Гамильтона

$$h_0(m) = \frac{1}{2} \int_{S^1} m(1 - \partial^2)^{-1} m \, dx.$$

Здесь $\delta\phi(m)$ обозначает градиент гладкого функционала $\phi(m)$. Известно, что поле $x(m)$ является гамильтоновым относительно пуассоновой структуры $j_1(m) = \partial - \partial^3$ с функцией Гамильтона

$$h_1(m) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (u^3 + uu_x^2) \, dx, \quad u = (1 - \partial^2)^{-1} m,$$

т.е. $x(m) = j_0(m)\delta h_0(m) = j_1(m)\delta h_1(m)$. Соответствующее эволюционное уравнение $m_t + x(m) = 0$ называется уравнением Камассы–Холма:

$$m_t + m_x u + 2m u_x = 0, \quad u = (1 - \partial^2)^{-1} m.$$

Основной целью настоящей заметки является описание некоторого класса аналогичных бигамильтоновых систем на пространстве $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, где $\mathfrak{g} = \text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$, а $C^\infty(S^1)$ – пространство всех гладких тензорных плотностей на S^1 степени 0, иными словами, структура $\text{Vect}(S^1)$ -модуля на $C^\infty(S^1)$ определяется как

$$L_f: C^\infty(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1), \quad a(x) \mapsto f(x)a'(x),$$

где $f \in \text{Vect}(S^1)$. Каноническая структура Ли–Пуассона на $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ задается оператором

$$J_0 \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} m_x + 2m\partial & p\partial \\ p_x + p\partial & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*, \quad (2)$$

который определяет коприсоединенное действие полупрямого произведения $\text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)$ [10]. Известно, что $H^2(\text{Vect}(S^1) \ltimes C^\infty(S^1)) = \mathbb{R}^3$ [11], [12], поэтому модифицированная структура Ли–Пуассона определяется постоянным (т.е. не зависящим от точки $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$) оператором

$$J = \begin{pmatrix} (m_0)_x + 2m_0\partial - c_1\partial^3 & p_0\partial + c_2\partial^2 \\ (p_0)_x + p_0\partial - c_2\partial^2 & 2c_3\partial \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$ и c_1, c_2, c_3 – некоторые константы. Заметим, что структуры (2), (1) на самом деле определены на коприсоединенной орбите $(\text{Diff}_+(S^1) \ltimes C^\infty(S^1))/(S^1 \times S^1)$, содержащей постоянный момент $\begin{pmatrix} m_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$, $m_0(x) = \text{const}$, $p_0(x) = \text{const}$ [9].

Рассмотрим класс квадратичных функций Гамильтона на $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$:

$$H_0 \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}, M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в L^2 ,

$$\left\langle \begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S^1} (m_1(x)m_2(x) + p_1(x)p_2(x)) dx,$$

а симметричный оператор M выбирается в форме

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon(1 - \partial^2) + \sum_{i=2}^{n_0} a_i \partial^{2i} & \sum_{i=0}^{n_1} (-1)^i b_i \partial^i \\ \sum_{i=0}^{n_1} b_i \partial^i & \gamma \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $a_i, b_i, \gamma, \varepsilon$ – такие константы, что M строго положителен и обратим. Такая функция Гамильтона может рассматриваться как естественное обобщение $h_0(m)$. Сформулируем основное предложение данной заметки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m_0, p_0 (см. (3)) – постоянные функции. Единственными бигамильтоновыми относительно модифицированной структуры Ли–Пуассона векторными полями вида $X = J_0 \delta H_0$ (где J_0, H_0 даются формулами (2), (4)), являются гамильтоновы векторные поля, соответствующие следующему оператору “инерции”:

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon(1 - \partial^2) & \alpha - \beta\partial \\ \alpha + \beta\partial & \gamma \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ – константы.

Таким образом, получаем вторую пуассонову структуру

$$J_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon(\partial - \partial^3) & \alpha\partial - \beta\partial^2 \\ \alpha\partial + \beta\partial^2 & \gamma\partial \end{pmatrix} \quad (7)$$

и вторую функцию Гамильтона

$$H_1 \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (2\alpha u^2 v + 2\beta u u_x v + \gamma u v^2 + \varepsilon u^3 + \varepsilon u u_x^2) dx, \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix},$$

такую, что $X = J_0 \delta H_0 = J_1 \delta H_1$. Полученные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} m_t + m_x u + 2m u_x + p v_x = 0, \\ p_t + (p u)_x = 0, \end{cases}$$

где $m = \varepsilon u - \varepsilon u_{xx} + \alpha v - \beta v_x$, $p = \alpha u + \beta u_x + \gamma v$.

Доказательство теоремы основано на следующем простом наблюдении. Пусть X – гладкое векторное поле на $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$. Допустим, что X является гамильтоновым относительно постоянной (т.е. не зависящей от точки из $\mathfrak{g}_{\text{reg}}^*$) пуассоновой структуры J , т.е. существует гладкая функция $H: \mathfrak{g}_{\text{reg}}^* \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$X = J \delta H(m).$$

Оператор $d\delta H(m)$ симметричен, поскольку $H(m)$ – гладкая функция. Таким образом, оператор

$$S(m) = J(d\delta H(m))J = d(J\delta H(m))J = (dX)J$$

также симметричен. Этим получено необходимое условие гамильтоновости X относительно J .

Ограничим рассуждения такими модифицированными структурами Ли–Пуассона (3), что m_0, p_0 – постоянные функции. Итак, получено следующее необходимое условие гамильтоновости X относительно J :

$$(dX)J = \begin{pmatrix} u\partial & v_x \\ 0 & u\partial + u_x \end{pmatrix} J + \begin{pmatrix} m_x + 2m\partial & p\partial \\ p\partial + p_x & 0 \end{pmatrix} M^{-1}J \quad (8)$$

симметричен, где

$$J = \begin{pmatrix} 2m_0\partial - c_1\partial^3 & p_0\partial + c_2\partial^2 \\ p_0\partial - c_2\partial^2 & 2c_3\partial \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что операторное выражение

$$((dX)J) \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u\partial & v_x \\ 0 & u\partial + u_x \end{pmatrix} J + \begin{pmatrix} m_x + 2m\partial & p\partial \\ p\partial + p_x & 0 \end{pmatrix} M^{-1}J \quad (9)$$

линейно по $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$. Можно вычислить следующие трилинейные функционалы:

$$\left\langle \begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, ((dX)J) \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle ((dX)J) \left(\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (10)$$

сделав подстановку

$$\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikx} \\ e^{ilx} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_1x} \\ e^{il_1x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ik_2x} \\ e^{il_2x} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что выражения (10) равны нулю, если не выполнены равенства $l = k$, $l_1 = k_1$, $l_2 = k_2$, $k = -k_1 - k_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{pmatrix} e^{ik_1x} \\ e^{ik_1x} \end{pmatrix}, ((dX)J) \left(\begin{pmatrix} e^{-ik_1x-ik_2x} \\ e^{-ik_1x-ik_2x} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_2x} \\ e^{ik_2x} \end{pmatrix} \right\rangle, \\ & \left\langle ((dX)J) \left(\begin{pmatrix} e^{-ik_1x-ik_2x} \\ e^{-ik_1x-ik_2x} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e^{ik_1x} \\ e^{ik_1x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{ik_2x} \\ e^{ik_2x} \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

– полиномы относительно k_1 и k_2 . Прямое вычисление дает сформулированный результат: полиномы (11) совпадают и (8) выполнено, только если оператор (5) имеет вид (7). Вторая пуассонова структура при этом имеет вид (7).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи построенной бигамильтоновой системы. Подставляя $\alpha = \beta = 0$, $\varepsilon = -\gamma = 1$, получаем систему, изученную в [5], [8]:

$$\begin{cases} m_t + m_x u + 2m u_x - p p_x = 0, \\ p_t + (p u)_x = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $m = u - u_{xx}$. Если же мы положим $\varepsilon = \gamma = 0$, $\alpha = \beta = 1$, то восстановим систему, введенную в [4], [6]:

$$\begin{cases} (v - v_x)_t + (2uv - v_x u)_x = 0, \\ (u + u_x)_t + (u^2 + u u_x)_x = 0, \end{cases} \quad (13)$$

которая эквивалентна системе, рассмотренной в [4] при $x \mapsto -x$, $u \mapsto v$, $v \mapsto u$. Такие же бигамильтоновы структуры для (12), (13) получены в [4]–[6], [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Camassa, D. Holm, *Phys. Rev. Lett.*, **71**:11 (1993), 1661–1664. [2] R. Camassa, D. Holm, J. M. Hyman, *Adv. Appl. Mech.*, **31** (1994), 1–33. [3] B. Fuchssteiner, A. S. Fokas, *Phys. D*, **4**:1 (1981), 47–66. [4] G. Falqui, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **39** (2006), 327–342. [5] Ming Chen, Si-Qi Liu, Youjin Zhang, *Lett. Math. Phys.*, **75**:1 (2006), 1–15. [6] S.-Q. Liu, Y. Zhang, *J. Geom. Phys.*, **54**:4 (2005), 427–453. [7] P. J. Olver, P. Rozenau, *Phys. Rev. E*, **53**:2 (1996), 1900–1906. [8] H. Aratyn, J. F. Gomes, A. H. Zimerman, *J. Phys. A, Math. Gen.*, **39**:5 (2006), 1099–1114. [9] A. A. Kirillov, *The Geometry of Moments. Twistor Geometry and Nonlinear Systems* (Primorsko, 1980), Lecture Notes in Math., **970**, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 101–123. [10] P. Marcel, V. Ovsienko, C. Roger, *Lett. Math. Phys.*, **40**:1 (1997), 31–39. [11] В. Ю. Овсиенко, К. Роже, *Функц. анализ и прилож.*, **30**:4 (1996), 86–88. [12] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, *Comm. Math. Phys.*, **117**:1 (1988), 1–36.

П. А. Кузьмин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: kuzminp@list.ru

Поступило

12.04.2006