Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Мазепа, О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:40:53

О существовании целых решений одного полулинейного эллиптического уравнения на некомпактных римановых многообразиях

Е. А. Мазепа

Проблемы существования целых положительных решений полулинейных эллиптических уравнений для неограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ рассматривались в работах ряда авторов [1]–[5]. Вопросы существования решений подобных уравнений в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ достаточно полно изучены в монографиях Е. М. Ландиса [6], О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой [7], Д. Гилбарга, М. Трудингера [8].

Однако вопросы существования целых решений полулинейных эллиптических уравнений на некомпактных и особенно полных римановых многообразиях оставались открытыми.

Пусть M – произвольное гладкое связное некомпактное риманово многообразие без края, $B \subset M$ – произвольное связное компактное подмножество, граница ∂B – гладкое подмногообразие в M и $M \setminus B$ связно. Обозначим $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ – исчерпание многообразия M , т.е. последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ и пусть $B \subset B_k$ для всех k .

Говорят, что на многообразии M выполнено *лиувиллево свойство* для уравнения

$$\Delta u - u = 0, \tag{1}$$

если любое ограниченное решение этого уравнения тождественно равно нулю.

Аналогично, будем говорить, что на многообразии M выполнено *лиувиллево свойство* для уравнения

$$\Delta u = u\varphi(|u|), \tag{2}$$

где $\varphi(\xi) > 0$ – монотонно неубывающая, непрерывно дифференцируемая функция при $0 \leq \xi < \infty$, если любое ограниченное решение этого уравнения тождественно равно нулю.

Известно (см. [9], [10]), что стохастическая неполнота некомпактного риманового многообразия (риманово многообразие *стохастически полное*, если стохастический процесс на нем имеет бесконечное время жизни) эквивалентна существованию на нем нетривиального ограниченного решения уравнения (1). Причем из существования нетривиального ограниченного решения для уравнения (1) следует существование аналогичного решения для уравнения $\Delta u - \mu u = 0$, где $\mu > 0$ – произвольная константа.

В данной работе изучаются вопросы взаимосвязи выполнения лиувиллевых свойств для уравнений (1) и (2) на некомпактных римановых многообразиях, и как следствие, вопросы существования на рассматриваемых многообразиях нетривиальных целых ограниченных решений для полулинейного эллиптического уравнения (2).

ЛЕММА 1. *Если на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (2), то на M существует и положительное ограниченное решение этого уравнения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_0 \not\equiv 0$ – ограниченное решение уравнения (2) на M . Покажем, что на M существует положительное ограниченное решение этого уравнения.

Обозначим $a^+ = \max\{0, a\}$. Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_k = u_k \varphi(|u_k|) = 0 & \text{в } B_k, \\ u_k|_{\partial B_k} = u_0^+|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Можем считать, что $u_0^+ \not\equiv 0$. Тогда, учитывая принцип максимума, для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup_M u_0^+$.

Так как

$$\Delta u_k = u_k \varphi(|u_k|), \quad \Delta u_0 = u_0 \varphi(|u_0|), \quad u_k|_{\partial B_k} \geq u_0|_{\partial B_k},$$

то, применяя принцип сравнения для решений полулинейных эллиптических уравнений (см., например, [11]), получаем $u_k \geq u_0$ в B_k и, следовательно, $u_k \geq u_0^+$ в B_k для всех k .

Кроме того, из равномерной ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ на любом компактном подмножестве многообразия M следует существование предельной функции $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, которая является ограниченным положительным решением уравнения (2) на M (см., [11]). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичное утверждение для решений уравнения (1) было получено в [12].

ТЕОРЕМА 1. На M выполнена ливиллева теорема для уравнения (2) тогда и только тогда, когда на M выполнена ливиллева теорема для уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi(\xi)$ – монотонно неубывающая и положительная при $\xi \geq 0$ функция, существует константа $A > 0$ такая, что $A\varphi(0) \geq 1$ и, следовательно, $A\varphi(\xi) \geq 1$ для всех $\xi \geq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $A \geq 1$.

Докажем достаточность. Пусть существует функция $u_0 \not\equiv 0$ – ограниченное решение уравнения (2) на M . Можем считать, что u_0 – положительное ограниченное решение уравнения (2). Покажем, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения

$$\Delta u = Au\varphi(|u|). \quad (3)$$

Рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_k = Au_k\varphi(|u_k|) & \text{в } B_k, \\ u_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Так как $0 \leq u_k \leq \sup_M u_0$, существует функция $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, причем $0 \leq u \leq \sup_M u_0$. Кроме того, $\Delta u_0 = u_0\varphi(|u_0|) \leq Au_0\varphi(|u_0|)$; тогда с учетом принципа сравнения в B_k выполнено $0 \leq u_k \leq u_0$ и, следовательно, $0 \leq u \leq u_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции $w_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k :

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0, \\ w_k|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \bar{v}_k = -u_0\varphi(|u_0|), \\ \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \bar{u}_k = -Au_k\varphi(|u_k|), \\ \bar{u}_k|_{\partial B_k} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\Delta w_k = \Delta(u_k + \bar{u}_k) = 0$ и $w_k|_{\partial B_k} = (u_k + \bar{u}_k)|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$, $\Delta w_k = \Delta(u_0 + \bar{v}_k) = 0$ и $w_k|_{\partial B_k} = (u_0 + \bar{v}_k)|_{\partial B_k} = u_0|_{\partial B_k}$. Тогда по теореме единственности для гармонических функций в каждой области B_k выполнено $w_k - \bar{u}_k = u_k$, $w_k - \bar{v}_k = u_0$; кроме того, $u_0 \leq w_k \leq \sup_M u_0$, $\bar{u}_k \geq 0$, $\bar{v}_k \geq 0$. Покажем, что $\bar{u}_k \leq A\bar{v}_k$.

Действительно,

$$\Delta(A\bar{v}_k) = -Au_0\varphi(|u_0|) \leq -Au_k\varphi(|u_k|) = \Delta\bar{u}_k;$$

тогда из принципа сравнения получаем $A\bar{v}_k \geq \bar{u}_k$.

Далее, выберем точку x_0 , в которой $u_0(x_0) > \sup_M u_0 - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} w_k(x_0) &> \sup_M u_0 - \varepsilon, \\ \bar{v}_k(x_0) &= w_k(x_0) - u_0(x_0) \leq \sup_M u_0 - u_0(x_0) < \varepsilon, \\ \bar{u}_k(x_0) &< A\varepsilon, \quad u_k(x_0) = w_k(x_0) - \bar{u}_k(x_0) > \sup_M u_0 - (A+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем $u(x_0) \geq \sup_M u_0 - (A + 1)\varepsilon > 0$. Таким образом, функция u является положительным ограниченным решением уравнения (3).

Покажем теперь, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения (1).

Рассмотрим последовательность функций $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, являющихся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_k - u_k = 0 & \text{в } B_k, \\ u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Тогда, учитывая принцип максимума, для всех k имеем $0 \leq u_k \leq \sup_M u$.

Так как

$$\Delta u_k = u_k \leq Au_k \varphi(|u_k|), \quad \Delta u = Au \varphi(|u|), \quad u_k|_{\partial B_k} = u|_{\partial B_k},$$

применяя принцип сравнения для решений полулинейных эллиптических уравнений (см., например, [11]), получаем $u_k \geq u > 0$ в B_k .

Из равномерной ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ на любом компактном подмножестве многообразия M следует существование предельной функции для этой последовательности, которая является ограниченным положительным решением уравнения (1) на M , что противоречит условию.

Необходимость. Пусть теперь на M существует нетривиальное ограниченное решение уравнения (1). Тогда на M существуют положительное ограниченное решение этого уравнения v_0 (см., например, [12]).

Положим $C = \sup_M v_0 > 0$. Покажем сначала, что на M существует положительное ограниченное решение уравнения (3).

Как и выше рассмотрим решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \Delta u_k = Au_k \varphi(|u_k|) & \text{в } B_k, \\ u_k|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k}. \end{cases}$$

Так как $0 \leq u_k \leq \sup_M v_0$, существует функция $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, причем $0 \leq u \leq C$. Кроме того, $\Delta v_0 = v_0 \leq Av_0 \varphi(|v_0|)$; тогда с учетом принципа сравнения в B_k выполнено $0 \leq u_k \leq v_0$ для любого k и, следовательно, $0 \leq u \leq v_0$. Покажем, что $u \not\equiv 0$.

Рассмотрим функции $w_k, \bar{u}_k, \bar{v}_k$, которые являются решениями соответствующих краевых задач в области B_k :

$$\begin{cases} \Delta w_k = 0, \\ w_k|_{\partial B_k} = v_0|_{\partial B_k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \bar{v}_k = -v_0, \\ \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \bar{u}_k = -Au_k \varphi(|u_k|), \\ \bar{u}_k|_{\partial B_k} = 0. \end{cases}$$

Тогда, как и при доказательстве достаточного условия, по теореме единственности имеем $u_k = w_k - \bar{u}_k$, $v_0 = w_k - \bar{v}_k$, причем $\Delta v_0 = v_0 > 0$ и, следовательно, $v_0 \leq w_k \leq C$, $\bar{u}_k \geq 0$, $\bar{v}_k \geq 0$.

Найдем

$$\Delta(\bar{u}_k) = -Au_k \varphi(|u_k|) \geq -Av_0 \varphi(|v_0|) \geq -Av_0 \varphi(C) = \Delta(A\varphi(C)\bar{v}_k).$$

Кроме того, $\bar{u}_k|_{\partial B_k} = \bar{v}_k|_{\partial B_k} = 0$; тогда из принципа сравнения получаем $\bar{u}_k \leq A\varphi(C)\bar{v}_k$.

Далее, выберем точку x_0 , в которой $v_0(x_0) > \sup_M v_0 - \varepsilon = C - \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} w_k(x_0) &\geq v_0(x_0) > \sup_M v_0 - \varepsilon, \\ \bar{v}_k(x_0) &= w_k(x_0) - v_0(x_0) \leq C - v_0(x_0) < \varepsilon, \\ \bar{u}_k(x_0) &\leq A\varphi(C)\bar{v}_k(x_0) < A\varphi(C)\varepsilon, \\ u_k(x_0) &= w_k(x_0) - \bar{u}_k(x_0) > C - \varepsilon - A\varphi(C)\varepsilon = C - \varepsilon(1 + A\varphi(C)). \end{aligned}$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ получаем $u(x_0) \geq C - \varepsilon(1 + A\varphi(C))$, что больше нуля при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Функция u является положительным ограниченным решением уравнения (3).

Так как $A \geq 1$, для любого $\xi \geq 0$ выполнено $\varphi(\xi) \leq A\varphi(\xi)$. Известно (см., [11]), что из существования положительного ограниченного решения для уравнения (3) следует существование аналогичного решения для уравнения (2), что противоречит условию. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *На многообразии M существуют нетривиальные ограниченные решения уравнения (2) тогда и только тогда, когда M не является стохастически полным.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если многообразия M_1 и M_2 изометричны вне некоторого компакта, то левильево свойство для уравнения (2) на M_1 и M_2 выполнено или нет одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы. Достаточно заметить (см. [12]), что если многообразия M_1 и M_2 изометричны вне некоторого компакта, то они стохастически полны или нет одновременно.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если многообразия M_1 и M_2 изометричны вне некоторого компакта, то целые положительные ограниченные решения уравнения (2) на M_1 и M_2 существуют или нет одновременно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем путем непосредственного применения следствия 2 и следующего замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть G_1, G_2 – некоторые предкомпактные области многообразия M такие, что $B \subset G_1$ и $\overline{G_1} \subset G_2$. Обозначим $M_i(v) = \sup_{\partial G_i} v$, $m_i(v) = \inf_{\partial G_i} v$. На M существует целое положительное ограниченное решение $u(x)$ уравнения (2) тогда и только тогда, когда на $M \setminus B$ существует целое положительное ограниченное решение $v(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям $M_1(v) < M_2(v)$, $m_i(v) > 0$, $i = 1, 2$.

Данное утверждение является частным случаем аналогичного утверждения, справедливого для произвольных ненулевых (не обязательно положительных) ограниченных решений уравнения (2) (см. [11]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Ландис, *Нелинейные граничные задачи*, 1991, №3, 49–53. [2] J.-L. Vazquez, L. Veron, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, **312**:11 (1991), 811–815. [3] M. Garcia-Huidobro, R. Manasevich, P. Ubilla, *Electronic J. Differential Equations*, **1**:10 (1995), 1–22. [4] Y. Naito, H. Usami, *Math. Z.*, **225**:1 (1997), 167–175. [5] L. Ambrosio, X. Cabre, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:4 (2000), 725–739. [6] Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов*, Наука, М., 1971. [7] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973. [8] Д. Гилбарг, М. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989. [9] A. Grigor'yan, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**:2 (1999), 135–249. [10] E. B. Davies, *Bull. London Math. Soc.*, **17**:5 (1985), 417–436. [11] Е. А. Мазепа, *Изв. вузов. Матем.*, **3** (2005), 59–66. [12] А. А. Григорьян, Н. С. Надирашвили, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, №5, 25–33.

Е. А. Мазепа

Волгоградский государственный университет

E-mail: imazepa@rambler.ru

Поступило

12.12.2005