Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Общее понятие топологических пространств отрицательной размерности и квантование их плотностей, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 1, 157–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:45:58

Общее понятие топологических пространств отрицательной размерности и квантование их плотностей

В. П. Маслов

В данной статье, которая является в некотором смысле дополнением и продолжением статьи [1], мы введем общее понятие топологических пространств отрицательной размерности (в отличие от отрицательной размерности асимптотических пространств в [1]).

Общее определение пространств отрицательной размерности. Пусть имеется компакт M_{t_0} хаусдорфовой размерности t_0 , являющийся элементом t -параметрической шкалы вложенных друг в друга компактов $0 < t < \infty$. Эти шкалы будем называть *эквивалентными* относительно M_{t_0} , если у них совпадают компакты при $t \geq t_0$. Будем говорить, что компакт M_{t_0} является *дыркой* в этом эквивалентном множестве шкал, а $-t_0$ есть *отрицательная размерность* этого класса эквивалентности.

Примеры. Червяк проедает в стволе дерева сложную извилистую дорожку-дырку. Она настолько меньше ствола, что мы можем считать, что толщина ствола бесконечно велика по сравнению с дыркой.

Размерность проволоки той же толщины и точно такой же “извилистости” мы можем определить независимо от окружающей среды, а дырку, проделанную червячком, нельзя рассматривать вне ствола, хотя обе размерности совпадают по абсолютной величине.

В теории кристалла Френкеля дырка – это отсутствующий электрон, и она ведет себя как частица,двигающаяся вдоль кристалла, но в отличие от электрона не может существовать вне кристалла – в пустоте дырки нет. Точно так же дырка в нашем понимании не может существовать вне достаточно большой шкалы, в которой она “проделана”.

Реально фрактальная размерность дырки, трещины в горной породе и т.п. зависит от масштаба, в котором “наш глаз” различает точки. Так, береговая линия будет иметь фрактальный характер, когда мы ее наблюдаем с самолета. Если же мы находимся непосредственно на берегу, то эта линия будет гладкой и ее размерность будет равна размерности гладкой линии, т.е. единице.

Если мы рассматриваем трещины в металле, то размерность зависит от разрешающей способности прибора, через который мы наблюдаем трещину [2]–[4]. Обозначим линейную разрешающую способность прибора через κ . Обычное определение размерности Хаусдорфа основывается на стремлении к нулю некоторых шаров, на практике, как правило, трехмерных. Это означает, что объем Ω рассматриваемого металла должен быть много больше, чем κ^3 . Таким образом, приведя задачу к единичному объему, мы получим, что радиус хаусдорфова шара (т.е. шара, который используется в определении размерности Хаусдорфа; см. [5]) $\delta = \kappa^3/\Omega$ стремится к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$.

Далее возникает вопрос, как в конкретных задачах на щели понимать шкалу компактов, размерность которых t увеличивается при $t \rightarrow \infty$. Размер–объем металла или горной породы не является размерностью: они трехмерные. Где возникает достаточно большая величина размерности?

Рассмотрим для сравнения газ в трехмерном сосуде. Каждая молекула газа движется. Число молекул $\approx 10^{23}$. И если рассматривается движение каждой молекулы, то, как правило, считают размерность равной 10^{69} .

С другой стороны, можно рассматривать все молекулы как точки трехмерного пространства. И если еще учесть их перемещение за время t , то мы можем их рассматривать

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00824.

в четырехмерном пространстве. Именно эта двойственность позволила нам (с моим соавтором П. П. Мосоловым) перейти от уравнений Ньютона каждой молекулы к уравнениям полевидной гидродинамики всего газа [6], [7].

Если мы зафиксировали два момента времени расположения молекул газа в 10^{69} -мерном пространстве, т.е. рассматриваем расположение всех 10^{23} молекул как одну точку в первый момент времени и как другую точку во второй момент времени, то можем определить естественное расстояние между этими точками, т.е. метрику.

Между этой метрикой и метрикой в трехмерном пространстве можно построить шкалу метрик, объединяя различные группы частиц.

Металлы, как и горные породы, с точки зрения механики (теории упругости) и тех масштабов, которые характерны для этой науки, состоят из “зерен” достаточно малого (но не атомного) размера–объема. Эти зерна могут быть разной величины, и мы можем их множество считать точкой в пространстве достаточно большой размерности [8], [9]. Именно такая трактовка позволяет нам перейти к общему определению фрактальной щели как дырки и увязать абстрактное математическое определение с реальными механическими объектами.

Распространение дырка-волна особенно наглядно видно при рассмотрении волн упругости в средах, в которых модуль Юнга на сжатие достаточно велик, а на растяжение равен нулю. В частности, таким свойством обладает песок. Волны-дырки подробно изучены автором совместно с П. П. Мосоловым в случае одной пространственной координаты [10; приложение].

Приведем теперь *экономический пример*.

Допустим человек получил огромное наследство в различных формах и растрчивает его бездумно “направо и налево”. Если объем наследства вычислить сложно, то объем трат, возрастающих со временем t как t^k (аппетит трат может возрастать, как и аппетит наживы!), то k – это отрицательная размерность, или k – это размерность образующейся “дырки”.

Рассмотрим теперь простейшие примеры мер (Хаара) в общем случае для n -мерных пространств. Пусть S_n есть n -мерный шар радиуса r . В сферических координатах его объем

$$\mu(S_n) = \text{const} \int_0^1 r^{n-1} dr = \text{const} r^n;$$

здесь r^{n-1} – плотность.

Умножение на координату двойственно в смысле преобразования Фурье дифференцируемости. Поэтому мы можем говорить о двойственных n раз дифференцируемых функциях соболевского пространства W_2^n . “Сопряженным” к такому пространству является пространство W_2^{-n} обобщенных функций по Соболеву.

Точно так же мы можем определить через “скалярное произведение” функции W_2^s , где s – нецелое положительное, и W_2^{-s} как “скалярно” сопряженное к нему.

Аналогично можно поступить с плотностью или весом r^s и r^{-s} , используя, например, для представления функций из W_2^s ядро Рисса или бесселев потенциал.

Недавно Ю. И. Манин в более общей форме и даже для комплексных s применил эти соображения для плотности пространств с отрицательной размерностью [11].

Приведем пример пространств нецелой положительной размерности с мерой Хаара r^σ , где $0 \leq \sigma \leq 1$.

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ существует шкала $0 \leq \sigma \leq 1$ канторовой пыли с мерой Хаара, равной x^σ отрезка $(0, x)$, подобного всему данному множеству канторовой пыли. Прямое произведение этой шкалы на евклидов куб размерности $k - 1$ даст всю шкалу $k + \sigma$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in (0, 1)$. Именно относительно этой шкалы мы рассматриваем пространство отрицательной размерности $-D = -k - \sigma$. “Квантование” плотностей, рассмотренных в [11], приводит к плотности C_i^{D+l} .

Как мы видели в [1], для понятия дискретной плотности отрицательной “дискретной” размерности надо рассмотреть определение типа распределения Бозе–Эйнштейна.

Как это рассматривалось в [1], относительно значений случайной величины $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ устанавливается упорядоченность по их величине. Среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ могут быть и равные. В последнем случае их объединяют, складывая при этом отвечающие им “вероятности”, т.е. отношение числа “попаданий” на λ_i к общему числу испытаний. Число равных λ_i : $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+k}$ будем называть *кратностью* q_i значения λ_i . В нашем рассмотрении к бесконечности стремится как число испытаний N , так и s .

Пусть N_i – число “выпаждений” значения λ_i : $\lambda_i < \lambda_{i+1}$; тогда

$$\sum_{i=1}^s \frac{N_i}{N} \lambda_i = M, \quad (1)$$

где M – математическое ожидание.

Кумулятивная вероятность P_k есть сумма первых k вероятностей в последовательности λ_i :

$$P_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i,$$

где $k < s$. Обозначим $NP_k = B_k$.

Если все варианты, для которых

$$\sum_{i=1}^s N_i = N \quad (2)$$

и

$$\sum_{i=1}^s N_i \lambda_i \leq E, \quad E = MN \leq N\bar{\lambda}, \quad (3)$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^s q_i \lambda_i}{Q}, \quad Q = \sum_{i=1}^s q_i,$$

$C > 0$ – константа, равноценны (равновероятны), то [12]–[14] большинство вариантов будет скапливаться около следующей зависимости “кумулятивной вероятности”

$$B_l \{N_i\}_{i=1}^l = \sum_{i=1}^l N_i, \quad \sum_{i=1}^l N_i = \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1}, \quad (4)$$

где β' и ν' определяются из условий

$$B_s = N, \quad \sum_{i=1}^s \frac{q_i \lambda_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1} = E, \quad (5)$$

если $N \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы определить кратности q_i в формуле (4), мы подобно тому, как поступали в [1], рассмотрим D -мерный квантовый осциллятор с частотой ω . Его спектр, как известно [15], имеет вид

$$\lambda_i = \left(i + \frac{1}{2}\right) h\omega,$$

где h – постоянная Планка. Кратности [1] равны

$$C_i^{D+i} = \frac{(G+i)!}{i! D!}. \quad (6)$$

Если переходить к единичному масштабу в формуле (4), т.е. положить $i/s = x$, то $0 \leq x \leq 1$ и сумма при $s \rightarrow \infty$ будет стремиться к интегралу Римана.

Тем самым, плотности (6) являются квантованием плотностей в интегральных формулах Ю.И. Манина [11]. В целых точках $i = 1, \dots, D$ у (6) есть полюсы, имеющие смысл конденсата. Так, для распределения кратеров на Луне по их радиусу имеется четыре полюса (конденсат из четырех значений), что означает, что размерность, отвечающая их распределению, равна -4 .

Кратности q_i являются аналогом плотностей в интегральной формуле и, следовательно, связаны с размерностью. В пределе при переходе от сумм к интегралам в формуле (4) мы получим, как это было показано в [1], плотности r^{n-1} , о которых говорилось выше. В этом смысле важно понять, как возникают эти плотности из рядов, т.е. из дискретного аналога. Этим самым мы как бы квантуем эти интегральные плотности Ю.И. Манина [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.П. Маслов, *Матем. заметки*, **80:6** (2006), 856–863. [2] V.E. Saouma, C.C. Barton, *J. Engrg. Mech.*, **120:4** (1994), 835–854. [3] Р.В. Гольдштейн, А.Б. Мосолов, *ПММ*, **56:4** (1992), 563–571. [4] Р.В. Гольдштейн, А.Б. Мосолов, *Докл. РАН*, **329:4** (1993), 429–431. [5] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [6] В.П. Маслов, П.П. Мосолов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42:5** (1978), 1063–1100. [7] В.П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Институт компьютерных исследований, М., 2001. [8] R. H. Dauskardt, F. Haubensak, R. O. Ritchie, *Acta Metallurgica et Materialia*, **38:2** (1990), 143–159. [9] V. E. Saouma, C. C. Barton, N. A. Gamabeldin, *Engrg. Fracture Mech.*, **35:1–3** (1990), 47–53. [10] V. P. Maslov, P. P. Mosolov, *Nonlinear Wave Equations Perturbed by Viscous Terms*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2000. [11] Yu. I. Manin, “The notion of dimension in geometry and algebra”, *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, **43:2**, 139–161; [arXiv:math.AG/0502016v1](https://arxiv.org/abs/math.AG/0502016v1). [12] В.П. Маслов, *Матем. заметки*, **78:3** (2005), 377–395. [13] В.П. Маслов, *Матем. заметки*, **78:6** (2005), 870–877. [14] В.П. Маслов, *Матем. заметки*, **80:2** (2006), 220–230. [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, *Квантовая механика*, Наука, М., 1976.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило
06.12.2006