Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Иванков, О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 390–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:12:50

УДК 511.361

О СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ, УЧИТЫВАЮЩИХ СПЕЦИФИКУ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЯ

П. Л. Иванков

В статье строятся совместные приближения обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, удовлетворяющих однородным дифференциальным уравнениям. Указанное построение применяется для изучения арифметической природы значений таких функций.

Библиография: 7 названий.

Пусть $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел; $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $\psi(x)$ – многочлены, коэффициенты при старших степенях которых равны единице. Степени этих многочленов суть соответственно v_k , u_k и u , причем

$$\psi(x) = (x + \lambda_1) \cdots (x + \lambda_u),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_u$ – алгебраические числа степеней $\varkappa_1, \dots, \varkappa_u$;

$$\tau = 1 - \frac{1}{u} \sum_{i=1}^u \frac{1}{\varkappa_i}.$$

Пусть, далее, $\psi_k(0) = 0$, $\varphi_k(x)\psi_k(x)\psi(x) \neq 0$ при $k = 1, \dots, t$, $x = 1, 2, \dots$;

$$\Phi_k(z) = \Phi_{k1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \omega_k^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)\psi(x)},$$

$$\Phi_{kj_k}(z) = z \frac{d}{dz} \Phi_{k, j_k-1}(z), \quad j_k = 2, \dots, m_k, \quad m_k = u + u_k, \quad k = 1, \dots, t,$$

$$m = m_1 + \dots + m_t.$$

ТЕОРЕМА. Пусть функции $\Phi_{kj_k}(z)$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$; $\psi(x) \in \mathbb{I}[x]$, $\omega_k \in \mathbb{I}$; корни многочленов $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ рациональны; $m \geq 2$, $v_k \leq u_k$, $v_k < m_k$, $u_k - v_k = d$ не зависит от k , $k = 1, \dots, t$. Тогда для любого нетривиального набора h_{kj_k} целых чисел из поля $\mathbb{I}$ и для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом H ,

$$H = \max(|h_{kj_k}|, k = 1, \dots, t, j_k = 1, \dots, m_k),$$

выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^t \sum_{j_k=1}^{m_k} h_{kj_k} \Phi_{kj_k}(1) \right| > H^{-((m-1)(u+d)+u\tau)/(u+d-u\tau)-\varepsilon}.$$

В работе [1] эта теорема другим методом доказана при $t = 1$; из теоремы 1 работы [2] при $h_0 = 0$ следует аналогичная, но менее точная оценка. Для доказательства сформулированной теоремы применяется конструкция совместных приближений, учитывающая специфику однородного случая (имеется в виду то обстоятельство, что фигурирующие в теореме функции удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям).

Рассмотрим степенной ряд с неопределенными коэффициентами

$$P(z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s z^s \quad (1)$$

и с его помощью определим бесконечные ряды

$$P_{kj_k}^*(z) = P(z) \Phi_{kj_k}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_{kj_k s} z^s \quad (2)$$

и многочлены $P_{kj_k}(z)$ степени n , коэффициенты которых совпадают с соответствующими коэффициентами степенных рядов $P_{kj_k}^*(z)$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$. Из определения многочленов $P_{kj_k}(z)$ следует, что при любых коэффициентах p_s порядок нуля при $z = 0$ степенных рядов

$$P_{lj_l}(z) \Phi_{kj_k}(z) - P_{kj_k}(z) \Phi_{lj_l}(z) \quad (3)$$

не меньше $n + 1$. С помощью принципа Дирихле подберем коэффициенты p_s так, чтобы указанный порядок нуля был не меньше

$$N = \left\lfloor \frac{m - \delta}{m - 1} n \right\rfloor,$$

где δ – число из интервала $(0; 1)$, а m определено перед формулировкой теоремы. Обозначим через $a_{kj_k \nu}$ коэффициент при z^ν в разложении по степеням z функции $\Phi_{kj_k}(z)$. Тогда коэффициент при z^ν , $\nu \geq n + 1$, степенного ряда (3) запишется в виде

$$\sum_{s=0}^n (p_{lj_l s} a_{kj_k, \nu-s} - p_{kj_k s} a_{lj_l, \nu-s}).$$

Если в этом выражении верхнюю границу суммирования заменить на ν , то в силу определения степенных рядов (2) и соответствующих многочленов получится сумма, равная нулю. Поэтому для того, чтобы степенной ряд (3) имел при $z = 0$ требуемый порядок нуля, достаточно (и необходимо), чтобы при $n + 1 \leq \nu \leq N - 1$ выполнялось равенство

$$\sum_{s=n+1}^{\nu} (p_{lj_l s} a_{kj_k, \nu-s} - p_{kj_k s} a_{lj_l, \nu-s}) = 0. \quad (4)$$

Во всех нижеследующих леммах условия теоремы предполагаются выполненными; через γ_1 и γ_2 обозначаются постоянные, не зависящие от n .

ЛЕММА 1. При любом δ , $0 < \delta < 1$, и при любом достаточно большом натуральном n найдется нетривиальный набор целых чисел q_μ из поля $\mathbb{I}$, $\mu = 0, 1, \dots, M$, $M = [(m + (1/2 - m)\delta)n/(m - 1)]$, такой, что

$$\sum_{\mu=0}^M \frac{q_\mu}{(\mu!)^d \omega_k^\mu} \prod_{x=1}^{N-\mu-1} \frac{1}{\psi_k(x)} \prod_{x=1}^{N-\mu-1} \varphi_k(n+2-N+x) \frac{\mu(\mu-1) \cdots (\mu-s_k+1)}{s_k!} = 0 \quad (5)$$

при $k = 1, \dots, t$, $s_k = 0, 1, \dots, (N-n)t_k - 1$. При этом модули чисел q_μ ограничены сверху величиной $e^{\gamma_1 n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на том обстоятельстве, что корни многочленов $\psi_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ рациональны. Равенства (5) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно q_μ . Если умножить обе части каждого из этих уравнений на $(N!)^d$, то наименьший общий знаменатель получающейся при этом системы уравнений (как и модули этих коэффициентов) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$ (см. по этому поводу [3, с. 186, лемма 2]). Количество уравнений в этой системе не превосходит

$$\frac{m - m\delta}{m - 1} n;$$

количество неизвестных указано в формулировке леммы. Далее применяем леммы 11–13 из [3, с. 109–111]. Заметим, что в равенстве (5) при всех достаточно больших n выполняется неравенство $N - \mu - 1 \geq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если

$$p_\mu = \frac{q_\mu}{(\mu!)^d} \prod_{x=1}^{N-\mu-1} \psi(x), \quad \mu = 0, 1, \dots, M, \quad (6)$$

$p_\mu = 0$ при $\mu > M$, то степенные ряды (3) при всех допустимых значениях индексов имеют при $z = 0$ порядок нуля не меньше N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для справедливости леммы, как отмечалось выше, достаточно, чтобы выполнялось равенство (4). Последнее обстоятельство будет иметь место, если при $s = n + 1, \dots, N - 1$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$ выполняется равенство

$$p_{kj_k s} = 0. \quad (7)$$

С помощью (2) после несложных преобразований получаем, что коэффициент $p_{kj_k s}$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \omega_k^s & \prod_{x=1}^{N-n-2} \frac{1}{\varphi_k(n-N+2+x)} \sum_{\mu=0}^M \frac{q_\mu}{(\mu!)^d \omega_k^\mu} \\ & \times \prod_{x=1}^{N-1-\mu} \frac{1}{\psi_k(x)} \prod_{x=1}^{N-1-\mu} \varphi_k(n+2-N+x) Q_{kj_k}(\mu), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$Q_{kj_k}(\mu) = (s - \mu)^{j_k - 1} \prod_{x=s+1}^{N-1} \psi_k(x - \mu) \psi(x - \mu) \prod_{x=n+2}^s \varphi_k(x - \mu).$$

Заметим, что верхний индекс суммирования в (8) можно считать равным M в силу того, что $Q_{kj_k}(\mu) = 0$ при $\mu > s$; это следует из условия $\psi_k(0) = 0$. Из этого же условия и из линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций, фигурирующих в теореме, следует, что нули в знаменателях выражения (8) отсутствуют (см. по этому поводу [4], [5]). Многочлен $Q_{kj_k}(\mu)$ имеет степень, не превосходящую $(N - n)t_k - 1$. Поэтому его можно представить в виде суммы многочленов

$$\frac{\mu(\mu - 1) \cdots (\mu - s_k + 1)}{s_k!}, \quad s_k = 0, 1, \dots, (N - n)t_k - 1,$$

от μ с некоторыми коэффициентами. После этого равенство (7) становится следствием леммы 1. Таким образом, равенство (7) справедливо, и лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Если n достаточно велико, то все многочлены $P_{kj_k}(z)$, определенные после (2), при указанном в лемме 2 выборе чисел p_μ отличны от тождественного нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предположить, что многочлен $P_{kj_k}(z)$ тождественно равен нулю, то соответствующая функция (2) при p_μ , определенных, как в лемме 2, будет иметь в силу равенства (7) при $z = 0$ порядок нуля не меньше N . С другой стороны, этот порядок нуля ограничен сверху степенью многочлена $P(z)$, т.е. числом M . Из условия $m \geq 2$ и определения чисел M и N вытекает, однако, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство $M < N$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Для получения многочленов $P_{kj_k}(z)$ используются числа p_μ при $\mu = 0, 1, \dots, n$; все эти числа имеют общий множитель

$$\prod_{x=1}^{N-n-1} \psi(x).$$

Разделив все p_μ на указанный общий множитель и умножив на $(n!)^d$, положим

$$P(z) = \sum_{\mu=0}^n z^\mu q_\mu \left(\frac{n!}{\mu!} \right)^d \prod_{x=N-n}^{N-\mu-1} \psi(x).$$

Из доказанного вытекает, что при таком выборе коэффициентов многочлена $P(z)$ функция (3) будет иметь при $z = 0$ порядок нуля не меньше N . Коэффициент при z^s многочлена $P_{kj_k}(z)$ запишется при этом в виде

$$\sum_{\mu=0}^s q_\mu \left(\frac{n!}{\mu!} \right)^d \omega_k^{s-\mu} (s - \mu)^{j_k-1} \prod_{x=1}^{s-\mu} \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)} \prod_{x=s+1}^{N-1} \psi(x - \mu) \prod_{x=1}^{N-n-1} \frac{1}{\psi(x)}. \quad (9)$$

Общий наименьший знаменатель всех этих коэффициентов оценивается сверху величиной

$$n^{u(\tau+\varepsilon)n/(m-1)}, \quad (10)$$

где τ определено перед формулировкой теоремы, а ε – произвольное положительное число; оценка выполняется при всех достаточно больших n . Для оценки общего наименьшего знаменателя множителей

$$\prod_{x=s+1}^{N-1} \psi(x-\mu) \prod_{x=1}^{N-n-1} \frac{1}{\psi(x)}$$

привлекается теория делимости в полях алгебраических чисел (см. работу [6, лемма 6], а также работу [2, лемма 3]). Общий наименьший знаменатель остальных множителей оценивается с помощью уже упоминавшейся леммы 2 из книги [3, с. 186]. Используя (9), нетрудно получить и оценку сверху для модулей многочленов $P_{kj_k}(z)$; при любом $\varepsilon > 0$ и при всех достаточно больших n эта оценка имеет вид

$$n^{(u+d+\varepsilon)n}.$$

Записав подробно выражение (4) при $\nu \geq N$, оценим сверху модули функций (3). Соответствующее рассуждение стандартно и потому здесь не приводится; оценка имеет вид

$$n^{-(u+d-\varepsilon)n/(m-1)}.$$

Для выполнения этой оценки число $\delta = \delta(\varepsilon)$ в лемме 1 следует взять достаточно малым (обе полученные оценки справедливы при фиксированном z). Занумеруем функции $\Phi_{kj_k}(z)$ и соответствующие им многочлены $P_{kj_k}(z)$, $k = 1, \dots, t$, $j_k = 1, \dots, m_k$, в произвольном порядке и обозначим их через $f_1(z), \dots, f_m(z)$, $P_{11}(z), \dots, P_{1m}(z)$. Функции $f_j(z)$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяют системе уравнений

$$Y' = AY,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,m},$$

$a_{ij} = a_{ij}(z)$ – рациональные функции. Для доказательства последнего утверждения применяется лемма 1 из книги [3, с. 185]. Через $T = T(z)$ обозначим общий наименьший знаменатель рациональных функций $a_{ij}(z)$. Обозначим

$$R_1(z) = (r_{1ij})_{i,j=1,\dots,m},$$

где

$$r_{1ij} = r_{1ij}(z) = P_{1j}(z)f_i(z) - P_{1i}(z)f_j(z).$$

Тогда, очевидно,

$$R_1 = FP_1 - (FP_1)^*,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix}, \quad P = (P_{11}(z), \dots, P_{1m}(z)),$$

а символ “ $*$ ” означает операцию транспонирования матрицы. Определим матрицы

$$R_k = (r_{kij})_{i,j=1,\dots,m}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

с помощью равенства

$$R_k = T(R'_{k-1} - AR_{k-1} + (AR_{k-1})^*).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} R_k &= FP_k - (FP_k)^*, \\ P_k &= (P_{k1}, \dots, P_{km}) = T(P'_{k-1} - P_{k-1}A^*), \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

ЛЕММА 4. При всех достаточно больших n определитель

$$\Delta(z) = |P_{ij}(z)|_{i,j=1,\dots,m}$$

отличен от тождественного нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО принципиально не отличается от доказательства соответствующего утверждения из работы [7]. Из равенства (11) следует, что если $y_1, \dots, y_m$ — произвольное решение системы

$$Y' = -A^*Y,$$

то линейные формы

$$Z_k = \sum_{j=1}^m P_{kj}y_j, \quad k = 1, 2, \dots,$$

связаны равенством $Z_k = TZ'_{k-1}$. Отсюда следует, что если определитель $\Delta(z)$ тождественно равен нулю, то найдется число l , $0 < l < m$, такое, что матрица

$$(P_{ij})_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,m} \quad (12)$$

имеет ранг l ; неравенство $l > 0$ вытекает из леммы 3. Далее, если S_1 — матрица, образованная столбцами матрицы (12), входящими в базисный минор, а S_2 — матрица, образованная остальными столбцами, то матрица $S_1^{-1}S_2$ состоит из рациональных функций, степени которых ограничены сверху некоторым числом, не зависящим от n . Доказательство этих утверждений см. в [3, гл. 3, § 4, § 5]. Пусть для определенности матрица S_1 образована первыми l столбцами матрицы (12), и пусть

$$G_1 = \begin{pmatrix} f_2 & f_3 & \dots & f_l & f_{l+1} \\ -f_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -f_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а G_2 — матрица размера $(m-l) \times l$, в правом верхнем углу которой находится элемент $-f_1$, а все прочие элементы равны нулю. Непосредственно проверяется равенство

$$G_1 + S_1^{-1}S_2G_2 = S_1^{-1}G_3, \quad (13)$$

где $G_z = (r_{ki1})_{k=1,\dots,l, i=2,\dots,l+1}$. Из равенства (13) следует равенство соответствующих определителей, которое оказывается противоречивым: порядок нуля при $z = 0$ определителя из правой части при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, а порядок нуля определителя из левой части (который не равен тождественно нулю) ограничен сверху некоторым числом, не зависящим от n . При доказательстве последнего утверждения используется лемма 4 из книги [3, с. 93]. Полученное противоречие доказывает лемму.

Дальнейшая часть доказательства теоремы стандартна. Переходя от функциональных приближений к числовым (подробности см. в работе [7]), получаем следующую лемму, которую приводим без доказательства.

ЛЕММА 5. *Для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, и для всех достаточно больших n найдется совокупность чисел*

$$q_{i1}, \dots, q_{im}, \quad i = 1, \dots, m,$$

лежащих в поле $\mathbb{I}$ и обладающих следующими свойствами:

- 1) $\det(q_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \neq 0$;
- 2) $|q_{ij}| \leq n^{(u+d+\varepsilon)n}$;
- 3) $|q_{ij}f_k(1) - q_{ik}f_j(1)| \leq n^{-(u+d+\varepsilon)n/(m-1)}$;
- 4) *модуль наименьшего общего знаменателя чисел q_{ij} оценивается сверху величиной (10).*

Утверждения пунктов 1)–4) справедливы при $i, j = 1, \dots, m$.

Из леммы 5 нетрудно вывести утверждение теоремы. Пусть $h_1, \dots, h_m$ – произвольный нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$. Столбцы определителя из пункта 1) леммы 5 линейно независимы, поэтому при некотором i , $1 \leq i \leq m$, имеем неравенство (получаемое с учетом пункта 4))

$$\left| \sum_{j=1}^m h_j q_{ij} \right| \geq n^{-u(\tau+\varepsilon)n/(m-1)}. \quad (14)$$

Из теории систем дифференциальных уравнений (или из работы [2, теорема 1]) следует, что среди чисел $f_1(1), \dots, f_m(1)$ есть отличное от нуля; пусть для определенности $f_1(1) \neq 0$. Левая часть неравенства (14) может быть записана в виде

$$\frac{1}{|f_1(1)|} \left| q_{i1} \sum_{j=1}^m h_j f_j(1) - \sum_{j=2}^m h_j (q_{i1} f_j(1) - q_{ij} f_1(1)) \right|.$$

Отсюда и из пунктов 2) и 3) леммы 5 получаем такое неравенство

$$n^{(u+d+\varepsilon)n} \left| \sum_{j=1}^m h_j f_j(1) \right| + H n^{-(u+d-\varepsilon)n/(m-1)} \geq n^{-u(\tau+\varepsilon)n/(m-1)},$$

где $H = \max(|h_1|, \dots, |h_m|)$. Из утверждения неравенства стандартным способом получаем утверждение теоремы (см., например, доказательство теоремы 1 из книги [3, с. 354]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иванов П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 191–206.
- [2] Иванов П. Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 5. С. 53–62.
- [3] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [4] Galochkin A. I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence Theory. Cambridge–New Rochell–Melbourne–Sydney: Cambridge Univ. Press, 1988. P. 207–215.
- [5] Галочкин А. И. Эффективные оценки некоторых линейных форм // Всесоюзная конференция “Теория чисел и ее приложения”. Тезисы докл. Тбилиси, 1985. С. 39–40.
- [6] Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сиб. матем. ж. 1976. Т. 17. № 6. С. 1220–1235.
- [7] Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G -functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана
E-mail: zahobina@glasnet.ru

Поступило
24.10.2000