Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, Ф. Груневальд, Й. Меннике, А. Л. Таламбунца, Автоморфизмы свободных групп и группы классов отображений двумерных поверхностей, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 163–173

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:21:13

Аutomорфизмы свободных групп и группы классов отображений двумерных поверхностей

С. И. Адян, Ф. Груневальд, Й. Меннике, А. Л. Таламбуца

Пусть N есть стабилизатор слова $w = s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} \dots s_g t_g s_g^{-1} t_g^{-1}$ в группе автоморфизмов $\text{Aut}(F_{2g})$ свободной группы с порождающими $\{s_i, t_i\}_{i=1, \dots, g}$. Фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma_g)$ двумерной компактной ориентируемой замкнутой поверхности рода g в порождающих $\{s_i, t_i\}$ задается определяющим соотношением $w = 1$. В работе найдены элементы $S_i, T_i \in N$, которые в $\text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$ задают сопряжение с помощью порождающих s_i, t_i . Они вместе с элементом $\alpha \in N$, реализующим сопряжение с помощью w , порождают ядро естественного эпиморфизма группы N на группу классов отображений $M_{g,0} = \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g)) / \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$. Найдена система определяющих соотношений этого ядра в порождающих $S_1, \dots, S_g, T_1, \dots, T_g, \alpha$. Кроме того, в N найдена изоморфная группе кос B_g на g нитях подгруппа, которая в результате абелизации свободной группы F_{2g} отображается на подгруппу группы Вайля $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, состоящую из матриц, которые содержат только 0 и 1.

Библиография: 9 названий.

Группа классов отображений двумерной компактной ориентированной поверхности данного рода есть группа ее гомеоморфизмов на себя по модулю гомотопий. Она рассматривалась многими авторами. Систему порождающих для нее впервые нашел Дэн [1]; эти порождающие теперь называются *скручиваниями Дэна* (Dehn twists). Позже их уточняли Ликориш [2] и Хамфри [3]. Важный шаг на пути описания системы определяющих соотношений был сделан в работе Хэтчера и Тёрстона [4]. Используя идеи этих авторов, Вайнрыб в работе [5] дал описание системы определяющих соотношений групп классов отображений.

Группу классов отображений, сохраняющих ориентацию двумерной поверхности рода g с n выколотыми точками, будем обозначать через $M_{g,n}$. В настоящей работе мы будем рассматривать группы $M_{g,0}, M_{g,1}$ в терминах автоморфизмов фундаментальной группы рассматриваемой поверхности при $g \geq 2$.

Пусть нам дана ориентированная двумерная компактная поверхность Σ_g рода $g \geq 2$ и на ней указаны следующие ориентированные простые замкнутые кривые (см. рис. 1):

$$u_i, y_i, \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad x_j, \quad j = 2, 3, \dots, g.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, фонда DFG и программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-5351.2006.1)

Рис. 1. Базовые кривые для порождающих скручиваний Дэна

Для каждой из этих кривых определен связанный с ней гомеоморфизм поверхности, называемый *скручиванием* или *твистом Дэна*. Твист Дэна, соответствующий простой ориентированной кривой, определяется следующим образом. Вырезаем из поверхности небольшой цилиндр вдоль этой кривой так, что кривая является средней линией этого цилиндра. Нижней окружностью цилиндра назовем ту окружность, что находится слева от ориентированной средней линии. Скручиваем верхнюю окружность на 360° в направлении ориентации средней линии, оставляя неподвижной нижнюю окружность. Затем вставляем полученный цилиндр обратно в поверхность. В результате получим гомеоморфное отображение исходной поверхности на себя, называемое скручиванием Дэна, связанным с заданной ориентированной кривой. Скручивания Дэна, связанные с кривыми u_i , x_i , y_i на рис. 1, мы будем также обозначать через u_i , x_i , y_i . При рассмотрении группы $M_{g,1}$ выколотую точку P_1 выберем в верхнем левом углу, как указано на рис. 1.

Следующая лемма хорошо известна.

ЛЕММА 1 (Дэн, 1938; Ликориш, 1964, 1966). *Скручивания Дэна*

$$u_i, y_i, x_j, \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad j = 2, 3, \dots, g, \quad (1)$$

порождают группу классов отображений $M_{g,n}$ при $n = 0, 1$.

Фундаментальная группа $\pi_1(\Sigma_g)$ порождается элементами s_i , t_i , $i = 1, 2, \dots, g$, кривые для которых указаны на рис. 2. При этом базовая точка B располагается в верхнем левом углу поверхности.

Обозначим

$$k_i = s_i t_i s_i^{-1} t_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad w = k_1 k_2 \dots k_g. \quad (2)$$

Каждому гомеоморфизму поверхности Σ_g естественным образом сопоставляется автоморфизм фундаментальной группы, имеющей задание

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle s_i, t_i \mid w = 1 \rangle \quad (3)$$

(более подробно об этом см. [6]).

Укажем, как действуют скручивания Дэна (2) на порождающие фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_g)$. При этом мы будем для краткости записывать порождающие

Рис. 2. Порождающие фундаментальной группы

s_i^{-1} и t_i^{-1} через s'_i и t'_i и не будем указывать преобразования тех порождающих s_j , t_j , которые переводятся в себя. Аналогичное сокращение x' вместо x^{-1} мы будем использовать и для обозначения обратных автоморфизмов. Имеем

$$\begin{aligned} u_i &= \{s_i \dashrightarrow s_i t'_i, \\ y_i &= \{t_i \dashrightarrow t_i s_i, \\ x_j &= \begin{cases} s_{j-1} \dashrightarrow s_{j-1} t'_{j-1} s_j t_j s'_j, \\ t_{j-1} \dashrightarrow s_j t'_j s'_j t_{j-1} s_j t_j s'_j, \\ s_j \dashrightarrow s_j t'_j s'_j t_{j-1} s_j, \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, g. \end{aligned} \quad (4)$$

Укажем, как действуют обратные отображения x'_j :

$$x'_j = \begin{cases} s_{j-1} \dashrightarrow s_{j-1} s_j t'_j s'_j t_{j-1}, \\ t_{j-1} \dashrightarrow t'_{j-1} s_j t_j s'_j t_{j-1} s_j t'_j s'_j t_{j-1}, \\ s_j \dashrightarrow t'_{j-1} s_j t_j, \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, g. \quad (5)$$

Действие обратных отображений u'_j и y'_j очевидно.

Отображения (4) можно рассматривать как автоморфизмы свободной группы F_{2g} с порождающими

$$s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_g, t_g.$$

Через N обозначим стабилизатор слова w в группе автоморфизмов $\text{Aut}(F_{2g})$. В данной работе мы используем следующий порядок композиции автоморфизмов:

$$(\tau_1 \tau_2)(s_i, t_i) = \tau_1(\tau_2(s_i, t_i)).$$

Легко проверить, что все автоморфизмы (4), рассматриваемые на свободной группе F_{2g} , оставляют неподвижным слово w , т.е. имеем

$$u_i, y_i, x_j \in N = \text{Stab}(w), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad j = 2, 3, \dots, g. \quad (6)$$

Пусть $\text{Aut}^+(F_{2g})$ есть группа всех автоморфизмов, которые отображают слово w в сопряженное ему слово. Известно, что группа классов отображений $M_{g,1}$ изоморфна

факторгруппе группы $\text{Aut}^+(F_{2g})$ по подгруппе внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(F_{2g})$ (см. [7; с. 184]):

$$M_{g,1} = \text{Aut}^+(F_{2g}) / \text{Inn}(F_{2g}).$$

Согласно теореме Дэна–Нильсена (см. [6; теорема 5.15.3]) и замечанию к теореме N10 (см. [7; с. 186]) группу $M_{g,0}$ можно алгебраически определить как

$$M_{g,0} = \text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g)) / \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g)), \quad (7)$$

где через $\text{Aut}^+(\pi_1)$ обозначен образ группы $\text{Aut}^+(F_{2g})$ при естественном отображении ее в группу $\text{Aut}(\pi_1)$.

Через α обозначим внутренний автоморфизм группы F_{2g} , переводящий любой элемент x в $w^{-1}xw$, т.е.

$$\alpha: x \mapsto w^{-1}xw. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. *Группа $M_{g,1}$ изоморфна факторгруппе $N/\langle\alpha\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $N \subset \text{Aut}^+(F_{2g})$ и $N \cap \text{Inn}(F_{2g})$ есть нормальная подгруппа группы N , то имеем естественное вложение факторгруппы $N/(N \cap \text{Inn}(F_{2g}))$ в факторгруппу $\text{Aut}^+(F_{2g})/\text{Inn}(F_{2g})$. Это вложение есть изоморфизм, так как любой элемент $\gamma \in \text{Aut}^+(F_{2g})$ эквивалентен по модулю $\text{Inn}(F_{2g})$ некоторому элементу $\gamma_1 \in N$. Нам остается доказать равенство $N \cap \text{Inn}(F_{2g}) = \langle\alpha\rangle$.

Если $\beta \in N \cap \text{Inn}(F_{2g})$, то при некотором T для любого $x \in F_{2g}$ имеем $\beta(x) = TxT^{-1}$. Тогда из $\beta \in N$ следует $TwT^{-1} = w$ в свободной группе, т.е. слова T и w коммутируют. Тогда они являются степенями одного и того же слова. Так как слово w не равно в свободной группе никакой степени другого слова, то слово T равно в свободной группе некоторой степени слова w , т.е. автоморфизм β является некоторой степенью внутреннего автоморфизма α . Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Группа N порождается автоморфизмами (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 1 и 2 достаточно доказать, что автоморфизм α можно представить в N как произведение автоморфизмов (4). Это вытекает из соотношения

$$\alpha = (u_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_g y_g u_g^2 y_g x_g \dots y_2 x_2 y_1 u_1)^2, \quad (9)$$

которое доказывается непосредственным вычислением правой части с использованием автоморфизмов (4).

Легко проверить, что следующие ниже автоморфизмы свободной группы S_i и T_i также принадлежат стабилизатору N , т.е. они оставляют неподвижным элемент w :

$$S_1 = \begin{cases} s_1 \mapsto s_1, \\ t_1 \mapsto w' s_1 t_1 s_1', \\ s_j \mapsto w' s_1 s_j s_1' w, \\ t_j \mapsto w' s_1 t_j s_1' w, \end{cases} \quad 2 \leq j \leq g,$$

$$T_1 = \begin{cases} s_1 \mapsto w t_1 s_1 t_1', \\ t_1 \mapsto t_1, \\ s_j \mapsto t_1 w s_j w' t_1', \\ t_j \mapsto t_1 w t_j w' t_1', \end{cases} \quad 2 \leq j \leq g,$$

$$S_i = \begin{cases} s_l \mapsto s_i w' s_l w s'_i, \\ t_l \mapsto s_i w' t_l w s'_i, \\ s_i \mapsto s_i, \\ t_i \mapsto w' s_i t_i s'_i, \\ s_j \mapsto w' s_i s_j s'_i w, \\ t_j \mapsto w' s_i t_j s'_i w, \end{cases} \quad 1 \leq l < i, \quad i < j \leq g,$$

$$T_i = \begin{cases} s_l \mapsto w t_i s_l t'_i w', \\ t_l \mapsto w t_i t_l t'_i w', \\ s_i \mapsto w t_i s_i t'_i, \\ t_i \mapsto t_i, \\ s_j \mapsto t_i w s_j w' t'_i, \\ t_j \mapsto t_i w t_j w' t'_i, \end{cases} \quad 1 \leq l < i, \quad 2 \leq i < j \leq g,$$

Для удобства читателя выпишем автоморфизмы, обратные к перечисленным выше:

$$S'_1 = \begin{cases} s_1 \mapsto s_1, \\ t_1 \mapsto s'_1 w t_1 s_1, \\ s_j \mapsto s'_1 w s_j w' s_1, \\ t_j \mapsto s_1 w t_j w' s_1, \end{cases} \quad 2 \leq j \leq g,$$

$$T'_1 = \begin{cases} s_1 \mapsto t'_1 w' s_1 t_1, \\ t_1 \mapsto t_1, \\ s_j \mapsto w' t'_1 s_j t_1 w, \\ t_j \mapsto w' t'_1 t_j t_1 w, \end{cases} \quad 2 \leq j \leq g,$$

$$S'_i = \begin{cases} s_l \mapsto w s'_i s_l s_i w', \\ t_l \mapsto w s'_i t_l s_i w', \\ s_i \mapsto s_i, \\ t_i \mapsto s'_i w t_i s_i, \\ s_j \mapsto s'_i w s_j w' s_i, \\ t_j \mapsto s'_i w t_j w' s_i, \end{cases} \quad 1 \leq l < i, \quad i < j \leq g,$$

$$T'_i = \begin{cases} s_l \mapsto t'_i w' s_l w t_i, \\ t_l \mapsto t'_i w' t_l w t_i, \\ s_i \mapsto t'_i w' s_i t_i, \\ t_i \mapsto t_i, \\ s_j \mapsto w' t'_i s_j t_i w, \\ t_j \mapsto w' t'_i t_j t_i w, \end{cases} \quad 1 \leq l < i, \quad 2 \leq i < j \leq g.$$

Обозначим

$$c = u_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_g y_g u_g^2 y_g x_g \dots y_2 x_2 y_1 u_1. \quad (10)$$

Последовательным вычислением соответствующих автоморфизмов легко доказывается, что автоморфизмы S_i и T_i выражаются через порождающие (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 y_1 u_1 c u_1' c' u_1' u_1' y_1' u_1', \\ S_i &= x_i y_i y_{i-1} x_i S_{i-1} x'_i y'_{i-1} y'_i x'_i, \quad 2 \leq i \leq g, \\ T_j &= u_j y_j u_j S'_j u'_j y'_j u'_j, \quad 1 \leq j \leq g. \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, автоморфизмы S_i и T_i на группе $\pi_1(\Sigma_g)$ действуют как сопряжения с помощью порождающих s_i и t_i соответственно. Это означает, что они порождают всю группу $\text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$, т.е. верна

ЛЕММА 4. *Для любого элемента $\gamma \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$ можно указать такой свободный автоморфизм $f(S_1, T_1, \dots, S_g, T_g) \in N$, который на группе $\pi_1(\Sigma_g)$ действует как γ .*

В работе [8] Цишанг впервые указал принадлежащие стабилизатору N автоморфизмы, образы которых в $\text{Aut}(\pi_1(\sigma_g))$ реализуют сопряжение исходными порождающими $\pi_1(\sigma_g)$. Эти автоморфизмы слегка отличаются от используемых нами автоморфизмов S_i и T_i , которые были получены нами до того, как мы ознакомились с работой Цишанга [8]. В той же работе Цишанг впервые указал следующее ниже утверждение, которое является уточнением теоремы N10 из монографии [7; с. 185]. Мы приведем эту лемму с ее элементарным доказательством на основе теоремы N10.

ЛЕММА 5. *Любой элемент $\beta \in \text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))$ можно представить с помощью некоторого свободного автоморфизма, сохраняющего элемент w .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя указанную теорему N10, по данному элементу $\beta \in \text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))$ найдем представляющий его свободный автоморфизм γ , который переводит слово w в некоторое слово вида TwT^{-1} . Пусть δ есть свободный внутренний автоморфизм, сопрягающий любой элемент x группы F_{2g} с помощью слова T^{-1} , т.е. для любого $x \in F_{2g}$ имеем $\delta(x) = T^{-1}xT$. Очевидно, $\delta\gamma \in N$. В силу леммы 2 найдем такой свободный автоморфизм $\delta_1 \in N$, который на группе $\pi_1(\Sigma_g)$ действует как внутренний автоморфизм, реализующий сопряжение с помощью слова T . Очевидно, автоморфизм $\delta_1(\delta\gamma) \in N$ в группе $\text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))$ реализует исходный элемент β .

Лемма 5 означает, что естественное отображение $\varphi_1: N \rightarrow \text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))$ есть эпиморфизм.

ЛЕММА 6 (Цишанг, 1982). *Ядро естественного эпиморфизма φ_1 группы N на группу $\text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))$ порождается элементом α .*

Ниже мы опишем в терминах порождающих и определяющих соотношений ядро естественного эпиморфизма φ группы N на группу классов отображений замкнутой поверхности рода $g \geq 3$.

ЛЕММА 7. *В группе N выполнены соотношения*

$$S_i\alpha = \alpha S_i, \quad T_i\alpha = \alpha T_i, \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (12)$$

$$S_1T_1S_1'T_1' \dots S_gT_gS_g'T_g' = \alpha^{2-2g}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (12) очевидны. Для доказательства соотношения (13) используем следующие обозначения для некоторых автоморфизмов свободной группы (ср. с (2)):

$$\begin{aligned} K_i &= S_iT_iS_i'T_i', \\ W_i &= K_1K_2 \dots K_i, \quad 1 \leq i \leq g, \\ W &= W_g. \end{aligned} \quad (14)$$

Нам достаточно для всех порождающих x группы F_{2g} доказать соотношение

$$W_g(x) = w^{2g-2} x w^{2-2g}. \quad (15)$$

Непосредственным вычислением соответствующих автоморфизмов легко проверяются соотношения

$$\begin{aligned} K_i(s_i) &= w' k_i s_i k'_i w, & K_i(t_i) &= w' k_i t_i k'_i w, \\ K_i(s_l) &= w' k_i w' s_l w k'_i w, & K_i(t_l) &= w' k_i w' t_l w k'_i w, \quad 1 \leq l < i, \\ K_i(s_j) &= w^{-2} k_i s_j k'_i w^2, & K_i(t_j) &= w^{-2} k_i t_j k'_i w^2, \quad i < j \leq g. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что все коммутаторы K_i переводят слово w в себя, из соотношений (16) легко получаем соотношения

$$\begin{aligned} K_i(k_i) &= w' k_i k_i k'_i w = w' k_i w, \\ K_i(k_l) &= w' k_i w' k_l w k'_i w, & 1 \leq l < i, \\ K_i(k_j) &= w^{-2} k_i k_j k'_i w^2, & i < j \leq g. \end{aligned} \quad (17)$$

Докажем искомое соотношение (15) для порождающих $x = s_j$. Для порождающих t_j вычисления будут аналогичны. Имеем

$$\begin{aligned} W_g(s_g) &= W_{g-1}(K_g(s_g)) = W_{g-1}(w' k_g s_g k'_g w) \\ &= W_{g-2}(w' w^{-2} k_{g-1} (k_g s_g k'_g) k'_{g-1} w^2 w) = \dots \\ &= w^{-2g+1} k_1 k_2 \dots k_{g-1} k_g s_g k'_g k'_{g-1} \dots k'_2 k'_1 w^{2g-1} = w^{-2g+2} s_g w^{2g-2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} W_g(s_{g-1}) &= W_{g-1}(w' k_g w' s_{g-1} w k'_g w) = W_{g-2}(K_{g-1}(w' k_g w' s_{g-1} w k'_g w)) \\ &= W_{g-2}(w' (w^{-2} k_{g-1} k_g k'_{g-1} w^2) w' (w' k_{g-1} s_{g-1} k'_{g-1} w) w (w^{-2} k_{g-1} k'_g k'_{g-1} w^2) w) \\ &= W_{g-2}(w^{-3} k_{g-1} k_g s_{g-1} k'_g k'_{g-1} w^3) = \dots = w^{-2g+2} s_{g-1} w^{2-2g}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что в (19), как и в (18), в преобразованиях K_j при $j = g-2, g-3, \dots, 1$ происходит последовательное сопряжение всех множителей преобразуемого слова с помощью слова $w^{-2} k_j$.

В общем случае для данного i сначала индукцией по j убедимся, что для любых $2 \leq i \leq g-1$ и $j \leq i$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} W_g(s_{g-i}) &= W_{g-1}(w' k_g w' s_{g-i} w k'_g w) = W_{g-2}(w^{-3} k_{g-1} k_g w' s_{g-i} w k'_g k'_{g-1} w^3) \\ &= W_{g-2}(w' (w^{-2} k_{g-1} k_g k'_{g-1} w^2) w' (w' k_{g-1} w' s_{g-i} w k'_{g-1} w) w (w^{-2} k_{g-1} k'_g k'_{g-1} w^2) w) \\ &= W_{g-2}(w^{-3} k_{g-1} k_g w' s_{g-i} w k'_g k'_{g-1} w^3) = \dots \\ &= W_{g-j}(w^{-2j+1} k_{g-j+1} \dots k_{g-1} k_g w' s_{g-i} w k'_g k'_{g-1} \dots k'_{g-j+1} w^{2i-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

В частности, при $j = i$ будем иметь

$$\begin{aligned} W_g(s_{g-i}) &= \dots = W_{g-i}(w^{-2j+1} k_{g-j+1} \dots k_{g-1} k_g w' s_{g-i} w k'_g k'_{g-1} \dots k'_{g-j+1} w^{2i-1}) \\ &= W_{g-i-1}(w^{-2i+1} (w^{-2} k_{g-i} k_{g-i+1} \dots k_{g-1} k_g k'_{g-i} w^2) \\ &\quad w' (w' k_{g-i} s_{g-i} k'_{g-i} w) w (w^{-2} k_{g-i} k'_g k'_{g-1} \dots k'_{g-i+1} k'_{g-i} w^2 w^{2i-1})) \\ &= W_{g-i-1}(w^{-2i-1} k_{g-i} k_{g-i+1} \dots k_{g-1} k_g s_{g-i} k'_g k'_{g-1} \dots k'_{g-i+1} k'_{g-i} w^2 w^{2i-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

При $j = g - i - 1, \dots, 1$, как и в (19), каждый следующий автоморфизм K_j будет давать сопряжение с помощью слова $w^{-2}k_j$. В результате получим равенства

$$\begin{aligned} W_g(s_{g-i}) &= W_{g-1}(w'k_g s_{g-i} k'_g w) = \dots \\ &= W_{g-i-1}(w^{-2i-1} k_{g-i} k_{g-i+1} \dots k_{g-1} k_g s_{g-i} k'_g k'_{g-1} \dots k'_{g-i+1} k'_{g-i} w^2 w^{2i-1}) = \dots \\ &= (w^{-2g+1} k_1 k_2 \dots k_{g-1} k_g s_{g-i} k'_g k'_{g-1} \dots k'_2 k'_1 w^{2g-1} = w^{-2g+2} s_{g-i} w^{2g-2}). \end{aligned} \quad (22)$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. *Подгруппа группы N*

$$G = \langle S_1, T_1, \dots, S_g, T_g, \alpha \rangle \quad (23)$$

является нормальной в N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 нам достаточно доказать, что сопряжение порождающих подгруппы G с помощью свободных автоморфизмов (4) переводит их в элементы из G . Этот факт легко проверяется непосредственным вычислением соответствующих автоморфизмов. В частности, при сопряжении автоморфизмами (4) элемент α переходит в себя. То же самое верно во многих других случаях. Ниже мы выпишем соответствующие результаты для всех тех случаев, когда элемент S_i или T_i при сопряжении с помощью той или иной порождающей (4) изменяется. Непосредственным вычислением значений автоморфизмов левой и правой частей указанных ниже равенств устанавливается, что значения этих автоморфизмов совпадают при всех значениях параметров s_i и t_i . Результаты этих вычислений показывают, что в группе N выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_i S_i u'_i &= S_i T'_i, & 1 \leq i \leq g, \\ y_i T_i y'_i &= T_i S_i, \\ x_i S_{i-1} x'_i &= \alpha S_{i-1} T'_{i-1} S_i T_i S'_i, \\ x_i T_{i-1} x'_i &= S_i T'_i S'_i T_{i-1} S_i T_i S'_i, \\ x_i S_i x'_i &= \alpha' S_i T'_i S'_i T_{i-1} S_i, & 2 \leq i \leq g. \end{aligned} \quad (24)$$

Тем самым, завершается доказательство леммы 8.

Из лемм 6 и 8 вытекает

ЛЕММА 9. *Элементы $\alpha, S_i, T_i, i = 1, 2, \dots, g$, порождают ядро $\ker \varphi$, т.е.*

$$\ker \varphi = \langle S_1, T_1, \dots, S_g, T_g, \alpha \rangle_N = G. \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 1. *Ядро эпиморфизма φ группы N на группу $\text{Aut}^+(\pi_1(\Sigma_g))/\text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$ имеет следующее задание с помощью порождающих и определяющих соотношений:*

$$G = \langle S_1, T_1, \dots, S_g, T_g, \alpha \mid (12), (13) \rangle. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7 соотношения (12) и (13) выполнены в N , а значит, и в ядре $\ker \varphi$. Докажем, что они дают полную систему определяющих соотношений ядра $\ker \varphi$. Допустим, что в группе N выполнено некоторое соотношение

$$Z(S_1, T_1, \dots, S_g, T_g, \alpha) = 1. \quad (27)$$

Используя коммутации (12), перепишем соотношение (27) в виде

$$Z = \alpha^r Y(S_1, T_1, \dots, S_g, T_g) = 1. \quad (28)$$

Нам нужно доказать, что соотношение (28) выводится из (12) и (13).

Из (28) и $\varphi_1(\alpha) = 1$ мы получим $\varphi_1(Y) = 1$. Напомним, что S_i и T_i являются внутренними автоморфизмами π_1 , которые сопрягают с помощью s_i и t_i соответственно. Отсюда следует, что $\varphi_1(Y)$ действует в $\pi_1(\Sigma_g)$ как сопряжение словом y , получаемым из Y заменой заглавных букв S_i и T_i малыми буквами s_i и t_i . Так как Y есть тривиальный автоморфизм группы $\pi_1(\Sigma_g)$, то мы получаем, что $y = 1$ в группе $\pi_1(\Sigma_1)$.

Рассмотрим группу G_1 , задаваемую порождающими S_i и T_i и одним определяющим соотношением $W = 1$. Заметим, что группа G_1 есть изоморфная копия группы $\pi_1(\Sigma_g)$, в задании которой все порождающие заменены заглавными буквами. Очевидно, в G_1 выполнено равенство $Y = 1$. Согласно теории малых сокращений в результате применения в группе G_1 алгоритма Дэна к слову Y получим последовательность преобразований слов вида

$$Y \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow \dots \rightarrow 1. \quad (29)$$

Напомним, что применение алгоритма Дэна к несократимому циклическому слову Y в группе с определяющим соотношением $W = 1$ заключается в последовательной замене в Y кусков циклических сдвигов слова $w^{\pm 1}$ длины больше его половины на их дополнения в степени -1 с последующим сокращением. Очевидно, аналог этого алгоритма можно применять и в группе с определяющим соотношением (13) с той лишь разницей, что в данном случае вместо дополнения до $W^{\pm 1}$ нужно брать это дополнение, умноженное на $\alpha^{\pm(2-2g)}$. При этом в результате мы получим вместо 1 некоторую степень элемента α , скажем α^{r_1} . Это означает, что только из определяющих соотношений (13) и (12) выводится равенство

$$Y = \alpha^{r_1}, \quad (30)$$

которое, очевидно, верно и в группе N . Тогда в силу (28) в N выполнено равенство $Z = \alpha^{(r+r_1)} = 1$. Так как в N элемент α имеет бесконечный порядок, то отсюда получаем $r + r_1 = 0$. Это означает, что при выводе равенства (30), используя только соотношения (13) и (12), мы фактически доказали искомое равенство (28). Теорема 1 доказана.

Заметим, что группа (26) изоморфна фундаментальной группе трехмерного многообразия Зейферта без особых слоев (см. [9; с. 200–201, формула (1) при $r = 0$, формула (5) при $b = 2 - 2g$)).

Рассмотрим следующие элементы стабилизатора N :

$$r_j = \begin{cases} s_j \mapsto s_{j+1}, \\ t_j \mapsto t_{j+1}, \\ s_{j+1} \mapsto k'_{j+1} s_j k_{j+1}, \\ t_{j+1} \mapsto k'_{j+1} t_j k_{j+1}, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq g-1. \quad (31)$$

Очевидно, при $|i - j| > 1$ элементы r_i и r_j коммутируют. Легко проверить, что при $j = 1, 2, \dots, g - 2$ в N выполнены также соотношения

$$r_j r_{j+1} r_j = r_{j+1} r_j r_{j+1}.$$

Таким образом, для подгруппы $R = \langle r_1, r_2, \dots, r_{g-1} \rangle$ группы N выполнены все соотношения группы кос B_g с g нитями. Докажем, что группа R изоморфна B_g .

Легко видеть, что элементы r_j действуют на коммутаторах k_j и k_{j+1} следующим образом:

$$r_j = \begin{cases} k_j \mapsto k_{j+1}, \\ k_{j+1} \mapsto k'_{j+1} k_j k_{j+1}, \end{cases} \quad (32)$$

а остальные коммутаторы k_i оставляют на месте.

Отсюда следует, что каждый элемент r_j отображает подгруппу группы F_{2g}

$$K = \langle k_1, k_2, \dots, k_g \rangle \cong F_g$$

на себя и это отображение есть автоморфизм. Таким образом, мы имеем естественный гомоморфизм $\theta: R \rightarrow \text{Aut}(F_g)$.

Согласно теореме N6 (см. [7; с. 182]) элементы $\theta(r_j) \in \text{Aut}(F_g)$ порождают группу $\theta(R)$, изоморфную группе кос B_g . Как было показано выше, все соотношения группы $\theta(R) \cong B_g$ уже выполнены в R . Следовательно, группа R также изоморфна B_g .

ТЕОРЕМА 2. *Указанная выше подгруппа R , изоморфная группе кос B_g , в результате абелизации свободной группы F_{2g} отображается на подгруппу группы Вайля для $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, порожденную всеми матрицами, не содержащими -1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. [7; с. 187]), что при абелизации группы F_{2g} естественное отображение $\psi: \text{Aut}(F_{2g}) \rightarrow \text{GL}(2g, \mathbb{Z})$ индуцирует отображение подгруппы N

$$N \xrightarrow{\psi} \text{Sp}(2g, \mathbb{Z}). \quad (33)$$

При этом выписанные выше автоморфизмы (31) переходят в матрицы $\psi(r_j)$, получающиеся из единичной матрицы заменой диагонального блока размера 4 от строки $2j - 1$ до строки $2(j + 1)$ на следующий блок:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Подгруппа, порожденная всеми матрицами $\psi(r_j)$, изоморфна группе перестановок S_g и имеет индекс 2^g в группе Вайля для $\text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Очевидно, все матрицы этой подгруппы составлены только из нулей и единиц.

Таким образом, мы нашли в стабилизаторе N подгруппу, изоморфную группе кос B_g , которая в отображении (33) является прообразом подгруппы группы Вайля, порожденной матрицами, не содержащими -1 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Dehn, “Die Gruppe der Abbildungsklassen”, *Acta Math.*, **69** (1938), 135–206.
- [2] W. B. R. Lickorish, “A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **60** (1964), 769–778; “Corrigendum: On the homeotopy group of a 2-manifold”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **62** (1966), 679–681.
- [3] S. P. Humphries, “Generators for the mapping class group”, *Topology of Low-Dimensional Manifolds*, Proc. Second Sussex Conf. (Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., **722**, Springer, Berlin, 1979, 44–47.
- [4] A. Hatcher, W. Thurston, “A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface”, *Topology*, **19**:3 (1980), 221–237.
- [5] B. Wajnryb, “An elementary approach to the mapping class group of a surface”, *Geom. Topol.*, **3** (1999), 405–466.
- [6] Х. Цишанг, Э. Форт, Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Наука, М., 1988.
- [7] В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп*, Наука, М., 1974.
- [8] H. Zieschang, “A note on the mapping class groups of surfaces and planar discontinuous groups”, *Low-Dimensional Topology* (Chelwood Gate, 1982), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **95**, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1985, 206–213.
- [9] H. Seifert, “Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume”, *Acta Math.*, **60** (1933), 147–238.

С. И. Адян

Математический институт им. В. А. Стеклова

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило

11.07.2006

Ф. Груневальд

Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

E-mail: fritz@math.uni-duesseldorf.de

Й. Меннике

Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld

E-mail: mennicke@math.uni-beilefeld.de

А. Л. Таламбуца

Математический институт им. В. А. Стеклова

E-mail: altal@mi.ras.ru