Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Акситов, Перестановки торов в интегрируемых гамильтоновых системах и спектральные серии псевдодифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 174–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:07:24

УДК 514.745.82

Перестановки торов в интегрируемых гамильтоновых системах и спектральные серии псевдодифференциальных операторов

Р. И. Акситов

В настоящей работе рассмотрены интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, чьи регулярные множества уровня состоят из нескольких торов Лиувилля, а бифуркационная диаграмма имеет изолированную точку. Показано, при каких условиях в таких системах происходит перестановка торов при обходе особой точки, рассмотрен квантовый аналог, приведены модельные примеры.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В настоящей работе обсуждаются гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, интегрируемые в смысле Лиувилля, имеющие изолированную точку (не ограничивая общности, далее считаем, что эта изолированная точка в нуле) на бифуркационной диаграмме и компактные регулярные множества уровня:

$$H = (F_1, F_2): \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

где $\mathcal{M} = (M^4, \omega)$ – симплектическое многообразие, $F_i(x) = y_i$, $y = (y_1, y_2)$,

$$\exists x_0 \in \mathcal{M} : F_1(x_0) = F_2(x_0) = 0,$$

ранг $H(x_0) < 2$; $H(x) \neq (0, 0) \Rightarrow$ ранг $H(x) = 2$; F_i далее предполагаются бесконечно гладкими. Напомним основные результаты о подобных системах. Когда регулярные множества уровня не только компактны, но и связны, то согласно классической теореме Лиувилля (см., например, [1]) они состоят из ровно одного тора Лиувилля; эта же теорема гарантирует существование переменных действие-угол в некоторой окрестности регулярного тора. Далее, естественно возникает вопрос, при каких условиях существуют глобальные переменные действие-угол.

Основным препятствием для существования глобальных переменных действие-угол является (аффинная) монодромия. Понятие монодромии было введено в [2] и заключается в следующем. Фиксируем на торе Λ_y точку $m(y)$, гладко зависящую от y , и будем перемещать y вдоль замкнутого пути γ , стартовав с некоторой точки y_0 ; при этом, в связи с неоднозначностью в выборе угловых переменных в теореме Лиувилля, по возвращении в y_0 точка $m(y_0)$ может перейти в произвольную точку тора Λ_{y_0} . Если проделать то же самое с базисом $(\delta_1(y), \delta_2(y))$ в $H_1(\Lambda_y, \mathbb{Z})$,

то теорема Лиувилля гарантирует, что после обхода по пути γ , лежащем в малой окрестности $U(y_0)$ точки y_0 такой, что $0 \notin U(y_0)$, исходный базис $(\delta_1(y_0), \delta_2(y_0))$ перейдет в себя же, т.е. расслоение $H_1(\Lambda_y, \mathbb{Z}) \rightarrow y \in U(y_0)$ тривиально. Монодромия описывает (возможную) нетривиальность подобного расслоения для произвольной окрестности $V(y_0)$. Говоря другими словами, монодромия описывает деформацию тора при обходе изолированной точки бифуркационной диаграммы.

В качестве примера системы с монодромией можно привести сферический маятник [2].

В [3] было показано, что в большинстве известных примеров, монодромия связана с наличием особых точек типа фокус-фокус (в окрестности такой точки квадратичные части интегралов имеют вид $H_1 = p_1x_1 + p_2x_2$, $H_2 = p_2x_1 - p_1x_2$) и была приведена формула для вычисления монодромии в таких системах; а именно, выбрав специальным образом базис (γ, δ) в гомологиях регулярного тора, будем двигаться вокруг изолированной точки бифуркационной диаграммы (в положительном направлении); при этом (γ, δ) также перемещаются (гомотопно) и в конце переходят в новые циклы $(\gamma_{\text{new}}, \delta_{\text{new}})$ на исходном торе, причем

$$\begin{pmatrix} \gamma_{\text{new}} \\ \delta_{\text{new}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

где матрица

$$M := \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица монодромии, N – число особых точек типа фокус-фокус на сингулярном “торе”.

В то время как классическая монодромия проявляется в невозможности выбрать глобальные переменные действие-угол, на квантовом уровне аналогом будет невозможность задания глобальных квантовых чисел [4]. Рассмотрим квантовую систему, соответствующую классической системе с изолированной особенностью типа фокус-фокус. Нас интересует поведение квазиклассических спектральных серий этой системы. Такие серии можно строить с помощью канонического оператора (к.о.) Маслова. Выпишем условия существования к.о., т.е. условия квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова:

$$\frac{J_i}{h} - \frac{\pi}{2}l_i = 2\pi k_i, \quad i = 1, 2;$$

здесь J_i – переменные действия, l_i – индексы Маслова, k_i – квантовые числа. Эти условия инвариантны относительно выбора базиса $\{\gamma_i\}$ в гомологиях тора [5]. Выберем в качестве такого базиса $\{\gamma_i\} \equiv (\gamma, \delta)$. Тогда после обхода критического значения имеем

$$\tilde{k}_1 = k_1 + Nk_2, \quad \tilde{k}_2 = k_2.$$

Геометрически это означает, что задавшись малым четырехугольником (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i + 1, j + 1)$ после однократного обхода особенности получим четырехугольник $(i + Nj, j)$, $(i + 1 + Nj, j)$, $(i + N(j + 1), j + 1)$, $(i + 1 + N(j + 1), j + 1)$ не совпадающий с исходным.

В системах, чьи регулярные слои состоят из двух и более торов, дополнительно появляется возможность перестановок этих торов (т.е. базис в гомологиях одного тора после обхода изолированной точки бифуркационной диаграммы переходит

в базис другого тора); такие системы могут возникать, например, в SYZ конструкции зеркальной симметрии (см. [5; п. 6.5], [6]). В данной работе показано при каких условиях подобная перестановка торов имеет место, исследована соответствующая квантовая система, приведены модельные примеры.

2. Классическая система. Нас интересуют системы, регулярные слои которых состоят из более, чем одного тора Лиувилля.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ – стандартное симплектическое пространство, гамильтонова система на $\mathcal{M}$ задана интегралами:

$$F_1 = X^2 - Y^2, \quad F_2 = XY, \quad \text{где } X = x_1^2 + p_1^2 - 1, \quad Y = x_2^2 + p_2^2 - 1. \quad (1)$$

У этой системы в точке $O = (0, 0)$ бифуркационной диаграммы имеется вырожденная изолированная особенность, причем O^{-1} – тор, целиком состоящий из сингулярных точек. Прообраз регулярной точки состоит из двух торов Лиувилля. При однократном обходе вокруг O эти торы меняются местами (см. рис. 1).

Рис. 1

На верхнем левом рисунке представлена бифуркационная диаграмма с обходящей критическое значение точкой P . Переменные X и Y из (1) фактически реализуют

двухлистное накрытие плоскости без нуля торами. Оставшиеся три рисунка демонстрируют движение точки P в этих переменных (при этом P расщепляется на две точки, отвечающие двум торам и получающиеся как пересечения линий уровня интегралов).

При каких условиях описанная перестановка торов имеет место? Во введении было упомянуто, что монодромия (при некоторых ограничениях на систему) определяется количеством особых точек типа фокус-фокус на сингулярном множестве. Далее будет показано, что и перестановка торов (опять же при некоторых ограничениях, которые возникнут и будут пояснены по ходу дела) также определяется некоторым инвариантом сингулярного множества. Неформально основной результат этой части можно сформулировать так:

пусть регулярный слой состоит из n торов, а сингулярный слой имеет t компонент связности. Для “не слишком вырожденных” систем перестановка торов имеет место тогда и только тогда, когда $t < n$.

Далее уточняется, какие системы понимаются под “не слишком вырожденными”, приводится строгая формулировка и доказательство данного утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть система имеет изолированную особенность $O = (0, 0)$. Назовем α -уровнем множество $F := F_1^2 + F_2^2 \equiv \alpha^2$. Обозначим через S_{α_1} совокупность всех α -уровней с $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_0]$ (α_0 предполагается фиксированным, $\alpha_1 < \alpha_0$). Также, если специально не оговорено противное, следует считать, что $\alpha \neq 0$. Далее будем обозначать 0-уровень через M_0 .

Для введенного объекта будет справедлива

ЛЕММА 1. *Верно следующее: α -уровень представляет собой невырожденную гиперповерхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначая $(x_3, x_4) := (p_1, p_2)$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_1 + 2 \frac{\partial F_2}{\partial x_i} F_2.$$

Соответственно, если в точке x α -уровень вырожден, то $(\partial F_1 / \partial x)(x)$ и $(\partial F_2 / \partial x)(x)$ линейно зависимы:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i} F_1(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_i} F_2(x) = 0,$$

что противоречит изолированности O .

Переформулируем условие перестановки торов в терминах α -уровня.

ЛЕММА 2. *Пусть прообраз какой-нибудь $(u, \text{следовательно, любой})$ регулярной точки в малой окрестности O состоит из двух торов. Перестановка этих торов при однократном обходе вокруг O имеет место тогда и только тогда, когда α -уровень связан для достаточно малых α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем торы $F_{10} = 0$, $F_{20} = \alpha$ и станем двигать их по α -уровню: точка (F_1, F_2) при этом пробегает окружность радиуса α с центром в нуле, одновременно каждый тор замечает “трубку” $T^2 \times I(F_1, F_2)$. “Трубки”, отвечающие разным торам, не могут пересекаться, поскольку тогда точка пересечения давала бы регулярную точку, чей прообраз состоит лишь из одного тора. Соответственно,

если торы переставляются, то “трубки” переходят друг в друга после обхода и α -уровень связан. И наоборот, когда α -уровень связан, он не может состоять из двух непересекающихся “трубок”, т.е. “трубка” одна и торы переставляются.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если прообраз регулярной точки состоит из $n > 2$ торов, то перестановка среди этих торов имеет место тогда и только тогда, когда α -уровень состоит из $m < n$ компонент связности.*

ЛЕММА 3. *Пусть M_0 компактен. Тогда он имеет не больше компонент связности, чем α -уровень.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что α_0 -уровень состоит из одной компоненты связности, а 0-уровень – из двух. Возьмем непересекающиеся 2ε -окрестности этих компонент: $M_1^{2\varepsilon}$ и $M_2^{2\varepsilon}$. Положим

$$\alpha_1 := \frac{\min(\min_{[M_1^{2\varepsilon}] \setminus M_1^\varepsilon} F, \min_{[M_2^{2\varepsilon}] \setminus M_2^\varepsilon} F)}{2}, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Точки α_1 -уровня заведомо есть как в M_1^ε , так и в M_2^ε , но не в кольцах $[M_1^{2\varepsilon}] \setminus M_1^\varepsilon$ и $[M_2^{2\varepsilon}] \setminus M_2^\varepsilon$, откуда следует, что α_1 -уровень не связан, что противоречит предполагаемой связности α_0 -уровня.

Доказательство фактически без изменений переносится на случай когда α_0 -уровень состоит из m компонент связности, а 0-уровень – из n компонент ($n > m$, $n > 2$ или $m > 1$).

ПРИМЕР 2. Для систем, в которых M_0 не компактен, лемма 3 не выполняется. Пусть, например,

$$f(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{1+x^2-y^2}\right) \frac{1}{\exp(x^2+y^2)}$$

при $1+x^2 > y^2$, $f(x, y) = 0$ при $1+x^2 \leq y^2$. В качестве интегралов возьмем

$$F_1 = f(X', Y') \frac{X'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}, \quad F_2 = f(X', Y') \frac{Y'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}.$$

Здесь можно либо взять $X' = \ln(1+X)$, $Y' = \ln(1+Y)$ (X и Y из (1)), либо считать, что X' и Y' – координаты в пространстве “торов” (в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^4$ действует группа G , порожденная симплектоморфизмами

$$a: p_1 \rightarrow p_1 + 1, \quad b: p_2 \rightarrow p_2 + 1)$$

$\mathcal{M} = \mathbb{R}^4/G$ – пространство “торов”. На рис. 2 представлены две компоненты M_0 (закрашены) и три связанных α -уровня (для различных малых α) в переменных X' , Y' , т.е. на бифуркационной диаграмме закрашенным областям рисунка отвечает точка нуль, связным кривым – концентрические окружности с центром в нуле, точке на плоскости $X' Y'$ отвечает тор в $\mathcal{M}$, причем разным точкам – разные торы.

ЛЕММА 4. *Предположим, что S_0 компактно, а для M_0 выполнено следующее условие (далее условие (*)): для достаточно малых ε , проколота ε -окрестность $M^\varepsilon \setminus M_0$ сингулярного уровня M_0 имеет столько же компонент связности, сколько и сам M_0 . Тогда M_0 имеет не меньше компонент связности, чем α -уровень.*

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α_0 -уровень состоит из двух компонент связности A и B , а 0-уровень – из одной компоненты. Возьмем $a \in A$, $b \in B$ и построим путь L_ε из a в b , лежащий в S_0 и не пересекающий 0-уровень. Через каждую точку α_0 -уровня проведем кривую $x(t)$, нормальную во всех своих точках к соответствующему α -уровню:

$$\dot{X}(t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(t),$$

или более подробно

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= -\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)), \\ x_i(0) &= x_i, \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha_0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно теореме существования и единственности через каждую точку любого α -уровня проходит такая кривая, причем ровно одна и продолжающаяся на весь интервал $(0, \infty)$ по t . Покажем, что любая $X(t)$ продолжается в произвольно малую окрестность 0-уровня. Множество $S_0 \setminus M^\varepsilon$ компактно, следовательно, определен $\min_{S_0 \setminus M^\varepsilon} |\partial F / \partial x|$ и согласно лемме 1 этот минимум отличен от нуля. Далее, вдоль $X(t)$ выполнено

$$F(X(t)) = \alpha(t),$$

следовательно,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} * \dot{X}(t) = -\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2,$$

откуда получаем, что $X(t)$ попадает в M^ε за конечное время. Перепишем (2) в более удобном для дальнейшего виде:

$$\dot{\varphi}(t, E) = -\frac{\partial F}{\partial x}(t, E), \quad E = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)), \quad F(E) = \alpha_0.$$

Вернемся к построению L_ε . Пусть $c = \varphi(t_a, a)$, $d = \varphi(t_b, b)$, $c, d \in M^\varepsilon$; от a до c за L_ε возьмем $\varphi(t, a)$, а от b до d – $\varphi(t, b)$. Точки c и d можно соединить путем, целиком

лежащим в M_ε и не пересекающим 0-уровень согласно (*). Построение L_ε завершено. Поднимем L_ε на α_0 -уровень вдоль кривых $\psi(t, E)$, обратных к $\varphi(t, E)$ (операция корректна, поскольку для любого $x \in L_\varepsilon$ существует и единственна пара E, t_0 такая, что $\varphi(t_0, E) = x$):

$$\dot{\psi}(t, E) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, E), \quad E \in L_\varepsilon, \quad F(E) \geq \min_{L_\varepsilon} F > 0,$$

и воспользуемся теоремой о непрерывной зависимости решения д.у. от начальных условий. Согласно этой теореме для любых E_0, t и ε существует $O(E_0, t, \varepsilon)$ такое, что для любого $E \in O(E_0, t, \varepsilon)$

$$|\psi(t, E_0) - \psi(t, E)| < \varepsilon.$$

Возьмем δ -окрестность α_0 -уровня $S_{\alpha_0+\delta} \setminus S_{\alpha_0-\delta}$; такая окрестность распадается на две компоненты A_δ и B_δ , отвечающие компонентам A и B α_0 -уровня. Пусть

$$d_a := d(A, \partial A_\delta), \quad d_b := d(B, \partial B_\delta), \quad d := \min(d_a, d_b).$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $\psi(t_0, E_0) \in A_\delta$. Применяя указанную теорему для произвольного E_0 , для t_0 такого, что $F(\psi(t_0, E_0)) = \alpha_0$, и для $\varepsilon = d$, получаем, что

$$\psi(t_0, E_0) \in A_\delta$$

для любого $E \in O(E_0, t_0, d)$. Остается заметить, что для любого E $\psi(t, E)$ пересекает лишь одну из компонент A_δ, B_δ , но не обе одновременно. Таким образом, L_ε естественным образом разбивается на два открытых множества, отвечающих компонентам A и B , что противоречит его связности. Получили противоречие.

Случай m компонент связности для α_0 -уровня и n , $m > n$, $m > 2$ или $n > 1$, – для 0-уровня доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если компактность S_0 в условии леммы опустить, то возможна следующая ситуация: любой путь из $M^\varepsilon \setminus M_0$ поднимается на одну из компонент, скажем, A , а все пути $x(t)$ для B уходят на бесконечность. Такая возможность не имеет отношения к перестановкам торov и поэтому просто исключается из рассмотрения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (*) автоматически выполняется, если 3-мера критических точек сингулярного уровня равна нулю.

ПРИМЕР 3. Для систем, в которых не выполнено (*), лемма 4 не выполняется:

$$F_1 = (X^4 + Y^4 + XY)^2(X^2 - Y^2), \quad F_2 = (X^4 + Y^4 + XY)^2XY.$$

На рис. 3 (в переменных X, Y) представлен 0-уровень (“восьмерка”) и три компоненты одного α -уровня.

Объединяя леммы 3 и 4 приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть регулярный слой состоит из n торov, S_0 компактно, а сингулярный слой состоит из m компонент связности и для него выполнено условие (*). Перестановка торov имеет место тогда и только тогда, когда $m < n$.

Рис. 3

3. Квазиклассическая система. Теперь рассмотрим квантовую систему, соответствующую описанной классической системе. В этой части будем предполагать, что симплектическое многообразие $\mathcal{M} = T^*M^2$, регулярные множества уровня состоят из двух торов Лиувилля T_1 и T_2 .

Итак, пусть $P_i(h)$ – вейлевские псевдодифференциальные операторы с символами F_i и чисто дискретным спектром, $T_j(\alpha_1, \alpha_2)$, $j = 1, 2$, – семейство лиувиллевых торов (множества уровня $F_1 \equiv \alpha_1$, $F_2 \equiv \alpha_2$) в окрестности особой точки, $\gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)$ – базис в $H_1(T_j(\alpha_1, \alpha_2), \mathbb{Z})$,

$$J_{ij}(\alpha_1, \alpha_2) := \oint_{\gamma_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)} \langle p, dx \rangle,$$

$K_{T_j(\alpha_1, \alpha_2)}(h)$ – канонический оператор Маслова. Как и во введении, выпишем условия существования к.о.:

$$\frac{J_{ij}(\alpha_1, \alpha_2)}{h} - \frac{\pi}{2} l_{ij} = 2\pi k_{ij}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Условия квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова определяют два дискретных набора решений $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(h, k_{1j}, k_{2j})$, $j = 1, 2$.

Согласно [7; теорема 13.3] в указанных обозначениях будет справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Для $h \in (0, h_0)$, где h_0 достаточно мало, $P_i(h)$ имеет две серии собственных значений вида $E_{(k_1, k_2)} = \alpha_{ij}(h, k_1, k_2) + O(h^2)$, $j = 1, 2$. Соответствующие этим собственным значениям почти собственные функции имеют вид $u_{k_1, k_2, j}(p, h) \equiv K_{T_j(\alpha_1, \alpha_2)} 1$, $j = 1, 2$.

Фактически условия (3) задают в окрестности любой регулярной точки $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20})$ две (вообще говоря, не пересекающиеся) решетки: j -я решетка составлена

из точек, в которых “квантуются” торы близкие к $T_j(\alpha_0)$. Двигаясь по точкам j -й решетки вдоль пути, не обходящего критическое значение, мы всегда сможем вернуться в исходную точку. Для путей, обходящих нуль, возможны следующие два варианта: если торы соответствующей классической системы не переставляются, то после однократного обхода попадаем в исходную точку; в противном случае, когда торы переставляются, после однократного обхода попадаем в точку второй решетки, а в исходную точку – только после двукратного обхода особенности. Другими словами, при обходе особенности решетки меняются местами тогда и только тогда, когда меняются местами торы классической системы.

Как указывалось во введении, монодромия проявляется в невозможности задания глобальных квантовых чисел, аналогично, перестановке торов классической системы соответствует невозможность задания глобальных номеров спектральных серий.

ПРИМЕР 4. Для системы из примера 1 условия квантования (3) имеют вид

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_{1j} + \sqrt{\alpha_{1j}^2 + 4\alpha_{2j}^2}}{2}} &= \frac{2k_{1j} + 1}{2} h, \\ 1 \pm \frac{\alpha_{2j}}{\sqrt{\frac{\alpha_{1j} + \sqrt{\alpha_{1j}^2 + 4\alpha_{2j}^2}}{2}}} &= \frac{2k_{2j} + 1}{2} h, \end{aligned}$$

знак плюс берется для $j = 1$, минус – для $j = 2$. Для того чтобы пара (α_1, α_2) удовлетворяла обеим системам, необходимо выполнение следующих условий:

$$-\frac{2k_{11} + 1}{2} h + 1 = \frac{2k_{12} + 1}{2} h - 1, \quad -\frac{2k_{21} + 1}{2} h + 1 = \frac{2k_{22} + 1}{2} h - 1. \quad (4)$$

Таким образом, при дискретных значениях $h_n = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$, торы удовлетворяют условиям квантования одновременно, решетки совмещаются и мы получаем серию асимптотически двукратных собственных значений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в системе примера 1 взять $X = x_1^2 + p_1^2 - a$, $Y = x_2^2 + p_2^2 - b$, $a, b > 0$, a и b несоизмеримы, то условия типа (4) не будут выполняться ни при одном значении h , т.е. в случае системы общего положения совмещения решеток не происходит.

Резюмируя сказанное, сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Классической системе с двумя торами на регулярном множестве уровня отвечает в квазиклассической системе локально две спектральных серии, причем каждой такой серии может быть присвоен глобальный номер в том и только том случае, когда в классической системе не происходит перестановок торов при обходе критического значения.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае n торов в классической системе имеем, соответственно, n спектральных серий локально. Глобально n серий будет только в случае отсутствия перестановок торов классической системы и $m < n$ серий в противном случае (причем m – это число компонент связности сингулярного слоя классической системы).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.И. Шафаревичу за постановку задачи и ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. I, Удмуртский университет, Ижевск, 1999.
- [2] J. J. Duistermaat, “On global action-angle variables”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33** (1980), 687–706.
- [3] Zung Nguyen Tien, “A note on focus-focus singularities”, *Differential Geom. Appl.*, **7**:2 (1997), 123–130.
- [4] San Vu Ngoc, “Quantum monodromy in integrable systems”, *Comm. Math. Phys.*, **203**:2 (1999), 465–479.
- [5] Zung Nguyen Tien, “Another note on focus-focus singularities”, *Lett. Math. Phys.*, **60**:1 (2002), 87–99.
- [6] A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslow, “Mirror symmetry is T -duality”, *Nuclear Phys. B*, **479**:1–2 (1996), 243–259.
- [7] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.

Р. И. Акситов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: aksitov@mail.ru

Поступило

12.07.2005

Исправленный вариант

24.03.2006