Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Бирюкова, Коэффициенты Фурье функций с заданным модулем непрерывности, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 184–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:23:48

Коэффициенты Фурье функций с заданным модулем непрерывности

В. С. Бирюкова

В работе исследуется роль условия выпуклости модуля непрерывности в задаче о верхней грани коэффициентов Фурье, взятой по классу функций с заданным модулем непрерывности. Также решена задача для коэффициентов Фурье по системе Радемахера.

Библиография: 7 названий.

Будем рассматривать 2π -периодические непрерывные функции f .

Пусть $\omega(\delta)$, где $\delta \in [0, \pi]$, – модуль непрерывности, т.е. выполнены условия: $\omega(0) = 0$, функция $\omega(\delta)$ возрастает (не обязательно строго) на $[0, \pi]$ и полуаддитивна (для любых положительных δ_1 и δ_2 справедлива оценка $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$). Кроме того, потребуем, чтобы функция $\omega(\delta)$ была непрерывна на $[0, \pi]$.

Обозначим через $H[\omega]$ класс 2π -периодических функций f , модуль непрерывности которых не превосходит $\omega(\delta)$, т.е. $\omega(f, \delta) \leq \omega(\delta)$, $\delta \in [0, \pi]$.

Рассмотрим задачу о точной верхней грани n -го коэффициента Фурье на классе функций $H[\omega]$:

$$I(n) = \sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (1)$$

Так как класс функций $H[\omega]$ инвариантен относительно сдвига аргумента, то $I(n)$ является также и верхней гранью коэффициентов Фурье по косинусам.

Вопрос о значении верхней грани коэффициентов Фурье возникает в задачах теории приближений. Так, Лебег в работе [1], посвященной приближению функций суммами Фурье, нашел верхнюю грань (1) для классов $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$.

Он показал, что верхняя грань (1) по классу $\text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, равна

$$\frac{2^{1+\alpha} n}{\pi} \int_0^{\pi/2n} x^\alpha \sin nx \, dx = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi n^\alpha} \int_0^{\pi/2} x^\alpha \sin x \, dx.$$

В частности, при $\alpha = 1$ имеем

$$I(n) = \frac{4}{\pi n}.$$

Для классов $H[\omega]$ подобную задачу рассматривал Никольский [2] при изучении верхних граней уклонений функции f от их сумм Фурье n -го порядка, взятых по

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00986) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2841.2006.1).

классу $H[\omega]$. Для задачи (1) из рассуждений Никольского вытекает, что если ω – выпуклый вверх модуль непрерывности, то

$$\sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx.$$

Никольский [2] отметил, кроме того, что если ω не является выпуклым вверх модулем непрерывности, то такое равенство может не иметь места, но всегда справедливо равенство

$$\sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = Q_n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx,$$

где $1/2 \leq Q_n \leq 1$.

Эту оценку для Q_n улучшил Ефимов [3; с. 248], доказав, что $Q_n \in [2/3, 1]$.

В явном виде, как самостоятельный вопрос, вопрос о нахождении точной верхней грани коэффициентов Фурье на классах функций был поставлен Никольским в докладе на Международном математическом конгрессе 1954 г. в Амстердаме (см. [4; с. 269]).

Мы рассмотрим вопрос о роли условия выпуклости ω в задаче о верхней грани (1).

Отметим, что при изучении верхней грани (1) из всех свойств функции $\sin nx$ будут использованы только ее $(2\pi/n)$ -периодичность, нечетность в нуле, четность относительно точки $\pi/(2n)$, положительность и возрастание (не обязательно строгое) на $(0, \pi/(2n)]$. Поэтому $\sin nx$ в доказываемых ниже теоремах 2 и 3 можно заменить на произвольную функцию, обладающую указанными свойствами. Это позволит одновременно решить аналогичную задачу о коэффициентах Фурье по системе Радемахера, о чем будет сказано в конце работы.

Пусть $H^*[\omega]$ – класс функций $f \in H[\omega]$, имеющих период $2\pi/n$, нечетных в нуле и четных относительно точки $\pi/(2n)$.

ЛЕММА 1. *При отыскании верхней грани (1) достаточно рассматривать только функции $f \in H^*[\omega]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f – произвольная функция из $H[\omega]$. Рассмотрим функцию $f_n(x)$, полученную из $f(x)$ по формуле

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(x + \frac{2\pi k}{n}\right).$$

Поскольку f принадлежит классу $H[\omega]$, то и f_n принадлежит $H[\omega]$. По построению функция $f_n(x)$ имеет период $2\pi/n$.

Так как $\sin nx$ имеет период $2\pi/n$, то справедливы равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{2\pi k}{n}\right) \sin nx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{2\pi k}{n}\right) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) \sin nx \, dx.$$

Таким образом, для каждой функции f , принадлежащей классу $H[\omega]$, в этом классе существует функция периода $2\pi/n$, n -й коэффициент Фурье которой равен n -му коэффициенту Фурье функции f . Поэтому в (1) достаточно рассматривать только функции f , имеющие период $2\pi/n$. Далее будем рассматривать такие функции, а интеграл брать по отрезку $[-\pi/n, \pi/n]$.

Разложим f на четную и нечетную составляющие: $f = f^+ + f^-$. Раз $f \in H[\omega]$, то и функции $f^+, f^- \in H[\omega]$.

Так как функция $\sin nx$ нечетна в нуле, то

$$\int_{-\pi/n}^{\pi/n} f^+(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Из последнего равенства следует, что для каждой $(2\pi/n)$ -периодической функции f из $H[\omega]$ в этом классе существует нечетная функция с периодом $2\pi/n$, для которой значение интеграла в (1) такое же, как у f , и, значит, достаточно рассматривать только нечетные в нуле функции f .

Сделаем в интеграле $\int_0^{\pi/n} f(x) \sin nx \, dx$ замену переменной $x = y + \pi/(2n)$, тогда

$$\int_0^{\pi/n} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi/(2n)}^{\pi/(2n)} f\left(y + \frac{\pi}{2n}\right) \cos ny \, dy.$$

Аналогично сказанному выше убеждаемся, что достаточно рассматривать случай, когда $f(y + \pi/(2n))$ – четная в нуле функция, т.е. когда $f(x)$ четна относительно точки $\pi/(2n)$. Лемма доказана.

Так как в задаче о верхней грани (1) можно рассматривать только функции периода $2\pi/n$ на отрезке $[-\pi/(2n), \pi/(2n)]$, то достаточно исследовать случай $n = 1$. Далее будем считать $n = 1$. Кроме того, при отыскании верхней грани (1) будем рассматривать только функции из $H^*[\omega]$.

Пусть $f_0(x)$ – функция периода 2π , нечетная в нуле, четная относительно точки $\pi/2$ и

$$f_0(x) = \frac{1}{2} \omega(2x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Вясним некоторые свойства функции f_0 .

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f_0(x)$ принадлежит классу $H^*[\omega]$ в том и только том случае, когда $\omega(\delta)$ – выпуклый вверх на $[0, \pi]$ модуль непрерывности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0(x)$ принадлежит классу $H^*[\omega]$. Возьмем произвольные числа δ_1 и δ_2 из $[0, \pi]$. Обозначим $\delta = \delta_1/2 + \delta_2/2$. Так как $f_0(x) \in H^*[\omega]$, то справедливо неравенство

$$\left| f_0\left(\frac{\delta_1}{2}\right) - f_0\left(-\frac{\delta_2}{2}\right) \right| \leq \omega(\delta).$$

Но в силу нечетности функции f_0

$$f_0\left(\frac{\delta_1}{2}\right) - f_0\left(-\frac{\delta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} \omega(\delta_1) + \frac{1}{2} \omega(\delta_2).$$

Таким образом, имеем

$$\omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \leq 2\omega(\delta) = 2\omega\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right).$$

Известно (см. [5; гл. 1, § 4]), что из справедливости последнего неравенства при всех $\delta_1, \delta_2 \in [0, \pi]$ и непрерывности ω следует выпуклость вверх функции $\omega(\delta)$ на $[0, \pi]$. Таким образом, необходимость условия теоремы доказана.

Тот факт, что если $\omega(\delta)$ – выпуклая вверх на $[0, \pi]$ функция, то $f_0(x) \in H^*[\omega]$, известен. Для классов $\text{Lip } \alpha$ это отметил Лебег [1], а в общем случае – Никольский [2].

Для полноты изложения приведем доказательство этого утверждения.

Согласно определению функции f_0 для любых $\delta_1, \delta_2 \in [0, \pi]$ справедливо равенство

$$|f_0(\delta_1) - f_0(\delta_2)| = \frac{1}{2}|\omega(2\delta_1) - \omega(2\delta_2)|.$$

В силу выпуклости вверх функции $\omega(\delta)$, если $|\delta_1 - \delta_2| \leq \delta$, то

$$|\omega(2\delta_1) - \omega(2\delta_2)| \leq \omega(2|\delta_1 - \delta_2|) \leq 2\omega(\delta).$$

Таким образом, $|f_0(\delta_1) - f_0(\delta_2)| \leq \omega(\delta)$ и $f_0 \in H[\omega]$ на $[0, \pi]$.

Если же одно из чисел δ_1, δ_2 отрицательно, например, $\delta_1 < 0 < \delta_2$, то в силу нечетности f относительно нуля имеем

$$|f_0(\delta_2) - f_0(\delta_1)| = \frac{1}{2}(\omega(2\delta_2) + \omega(-2\delta_1)) \leq \omega(\delta_2 - \delta_1).$$

Отсюда следует, что и в этом случае функция $f_0 \in H[\omega]$.

Теорема доказана.

ЛЕММА 2. Для каждой нечетной функции $g \in H[\omega]$ при всех $x \in [0, \pi/2]$ выполняется неравенство $|g(x)| \leq f_0(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку g – нечетная функция, то для любого $x \in [0, \pi/2]$ справедливо соотношение

$$2|g(x)| = |g(x) - g(-x)| \leq \omega(2x). \quad (2)$$

Последнее неравенство выполняется, так как $g \in H[\omega]$. Из (2) следует, что

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2}\omega(2x) = f_0(x).$$

Лемма доказана.

Рассмотрим величину

$$I_1 = \sup_{f \in H^*[\omega]} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx.$$

Отметим, что в силу сказанного выше для исходной задачи о верхней грани (1) при $n = 1$ имеем $I(1) = (4/\pi)I_1$.

ЛЕММА 3. При отыскании верхней грани I_1 достаточно рассматривать только функции f , возрастающие на $[0, \pi/2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если функция $f \in H^*[\omega]$, то возрастающая на $[0, \pi/2]$ функция

$$F(x) = \max_{0 \leq t \leq x} f(t)$$

также принадлежит $H[\omega]$. Отсюда будет следовать утверждение леммы, так как в силу оценки $f(x) \leq F(x)$, $x \in [0, \pi/2]$, справедливо неравенство

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx \leq \int_0^{\pi/2} F(x) \sin x \, dx.$$

Возьмем точки x_1, x_2 из $[0, \pi/2]$ такие, что $x_1 < x_2$, и оценим разность $F(x_2) - F(x_1)$.

По построению функции F найдется точка $t_1 \geq x_1$ такая, что $F(x_1) = f(t_1)$. Если $F(x_1) = f(x_1)$, то в качестве t_1 берем саму точку x_1 , а если $F(x_1) > f(x_1)$, то нужная точка t_1 существует в силу непрерывности функции f .

Точно так же существует точка $t_2 \leq x_2$, для которой $F(x_2) = f(t_2)$. Но тогда $t_2 - t_1 \leq x_2 - x_1$ и

$$F(x_2) - F(x_1) = f(t_2) - f(t_1) \leq \omega(t_2 - t_1) \leq \omega(x_2 - x_1).$$

Значит, $F \in H^*[\omega]$ и, таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 4. Существует функция $f^* \in H^*[\omega]$, на которой верхняя грань

$$I_1 = \sup_{f \in H^*[\omega]} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin x \, dx$$

достигается, т.е.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} f^*(x) \sin x \, dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность возрастающих на $[0, \pi/2]$ функций $f_m \in H^*[\omega]$ такую, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_m(x) \sin x \, dx = I_1.$$

Построим экстремальную функцию f^* . Рассуждения будем проводить как в стандартном доказательстве теоремы Хелли (см., например, [6; гл. 8, § 4]). Мы приводим здесь эти рассуждения подробно, так как нам необходимо следить еще за принадлежностью предельной функции f^* классу $H[\omega]$.

Пусть $\{r_m\} \subset [0, \pi/2]$ – последовательность всех рациональных точек отрезка $[0, \pi/2]$.

Сначала рассмотрим значения функций f_m в точке r_1 :

$$f_1(r_1), \quad f_2(r_1), \quad \dots, \quad f_m(r_1), \quad \dots$$

Эта последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность

$$f_{11}(r_1), \quad f_{12}(r_1), \quad \dots, \quad f_{1m}(r_1), \quad \dots$$

Положим $f^*(r_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{1n}(r_1)$.

Далее рассмотрим значения функций f_{1m} в точке r_2 . Последовательность

$$f_{11}(r_2), \quad f_{12}(r_2), \quad \dots, \quad f_{1m}(r_2), \quad \dots$$

содержит сходящуюся подпоследовательность

$$f_{21}(r_2), \quad f_{22}(r_2), \quad \dots, \quad f_{2m}(r_2), \quad \dots$$

Положим $f^*(r_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m}(r_2)$.

Продолжая таким образом, для каждой точки r_p находим сходящуюся последовательность

$$f_{p1}(r_p), \quad f_{p2}(r_p), \quad \dots, \quad f_{pm}(r_p), \quad \dots,$$

являющуюся подпоследовательностью исходной последовательности $\{f_m\}$, и обозначаем

$$f^*(r_p) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{pm}(r_p).$$

Таким образом, функция f^* определена во всех рациональных точках.

Составим диагональную последовательность

$$f_{11}(x), \quad f_{22}(x), \quad \dots, \quad f_{mm}(x), \quad \dots \quad (3)$$

Вся она выделена из сходящейся последовательности $f_{1n}(x)$, поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{mm}(r_1) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{1m}(r_1) = f^*(r_1).$$

Замечаем теперь, что вся последовательность (3), за исключением лишь первого ее члена $f_{11}(x)$, выделена из последовательности $f_{2m}(x)$, поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{mm}(r_2) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{2m}(r_2) = f^*(r_2).$$

Вообще, диагональная последовательность функций (3), за исключением ее первых $(p-1)$ членов, выделена из последовательности $f_{pm}(x)$, поэтому

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_{mm}(r_p) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{pm}(r_p) = f^*(r_p).$$

При этом, поскольку функции последовательности f_m возрастали на $[0, \pi/2]$, то функция f^* возрастает на множестве рациональных точек из $[0, \pi/2]$.

Определим f^* для иррациональных x по формуле

$$f^*(x) = \sup_{\rho \leq x} \{f^*(\rho)\},$$

где ρ пробегает все рациональные точки из $[0, \pi/2]$. Ясно, что построенная таким образом функция f^* возрастает на $[0, \pi/2]$.

Покажем, что она принадлежит классу $H^*[\omega]$. Пусть сначала числа r_i и r_j рациональны, тогда

$$|f^*(r_i) - f^*(r_j)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (f_{mm}(r_i) - f_{mm}(r_j)) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_{mm}(r_i) - f_{mm}(r_j)| \leq \omega(|r_i - r_j|).$$

Если хотя бы одна из точек x или y (пусть для определенности $x < y$) иррациональна, то возьмем последовательности рациональных чисел $\{\rho_i^x\}, \{\rho_i^y\} \subset [0, \pi/2]$ такие, что $\{\rho_i^x\}$ возрастает, $\{\rho_i^y\}$ убывает и $x = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i^x$, $y = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho_i^y$.

В силу возрастания функции f^* имеем

$$|f^*(x) - f^*(y)| \leq |f^*(\rho_i^x) - f^*(\rho_i^y)| \leq \omega(|\rho_i^x - \rho_i^y|).$$

Переходя здесь к пределу при $i \rightarrow \infty$ и пользуясь непрерывностью ω , получаем

$$|f^*(x) - f^*(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

Кроме того, $|f_{mm}(x)| \leq \omega(x)$ при всех m и x , так как $f_{mm} \in H^*[\omega]$.

Для последовательности функций f_{mm} выполнены все условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. В самом деле, $f_{mm}(x)$ при $m \rightarrow \infty$ сходится к $f^*(x)$ для всех $x \in [0, \pi/2]$. Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_{mm}(x) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} f^*(x) \sin x \, dx,$$

т.е. на функции f^* достигается верхняя грань интеграла I_1 . Лемма доказана.

Если ω не является выпуклым вверх модулем непрерывности, то согласно теореме 1 функция f_0 не принадлежит классу $H[\omega]$. Из леммы 2 следует, что $f^*(x) \leq f_0(x)$ для любого $x \in [0, \pi/2]$. Но поскольку функция f_0 не принадлежит классу $H[\omega]$, а f^* принадлежит $H[\omega]$, то существует точка $y \in [0, \pi/2]$ такая, что выполняется строгое неравенство $f^*(y) < f_0(y)$.

Так как функции f_0 и f^* непрерывны, то неравенство $f^* < f_0$ выполняется и в некоторой окрестности точки y . А значит, поскольку $\sin x$ положителен на $(0, \pi/2]$, такое же неравенство выполняется и для интегралов от этих функций. Следовательно, если ω – модуль непрерывности, не удовлетворяющий условию выпуклости вверх, то

$$I_1 < \int_0^{\pi/2} f_0(x) \sin x \, dx.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Если модуль непрерывности ω не является выпуклым вверх на $[0, \pi/2]$, то

$$I(1) = \sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx < \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2x) \sin x \, dx.$$

Если же ω – выпуклый вверх на отрезке $[0, \pi/2]$ модуль непрерывности, то

$$I(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \omega(2x) \sin x \, dx.$$

Из теоремы 2 и приведенного выше результата Ефимова следует, что существует число Q , $2/3 \leq Q \leq 1$, такое, что

$$I(1) = \frac{2}{\pi} Q \int_0^{\pi/2} \omega(2x) \sin x \, dx.$$

Так как

$$I(n) = \sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \sup_{f \in H[\omega]} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{x}{n}\right) \sin x \, dx,$$

то теорема 2 приводит к следующему результату для произвольного n .

ТЕОРЕМА 3. Пусть ω – модуль непрерывности и функция $f \in H[\omega]$, тогда

$$I(n) = \sup_{f \in H[\omega]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} Q_n \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx,$$

где $2/3 \leq Q_n \leq 1$. При этом $Q_n = 1$ в том и только том случае, когда ω – выпуклый вверх на отрезке $[0, \pi/n]$ модуль непрерывности.

Новым в теореме 3 является утверждение, что $Q_n = 1$ только для модулей непрерывности, выпуклых вверх на отрезке $[0, \pi/n]$.

Выше мы отмечали, что в проведенных рассуждениях функцию $\sin nx$ можно заменить на произвольную $(2\pi/n)$ -периодическую функцию, нечетную в нуле, четную относительно точки $\pi/2$, положительную и возрастающую (не обязательно строго) на $(0, \pi/(2n)]$.

Заменяем, например, $\sin nx$ на $\text{sign} \sin nx$. Тогда согласно аналогу теоремы 3 получим для класса $H[\omega]$ функций периода 2π :

$$\sup_{f \in H[\omega]} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sign} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} Q_n \int_0^{\pi/2n} \omega(2x) \, dx, \quad (4)$$

где $Q_n \in [2/3, 1]$ и $Q_n = 1$ в том и только том случае, когда ω – выпуклый вверх на $[0, \pi/2]$ модуль непрерывности.

Рассмотрим класс $H[\omega]$ функций f периода 1. Чтобы получить из (4) результаты о коэффициентах Фурье по системе функций Радемахера, определенных на отрезке $[0, 1]$ по формуле

$$r_n(x) = \text{sign} \sin 2^{n+1} \pi x, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

будем вместо n писать 2^n .

Значит, для системы функций Радемахера справедлив аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ω – модуль непрерывности и функция $f \in H[\omega]$, тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in H[\omega]} \int_0^1 f(x) r_n(x) \, dx = Q_n^r 2^{n+1} \int_0^{1/2^{n+2}} \omega(2x) \, dx = Q_n^r 2^n \int_0^{1/2^{n+1}} \omega(x) \, dx,$$

где $Q_n^r \in [2/3, 1]$. При этом, $Q_n^r = 1$ в том и только том случае, когда ω – выпуклый вверх модуль непрерывности на отрезке $[0, 1/2^{n+1}]$.

Ефимов [7] установил оценки сверху для верхних граней коэффициентов Фурье–Уолша функций, модуль непрерывности которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Им показано в частности, что для функций Радемахера, определенных на отрезке $[0, 1]$ по формуле (5), справедливо неравенство

$$\sup_{f \in H[\omega]} \int_0^1 f(x) r_n(x) \, dx \leq 2^{n+1} \int_0^{1/2^{n+2}} \omega(2x) \, dx. \quad (6)$$

При этом Ефимов отметил, что если $\omega(\delta)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности и $H[\omega]$ – класс функций, имеющих период 1, то в (6) имеет место знак равенства. Таким образом, новым в теореме 4 является случай, когда модуль непрерывности ω не является выпуклым вверх.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Lebesgue, “Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant á une condition de Lipschitz”, *Bull. Soc. Math. France*, **38** (1910), 184–210.
- [2] С. М. Никольский, “Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности”, *Докл. АН СССР*, **52**:3 (1946), 101–104.
- [3] А. В. Ефимов, “Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **24** (1960), 243–296.
- [4] С. М. Никольский, “Некоторые вопросы приближений функций полиномами”, Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954; *Обзорные доклады*, ГИФМЛ, М., 1961.
- [5] Н. Бурбаки, *Функции действительного переменного*, Наука, М., 1965.
- [6] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [7] А. В. Ефимов, “О верхних гранях коэффициентов Фурье–Уолша”, *Матем. заметки*, **6**:6 (1969), 725–736.

В. С. Бирюкова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: Vera.Biryukova@bt-russia.com

Поступило

11.05.2006