Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Тернарная проблема Гольдбаха с простыми числами, представимыми заданными квадратичными формами, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 193–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:40:41

УДК 511

Тернарная проблема Гольдбаха с простыми числами, представимыми заданными квадратичными формами

С. А. Гриценко

В работе решается тернарная проблема Гольдбаха с простыми числами, представимыми заданными примитивными положительно определенными бинарными квадратичными формами, дискриминанты которых совпадают с дискриминантами мнимых квадратичных полей, в которых квадратичные формы распадаются на линейные множители.

Библиография: 5 названий.

Введение. В 1937 году И. М. Виноградов решил тернарную проблему Гольдбаха, получив асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \quad (1)$$

в простых числах p_1, p_2, p_3 при нечетном N .

В настоящей статье выводится асимптотическая формула для числа решений уравнения (1) в простых числах p_1, p_2, p_3 , на которые наложены ограничения, состоящие в том, что каждое простое число $p_i, i = 1, 2, 3$, представляется некоторой заданной бинарной квадратичной формой.

Заметим, что если эти квадратичные формы являются одноклассными, то задача сводится по существу к решению тернарной проблемы Гольдбаха с простыми числами, лежащими в определенных арифметических прогрессиях. В случае, когда разности этих арифметических прогрессий являются константами или растут с ростом N не слишком быстро, решение такой задачи мало чем отличается от решения классической тернарной проблемы Гольдбаха. То же относится и к задаче получения асимптотической формулы для числа решений (1) в простых числах, представимых всеми квадратичными формами заданных дискриминантов.

В случае, если квадратичные формы, представляющие простые числа, являются многоклассными, вопрос о представимости натуральных чисел такими формами не может быть сведен к вопросу о попадании этих чисел в какие-то классы вычетов по какому-либо модулю (в связи с этим см. [1]).

Поэтому для решения задачи помимо информации о распределении простых чисел, представимых квадратичными формами, в арифметических прогрессиях требуются оценки некоторых специальных тригонометрических сумм.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № РНП.2.1.1.3263), а также Белгородского государственного университета (грант № ВГК 007-04).

Везде в дальнейшем под квадратичными формами мы будем понимать примитивные положительно определенные бинарные квадратичные формы, дискриминанты которых совпадают с дискриминантами мнимых квадратичных полей, в которых эти формы разлагаются на линейные множители.

Дискриминанты квадратичных форм везде предполагаются константами, хотя из доказательств основной теоремы и лемм видно, что имеется возможность некоторого их роста вместе с ростом параметра N .

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:

- p, p_1, p_2 – простые числа;
- P – простые идеалы мнимого квадратичного поля;
- $N(A)$ – норма целого идеала A мнимого квадратичного поля;
- $\chi(q; k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } q \equiv l \pmod{k}, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$
- $\chi_i(l)$ – характер квадратичного поля, в котором квадратичная форма Q_i разлагается на линейные множители, $i = 1, 2, 3$;
- $S_Q(\alpha) = \sum' e^{2\pi i \alpha p}$, где штрих означает, что суммирование идет по простым числам, представимым квадратичной формой Q ;
- $\sum_{a=0}^{b-1}^*$ означает суммирование по a , взаимно простым с b в указанных пределах.

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $J(N, Q_1, Q_2, Q_3)$ – число решений уравнения (1) в простых числах p_1, p_2, p_3 , представимых квадратичными формами Q_1, Q_2, Q_3 с дискриминантами $-D_1, -D_2, -D_3$ соответственно, h_1, h_2, h_3 – числа классов эквивалентных форм с дискриминантами $-D_1, -D_2, -D_3$ соответственно. Тогда для любой постоянной $c > 0$ справедлива формула

$$J(N, Q_1, Q_2, Q_3) = \sigma(N, D_1, D_2, D_3)I(N) + O(N^2 \log^{-c} N),$$

где

$$\begin{aligned} I(N) &= \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N \\ 3 \leq n_1, n_2, n_3 \leq N}} \frac{1}{\log n_1 \log n_2 \log n_3} \sim \frac{N^2}{2 \log^3 N}, \\ \sigma(N, D_1, D_2, D_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{a=0}^{q-1} e^{-2\pi i a N/q} \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_1, 0) \chi_1(a) \mu\left(\frac{q}{D_1}\right) \chi_1\left(\frac{q}{D_1}\right) \tau_{\chi_1} \right) \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_2, 0) \chi_2(a) \mu\left(\frac{q}{D_2}\right) \chi_2\left(\frac{q}{D_2}\right) \tau_{\chi_2} \right) \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_3, 0) \chi_3(a) \mu\left(\frac{q}{D_3}\right) \chi_3\left(\frac{q}{D_3}\right) \tau_{\chi_3} \right), \end{aligned}$$

χ_1, χ_2, χ_3 – характеры мнимых квадратичных полей с дискриминантами $-D_1, -D_2, -D_3$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $J(N, Q_1, Q_2, Q_3)$ – число решений уравнения (1) в простых числах p_1, p_2, p_3 , представимых квадратичными формами Q_1, Q_2, Q_3 с дискриминантом $-D$, h – число классов эквивалентных форм с дискриминантом $-D$. Тогда для любой постоянной $c > 0$ справедлива формула

$$J(N, Q_1, Q_2, Q_3) = \sigma(N, D)I(N) + O(N^2 \log^{-c} N),$$

где

$$I(N) = \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=N \\ 3 \leq n_1, n_2, n_3 \leq N}} \frac{1}{\log n_1 \log n_2 \log n_3} \sim \frac{N^2}{2 \log^3 N},$$

$$\sigma(N, D) = \sigma_0(N) + \sigma_1(N, D) + \sigma_2(N, D) + \sigma_3(N, D),$$

$$\sigma_0(N) = \frac{1}{h^3} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q) \gamma_0(N, q)}{\varphi^3(q)}, \quad \sigma_1(N, D) = \frac{3}{h^3} \sum_{\substack{q_2=1 \\ (q_2, D)=1}}^{\infty} \frac{\mu^2(Dq_2) \gamma_1(N, Dq_2)}{\varphi^3(q_2)},$$

$$\sigma_2(N, D) = \frac{3}{h^3} \sum_{\substack{q_2=1 \\ (q_2, D)=1}}^{\infty} \frac{\mu(Dq_2) \gamma_2(N, Dq_2)}{\varphi^3(q_2)}, \quad \sigma_3(N, D) = \frac{1}{h^3} \sum_{\substack{q_2=1 \\ (q_2, D)=1}}^{\infty} \frac{\gamma_3(N, Dq_2)}{\varphi^3(q_2)},$$

$$\gamma_0(N, q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q e^{-2\pi i a N/q}, \quad \gamma_1(N, q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e^{-2\pi i a N/q},$$

$$\gamma_2(N, q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S^2(a, q) e^{-2\pi i a N/q}, \quad \gamma_3(N, q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q S^3(a, q) e^{-2\pi i a N/q},$$

здесь

$$S(a, q) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^q \chi_1(l) e^{2\pi i a l/q},$$

χ_1 – характер мнимого квадратичного поля с дискриминантом $-D$.

Доказательства проводятся круговым методом. Кроме того, существенную роль играет функциональное уравнение ряда Дирихле специального вида из [2], на котором основаны асимптотическая формула из [3] и оценка из [4].

Для доказательства теорем 1 и 2 нам потребуются следующие леммы.

1. Леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $(a, D_1 q_2) = 1$, $(D, q_2) = 1$, $D \mid D_1$, причем каждый простой делитель D_1 делит D . Тогда справедливо тождество

$$S(a, D_1 q_2) = \begin{cases} \chi_1(a) \chi_1(q_2) \mu(q_2) \tau_{\chi_1}, & \text{если } D_1 = D, \\ 0, & \text{если } D_1 \neq D, \end{cases}$$

где $\tau_{\chi_1} = \sum_{l=1}^D \chi_1(l) e^{2\pi i l/D}$ – сумма Гаусса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как характер χ_1 вещественный, имеем

$$S(a, D_1 q_2) = \chi_1(a) S(1, D_1 q_2).$$

Далее,

$$\begin{aligned} S(1, D_1 q_2) &= \sum_{\substack{l_1=1 \\ (l_1, D_1)=1}}^{D_1} \sum_{\substack{l_2=1 \\ (l_2, q_2)=1}}^{q_2} \chi_1(l_1 q_2 + l_2 D_1) e^{2\pi i l_1 / D_1} e^{2\pi i l_2 / q_2} \\ &= \chi_1(q_2) \mu(q_2) \sum_{l_1=1}^D \sum_{l_2=0}^{D_1/D-1} \chi_1(l + D l_2) e^{2\pi i l_1 / D} e^{2\pi i l_2 / (D_1/D)}. \end{aligned}$$

Поскольку сумма по l_2 равна 1, если $D_1 = D$, и нулю в противном случае, то лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $(D, q_2) = 1$. Тогда справедливы тождества

$$\begin{aligned} \gamma_1(N, D q_2) &= D \mu(q_2) \chi_1(N) \gamma_0(N, q_2), \\ \gamma_2(N, D q_2) &= \chi_1(-1) D \mu^2(q_2) \gamma_0(N, D) \gamma_0(N, q_2), \\ \gamma_3(N, D q_2) &= \chi_1(-1) D^2 \mu(q_2) \chi_1(N) \gamma_0(N, q_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 1. Имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1(N, D q_2) &= \chi_1(q_2) \mu(q_2) \tau(\chi_1) \sum_{\substack{a=1 \\ (a, D q_2)=1}}^{D q_2} \chi_1(a) e^{-2\pi i a N / (D q_2)} \\ &= \chi_1(q_2) \mu(q_2) \tau(\chi_1) \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, D)=1}}^D \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} \chi_1(a_1 q_2 + a_2 D) e^{-2\pi i a_1 N / D} e^{-2\pi i a_2 N / q_2} \\ &= \chi_1^2(q_2) \mu(q_2) \tau(\chi_1) \gamma_0(N, q_2) \sum_{a=1}^D \chi_1(a) e^{-2\pi i a N / D}. \end{aligned}$$

Применим известное тождество

$$\sum_{a=1}^D \chi_1(a) e^{-2\pi i a N / D} = \chi_1(-1) \chi_1(N) \tau_{\chi_1},$$

тогда получим

$$\gamma_1(N, D q_2) = \chi_1^2(q_2) \mu(q_2) \chi_1(-1) \tau_{\chi_1}^2 \chi_1(N) \gamma_0(N, q_2).$$

Далее, $\chi_1^2(q_2) = 1$ и $\chi_1(-1) \tau_{\chi_1}^2 = D$, так как χ_1 — вещественный характер и $(q_2, D) = 1$. Таким образом, тождество для $\gamma_1(N, D q_2)$ получено. Выведем тождество для $\gamma_2(N, D q_2)$.

В силу леммы 1 имеем

$$\gamma_2(N, D q_2) = \mu^2(q_2) \tau_{\chi_1}^2 \gamma_0(N, D q_2).$$

Теперь нужное тождество следует из мультипликативности по q функции $\gamma_0(N, q)$ и равенства $\tau_{\chi_1}^2 = \chi_1(-1)D$.

Выведем тождество для $\gamma_3(N, Dq_2)$. Вновь применим лемму 1:

$$\gamma_3(N, Dq_2) = \tau_{\chi_1}^2 \gamma_1(N, Dq_2) = \chi_1(-1)D^2 \mu(q_2) \chi_1(N) \gamma_0(N, q_2).$$

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Справедливы тождества*

$$\begin{aligned} \sigma_0(N) &= \frac{1}{h^3} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right), & \sigma_1(N, D) &= \frac{3D\mu^2(D)\chi_1(N)}{h^3\varphi^3(D)} \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right), \\ \sigma_2(N, D) &= \frac{3D\mu(D)\chi_1(-1)\gamma_0(N, D)}{h^3\varphi^3(D)} \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right), \\ \sigma_3(N, D) &= \frac{D^2\chi_1(-1)\chi_1(N)}{h^3\varphi^3(D)} \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 3 прямо следует из леммы 2 и мультипликативности по q функции $\gamma_0(N, q)$.

ЛЕММА 4. *Пусть $(l, q) = 1$, $1 \leq q \leq \log^{c_1} x$, $\mathcal{C}$ – класс идеалов. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\pi_1(x; q, l, \mathcal{C}) = \sum_{l=1}^q \frac{1 + \chi(q; D, 0)\chi_1(l)}{h\varphi(q)} \operatorname{Li} x + O(Ne^{-c_0(\log N)^\gamma/2}),$$

где $c_0 = c_0(c_1) > 0$, $\gamma = 1/(20c_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [3].

ЛЕММА 5. *Пусть $(a, q) = 1$, $\alpha = a/q + z$, $q \leq \log^{c_1} N$, $|z| \leq 1/(q\tau)$, $\tau = N \log^{-c_2} N$. Тогда для $S_Q(\alpha)$ справедлива формула*

$$S_Q(\alpha) = \sum_{l=1}^q \frac{1 + \chi(q; D, 0)\chi_1(l)}{h\varphi(q)} e^{2\pi i a l / q} M(z) + O(Ne^{-c_0(\log N)^\gamma/2}),$$

c_0, γ – константы из леммы,

$$M(z) = \sum_{n=3}^N \frac{e^{2\pi i z n}}{\log n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию форма Q имеет вид

$$Q(x, y) = \frac{N(x\omega_1 + y\omega_2)}{N(A)},$$

где ω_1, ω_2 – базис целого идеала A .

Пусть A лежит в классе идеалов $\mathcal{A}$, а B – произвольный идеал из класса $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда $AB = (\xi_B)$ – главный идеал, $\xi_B \in A$.

Отображение $B \rightarrow \xi_B$ задает биекцию между собственными идеалами из класса $\mathcal{A}^{-1}$ и классами эквивалентных чисел из идеала A (два числа *эквивалентны*, если их отношение равно ± 1). Так как

$$\frac{N(\xi_B)}{N(A)} = N(B),$$

то формой Q представляются те и только те простые числа p , которые являются нормами простых идеалов из класса $\mathcal{A}^{-1}$.

Поэтому имеем равенство

$$S_Q(\alpha) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{A}^{-1} \\ N(P) \leq N}} e^{2\pi i \alpha N(P)} + O(\sqrt{N}) = S_{1Q}(\alpha) + O(\sqrt{N}).$$

Остаток $O(\sqrt{N})$ возник из-за того, что существует $O(\sqrt{N})$ простых идеалов, нормы которых равны $p^2 \leq N$.

Займемся суммой $S_{1Q}(\alpha)$. Имеем

$$S_{1Q}(\alpha) = S_{1Q}\left(\frac{a}{q} + z\right) = \sum_{l=1}^q e^{2\pi i a l/q} T_l(z),$$

где

$$T_l(z) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{A}^{-1} \\ N(P) \leq N \\ N(P) \equiv l \pmod{q}}} e^{2\pi i z N(P)}.$$

Применим к $T_l(z)$ формулу частного суммирования:

$$\begin{aligned} T_l(z) = & - \int_{\sqrt{N}}^N (\pi_1(u; q, l, \mathcal{A}^{-1}) - \pi_1(\sqrt{N}; q, l, \mathcal{A}^{-1})) de^{2\pi i z u} \\ & + \pi_1(N; q, l, \mathcal{A}^{-1}) e^{2\pi i z N} + O(\sqrt{N}), \end{aligned}$$

где

$$\pi_1(u; q, l, \mathcal{A}^{-1}) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{A}^{-1} \\ N(P) \leq u \\ N(P) \equiv l \pmod{q}}} 1.$$

Интегрируя по частям и пользуясь леммой 4, получаем

$$T_l(z) = \frac{1 + \chi(q; D, 0)\chi_1(l)}{h\varphi(q)} \int_3^N \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u} du + O(Ne^{-c_0(\log N)^\gamma/2}).$$

Теперь утверждение леммы следует из известного равенства

$$M(z) = \int_3^N \frac{e^{2\pi i z u}}{\log u} du + O(1).$$

ЛЕММА 6. Пусть

$$a(n) = \sum_{\substack{A \\ N(A)=n}} X(A),$$

где X – произвольный неглавный характер группы классов идеалов. Пусть $c > 0$ – произвольная постоянная. Тогда существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что при $\alpha = a/q + z$, $|z| \leq 1/(q\tau)$, $(a, q) = 1$, $\tau = N(\log N)^{-c_2}$, $(\log N)^{c_1} < q \leq \tau$ справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^N \Lambda(n) a(n) e^{2\pi i \alpha n} = O(N(\log N)^{-c}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [4].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $c > 0$ – произвольная постоянная. Тогда существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что при $\alpha = a/q + z$, $|z| \leq 1/(q\tau)$, $(a, q) = 1$, $\tau = N(\log N)^{-c_2}$, $(\log N)^{c_1} < q \leq \tau$ справедлива оценка

$$S_Q(\alpha) = O(N(\log N)^{-c}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы равенства

$$S_Q(\alpha) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{A}^{-1} \\ N(P) \leq N}} e^{2\pi i \alpha N(P)} + O(\sqrt{N}) = \frac{1}{h} \sum_X \bar{X}(\mathcal{A}) \sum_{N(P) \leq N} X(P) e^{2\pi i \alpha N(P)} + O(\sqrt{N}),$$

где X пробегает все характеры группы классов идеалов, h – порядок группы классов идеалов.

Далее,

$$\begin{aligned} & \sum_X \bar{X}(\mathcal{A}) \sum_{N(P) \leq N} X(P) e^{2\pi i \alpha N(P)} \\ &= \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p} + \sum_{p \leq N} \chi_1(p) e^{2\pi i \alpha p} + \sum_{X \neq X_0} \bar{X}(\mathcal{A}) \sum_{N(P) \leq N} X(P) e^{2\pi i \alpha N(P)}, \end{aligned}$$

где χ_1 – характер квадратичного поля, X_0 – главный характер группы классов идеалов.

Оценка

$$\sum_{X \neq X_0} \bar{X}(\mathcal{A}) \sum_{N(P) \leq N} X(P) e^{2\pi i \alpha N(P)} = O(N(\log N)^{-c})$$

следует из леммы 6.

Оценка

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p} = O(N(\log N)^{-c})$$

хорошо известна (см., например, [5; гл. 10]). Оценка

$$\sum_{p \leq N} \chi_1(p) e^{2\pi i \alpha p} = O(N(\log N)^{-c})$$

также справедлива и выводится по существу тем же способом, что и оценка суммы $\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$, поскольку модуль характера Дирихле χ_1 является константой (не растет с ростом N).

2. Доказательство основных теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\tau = N \log^{-c_2} N$, $c_2 > 1$. Запишем $J(N, Q_1, Q_2, Q_3)$ в интегральной форме:

$$J(N, Q_1, Q_2, Q_3) = \int_{-1/\tau}^{1-1/\tau} S_{Q_1}(\alpha) S_{Q_2}(\alpha) S_{Q_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Определим множества E_1 и E_2 :

$$E_1 = \left\{ \alpha \in \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right) : \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau}, (a, q) = 1, q \leq \log^{c_1} N \right\},$$

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau}, 1 - \frac{1}{\tau} \right) \setminus E_1.$$

Выберем параметры c_1 и c_2 так, чтобы $c + 1 < c_1$, $2c_1 < c_2$, причем c_1 и c_2 удовлетворяют условиям леммы 6. Тогда если N – достаточно большое число, то множества E_1 и E_2 состоят из непересекающихся промежутков и

$$J(N, Q_1, Q_2, Q_3) = J_1(N, Q_1, Q_2, Q_3) + J_2(N, Q_1, Q_2, Q_3),$$

где

$$J_i(N, Q_1, Q_2, Q_3) = \int_{E_i} S_{Q_1}(\alpha) S_{Q_2}(\alpha) S_{Q_3}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha, \quad i = 1, 2.$$

В силу следствия 1 имеем

$$J_2(N, Q_1, Q_2, Q_3) = O\left(\pi(N) \max_{\alpha \in E_2} |S_{Q_1}(\alpha)|\right) = O(N^2 \log^{-c} N).$$

Пусть $\alpha \in E_1$. Применяя леммы 1 и 5, получаем

$$\begin{aligned} J_1(N, Q_1, Q_2, Q_3) &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{q \leq \log^{c_1} N} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{a=0}^{q-1} e^{-2\pi i a N/q} \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_1, 0) \chi_1(a) \mu\left(\frac{q}{D_1}\right) \chi_1\left(\frac{q}{D_1}\right) \tau_{\chi_1} \right) \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_2, 0) \chi_2(a) \mu\left(\frac{q}{D_2}\right) \chi_2\left(\frac{q}{D_2}\right) \tau_{\chi_2} \right) \\ &\quad \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_3, 0) \chi_3(a) \mu\left(\frac{q}{D_3}\right) \chi_3\left(\frac{q}{D_3}\right) \tau_{\chi_3} \right) \\ &\quad \times \int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz. \end{aligned}$$

Следуя рассуждениям из [5; гл. 10], приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_{-1/(q\tau)}^{1/(q\tau)} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz &= \int_{-1/2}^{1/2} M^3(z) e^{-2\pi i z N} dz + O(N^2 (\log N)^{-2c_2+2c_1}) \\ &= I(N) + O(N^2 (\log N)^{-2c_2+2c_1}). \end{aligned}$$

Наконец, тривиально оценивая сумму по $q > \log^{c_1} N$, получаем утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Теорема 2 доказывается так же, только сумма по a вычисляется при помощи лемм 2 и 3.

3. Нижние оценки сумм сингулярных рядов. О сумме сингулярного ряда из теоремы 1 ограничимся следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть числа D_1, D_2 и D_3 достаточно велики, N – нечетное число. Тогда справедливо неравенство

$$\sigma(N, D_1, D_2, D_3) > \frac{1}{2h_1h_2h_3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскроем скобки в произведении

$$\begin{aligned} & \left(\mu(q) + \chi(q; D_1, 0) \chi_1(a) \mu\left(\frac{q}{D_1}\right) \chi_1\left(\frac{q}{D_1}\right) \tau_{\chi_1} \right) \\ & \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_2, 0) \chi_2(a) \mu\left(\frac{q}{D_2}\right) \chi_2\left(\frac{q}{D_2}\right) \tau_{\chi_2} \right) \\ & \times \left(\mu(q) + \chi(q; D_3, 0) \chi_3(a) \mu\left(\frac{q}{D_3}\right) \chi_3\left(\frac{q}{D_3}\right) \tau_{\chi_3} \right). \end{aligned}$$

Получим восемь слагаемых, которым соответствует восемь сингулярных рядов. Первое слагаемое равно $\mu(q)$, ему соответствует ряд

$$\sigma_1(N) = \frac{1}{h_1h_2h_3} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q) \gamma_0(q, N)}{\varphi^3(q)}.$$

Хорошо известно, что $\sigma_1(N) > 1/(h_1h_2h_3)$ (см., например, [5; гл. 10]).

Суммы остальных рядов оценим сверху. Поскольку оценки проводятся одинаково, ограничимся рядом

$$\begin{aligned} \sigma_8(N, D_1, D_2, D_3) &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{q-1} e^{-2\pi i a N/q} \frac{\chi(q; D_1, 0) \chi(q; D_2, 0) \chi(q; D_3, 0)}{\varphi^3(q)} \\ & \times \chi_1(a) \chi_2(a) \chi_3(a) \mu\left(\frac{q}{D_1}\right) \mu\left(\frac{q}{D_2}\right) \mu\left(\frac{q}{D_3}\right) \\ & \times \chi_1\left(\frac{q}{D_1}\right) \chi_2\left(\frac{q}{D_2}\right) \chi_3\left(\frac{q}{D_3}\right) \tau_{\chi_1} \tau_{\chi_2} \tau_{\chi_3}. \end{aligned}$$

Пользуясь корневыми оценками для сумм Гаусса, получаем, что существует абсолютная постоянная $c_3 > 0$ такая, что

$$|\sigma_8(N, D_1, D_2, D_3)| < \frac{c_3 \sqrt{D_1 D_2 D_3}}{h_1 h_2 h_3 [D_1, D_2, D_3]^2},$$

где $[D_1, D_2, D_3]$ – наименьшее общее кратное чисел D_1, D_2, D_3 .

Если $D_1 \leq D_2 \leq D_3$, то $\sqrt{D_1 D_2 D_3} \leq D_3^{3/2}$, $[D_1, D_2, D_3]^2 \geq D_3^2$; следовательно, справедливо неравенство

$$|\sigma_8(N, D_1, D_2, D_3)| < \frac{c_3}{h_1 h_2 h_3 \sqrt{\max(D_1, D_2, D_3)}} \leq \frac{1}{14 h_1 h_2 h_3},$$

если $\min(D_1, D_2, D_3) \geq 196c_3^2$.

Аналогично поступая с остальными шестью сингулярными рядами, получаем наше утверждение.

Займемся сингулярным рядом из теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если N – четное число, то

$$\sigma_0(N) = \sigma_1(N, D) = \sigma_2(N, D) = \sigma_3(N, D) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если D – четное число, то, как известно, D делится на 4, значит $\sigma_1(N) = \sigma_2(N) = 0$. Кроме того, $\chi_1(N) = 0$, т.е. $\sigma_3(N) = 0$. Наконец, хорошо известно, что при четном N $\sigma_0(N) = 0$.

Если же D – нечетное число, то при четном N имеем

$$\prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) = 0, \quad \sigma_0(N) = \sigma_1(N, D) = \sigma_2(N, D) = \sigma_3(N, D) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть N – нечетное число, $-D = \delta_F$ – дискриминант неодноклассной квадратичной формы, которая раскладывается на линейные множители в мнимом квадратичном поле с дискриминантом δ_F . Пусть $D > 15$. Тогда справедливо неравенство $\sigma(N, D) > 2/(5h^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $-D$ – дискриминант квадратичного поля, достаточно рассмотреть следующие случаи.

Случай 1. $D = 8d$, где d – нечетное бесквадратное число.

Тогда $\mu(D) = 0$, $\sigma_1(N, D) = \sigma_2(N, D) = 0$, поэтому $\sigma_0(N, D) = \sigma_0(N) + \sigma_3(N, D)$.

Если $(N, D) > 1$, то $\chi_1(N) = 0$, $\sigma_3(N, D) = 0$, значит, в этом случае $\sigma(N, D) = \sigma_0(N)$.

Пусть $(N, D) = 1$, тогда

$$\sigma(N, D) \geq \frac{1}{h^3} \left(2 \prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) - \prod_{p \mid d} \frac{p^2}{(p-1)^3} \right) \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) \geq \frac{1}{2} \sigma_0(N),$$

так как для любого $p \geq 3$ выполняется неравенство

$$1 + \frac{1}{(p-1)^3} \geq \frac{p^2}{(p-1)^3}.$$

Случай 2. $D = 4d$, где d – нечетное бесквадратное число, $d \geq 5$ (иначе квадратичная форма с дискриминантом $-D$ одноклассна).

Тогда, если $(N, D) > 1$, то $\sigma(N, D) = \sigma_0(N)$.

Пусть $(N, D) = 1$, тогда

$$\sigma(N, D) \geq \frac{2}{h^3} \left(\prod_{p \mid d} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) - \prod_{p \mid d} \frac{p^2}{(p-1)^3} \right) \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right).$$

По условию d – нечетное бесквадратное число, $d \geq 5$, поэтому существует простое число $p \geq 5$, делящее d . Но при $p \geq 5$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \geq \frac{p^2}{(p-1)^3},$$

откуда следует, что $\sigma(N, D) \geq (1/2)\sigma_0(N)$.

Случай 3. D – нечетное бесквадратное число, $D \equiv 3 \pmod{4}$, $D > 15$. Разобьем этот случай на подслучаи.

3.1. $\chi_1(N) = 1$. Тогда $\gamma_0(N, D) = \mu(D)$, $\chi_1(-1) = -1$, поэтому

$$\sigma(N, D) \geq \frac{1}{h^3} \left(\prod_{p|D} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) - \prod_{p|D} \frac{p^2}{(p-1)^3} \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) \right) \geq \frac{1}{2} \sigma_0(N),$$

так как существует простой делитель D , больший 5.

3.2. $\chi_1(N) = -1$. Тогда

$$\sigma(N, D) = \sigma_0(N) + \frac{1}{h^3} \left(\frac{-6D + D^2}{\varphi^3(D)} \right) \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) > \sigma_0(N),$$

так как $-6D + D^2 > 0$.

3.3. $\chi_1(N) = 0$. В этом случае $\sigma_1(N, D) = \sigma_3(N, D) = 0$.

Пусть $(N, D) = D_1 > 1$, $D = D_1 D_2$, $(N, D_2) = 1$. Тогда $\gamma_0(N, D) = \mu(D_2) \varphi(D_1)$,

$$\begin{aligned} \sigma(N, D) = \frac{1}{h^3} & \left(\prod_{p|D_1} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \prod_{p|D_2} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \right. \\ & \left. - 3 \prod_{p|D_1} \frac{p}{(p-1)^2} \prod_{p|D_2} \frac{p}{(p-1)^3} \right) \prod_{p \nmid D} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right). \end{aligned}$$

По условию $D = D_1 D_2$ – нечетное бесквадратное число, $D > 15$. Поэтому либо D_1 , либо D_2 имеет простой делитель, больший 5.

Если $p \mid D_1$, $p \geq 7$, то имеем неравенство

$$\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \geq \frac{p}{(p-1)^2},$$

из которого следует, что в этом случае $\sigma(N, D) \geq (2/5) \sigma_0(N)$.

Если же $p \mid D_2$, $p \geq 7$, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \geq \frac{p}{(p-1)^3}$$

и, следовательно, $\sigma(N, D) \geq (7/10) \sigma_0(N)$.

Из полученных оценок заключаем, что для любых N и D , удовлетворяющих условиям, справедливо неравенство

$$\sigma(N, D) \geq \frac{2}{5} \sigma_0(N) > \frac{2}{5h^3}$$

(неравенство $\sigma_0(N) > 1/h^3$ хорошо известно, см., например, [5; гл. 10]).

В предыдущем предложении не рассмотрен случай, когда $D = 15$. Как будет видно из следующего предложения, неодноклассные квадратичные формы дискриминанта -15 представляют собой единственное исключение из общего правила: существует бесконечно много нечетных чисел N , для которых $\sigma(N, 15) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть N – нечетное число. Если $(N, 15) = 1$, то

$$\sigma(N, 15) > \frac{1}{13}.$$

Если $(N, 3) = 1$, $(N, 5) > 1$ или $(N, 5) = 1$, $(N, 3) > 1$, то

$$\sigma(N, 15) > \frac{1}{8}.$$

Если $N \equiv 0 \pmod{15}$, то $\sigma(N, 15) = 0$, причем уравнение

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

неразрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 , представимых квадратичными формами дискриминанта -15 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые три утверждения сразу следуют из равенства

$$\begin{aligned} \sigma(N, 15) = \frac{1}{8} \left(\prod_{p|15} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) + \frac{45\chi_1(N)}{512} \right. \\ \left. - \frac{45\gamma_0(N, 15)}{512} - \frac{225\chi_1(N)}{512} \right) \prod_{p \nmid 15} \left(1 - \frac{\gamma_0(N, p)}{\varphi^3(p)} \right) \end{aligned}$$

(мы учли, что $h = 2$).

Кроме того, всякая квадратичная форма дискриминанта -15 эквивалентна одной из форм

$$f_1(x, y) = x^2 + xy + 4y^2, \quad f_2(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2.$$

Несложные вычисления показывают, что формы f_1 и f_2 могут представлять лишь простые числа, сравнимые с 1, 2, 4 и 8 по модулю 15, а суммы любых трех таких чисел не делятся на 15.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.
- [2] С. А. Гриценко, “О функциональном уравнении одного арифметического ряда Дирихле”, *Чебышевский сб.*, 4:2 (2003), 55–67.
- [3] С. А. Гриценко, “О распределении норм простых идеалов из заданного класса в арифметических прогрессиях”, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **322** (2005), 45–62.
- [4] С. А. Гриценко, “Оценка линейной тригонометрической суммы по простым числам, представимым заданной квадратичной формой”, *Чебышевский сб.*, 5:4 (2005), 82–87.
- [5] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.

С. А. Гриценко

Белгородский государственный университет

E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Поступило

17.05.2006