Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Жеребьев, Об определениях Данжуа–Лузина для классов ACG -, ACG^* -, VBG - и VBG^* -функций, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 205–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:58:55

Об определениях Данжуа–Лузина для классов ACG -, ACG^* -, VBG - и VBG^* -функций

Ю. А. Жеребьев

В данной работе найдена еще одна эквивалентная форма определений Данжуа–Лузина классов функций ACG , ACG^* , VBG и VBG^* . Получены также условия, достаточные для того, чтобы вариационная мера и аппроксимативная вариационная мера являлись полуумеренными мерами.

Библиография: 28 названий.

1. Введение. Одними из основных объектов изучения в теории интеграла являются классы функций ACG , ACG^* , VBG и VBG^* . Существует два классических подхода к их введению. Исторически первым является подход, предложенный Лузинным и Данжуа в работах [1]–[3] (см. определение 3). Второй, и общепринятый в настоящее время, восходит к работам Хинчина [4] и [5] (см. определения 1 и 2). В данной работе показано, что если требовать существования порций, на которых функция является AC , AC^* , VB или VB^* -функцией, не во всех совершенных подмножествах отрезка, как это требуется в определениях Данжуа–Лузина, а только во всех совершенных множествах меры нуль, то таким образом определенные функции будут в точности совпадать с рассматриваемыми классами ACG , ACG^* , VBG и VBG^* соответственно (теорема 2). Кроме того, из доказываемых ниже утверждений получен ряд следствий относительно вариационных мер, усиливающих некоторые результаты, установленные другими авторами ранее.

Сначала необходимо ввести некоторые определения и обозначения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть заданы функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и множество $E \subset [a, b]$. Рассмотрим величины

$$\mathcal{V}(f, E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p |f(v_i) - f(u_i)| \right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{V}^*(f, E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^p \omega(f, [u_i, v_i]) \right\},$$

где supremum берется по всем конечным наборам неперекрывающихся отрезков $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^p$ с концами $u_i, v_i \in E$, а $\omega(f, [u_i, v_i])$ обозначает колебание функции f на отрезке $[u_i, v_i]$. Функция f называется VB -функцией (соответственно VB^* -функцией) на множестве E , если $\mathcal{V}(f, E) < +\infty$ (соответственно $\mathcal{V}^*(f, E) < +\infty$). В случае, если множество E пусто либо одноточечно, то по определению считается, что f

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00206).

является VB -функцией и VB^* -функцией на E . Функция f называется VBG -функцией (соответственно VBG^* -функцией) на множестве E , если это множество представимо в виде $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, где f является VB -функцией (соответственно VB^* -функцией) на каждом множестве E_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется AC -функцией (соответственно AC^* -функцией) на множестве $E \subset [a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta > 0$ такое, что для каждого конечного набора неперекрывающихся отрезков $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^p$ с концами $u_i, v_i \in E$ суммарной длины $\sum_{i=1}^p (v_i - u_i) < \eta$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^p |f(v_i) - f(u_i)| < \varepsilon \left(\sum_{i=1}^p \omega(f, [u_i, v_i]) < \varepsilon \right).$$

Точно так же, как и в определении 1, считается, что, если множество E пусто либо одноточечно, то f является AC -функцией и AC^* -функцией на E . Функция f называется ACG -функцией (соответственно ACG^* -функцией) на множестве E , если она непрерывна на нем и множество E представимо в виде $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, где f является AC -функцией (соответственно AC^* -функцией) на каждом E_n .

Под *порцией* непустого множества E всюду далее будет пониматься непустое множество вида $E \cap (u, v)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непрерывная функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется VBG -функцией (соответственно VBG^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на непустом замкнутом множестве $E \subset [a, b]$ в смысле *Данжуса–Лузина*, если в каждом непустом совершенном множестве $P \subset E$ найдется порция, на которой f является VB -функцией (соответственно VB^* -функцией, AC -функцией, AC^* -функцией).

Эквивалентность приведенных определений выражается следующей теоремой (см. [6; гл. 7, § 9, теорема 9.1], [7; гл. 6, теорема 6.10]).

ТЕОРЕМА 1. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на непустом замкнутом множестве $E \subset [a, b]$, является VBG -функцией (соответственно VBG^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на этом множестве тогда и только тогда, когда она является VBG -функцией (соответственно VBG^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на E в смысле *Данжуса–Лузина*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие непрерывности в отношении VBG^* -функций в теореме 1 можно отбросить ([7; с. 96]).

В дальнейшем понадобятся также понятия N -свойства и N' -свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обладает N -свойством *Лузина* (соответственно N' -свойством) на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если образ $f(A)$ (соответственно $f(K)$) всякого множества $A \subset E$ (соответственно всякого компактного множества $K \subset E$) меры нуль имеет нулевую внешнюю меру Лебега.

ЛЕММА 1 [8]. Для функций, непрерывных на замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}$, N -свойство *Лузина* равносильно N' -свойству.

Перейдем теперь к определению вариационных мер. Всякое отображение $\mathcal{S}$ отрезка $[a, b]$ в множество всех его подмножеств называется *выбором*¹, если каждая точка x интервала (a, b) является точкой плотности множества $\mathcal{S}(x)$, точка a является точкой правой плотности множества $\mathcal{S}(a)$, точка b является точкой левой плотности множества $\mathcal{S}(b)$ и $x \in \mathcal{S}(x)$ для любого $x \in [a, b]$ (определения точек плотности см. в [6] и [10]). Тогда каждая функция отрезка $G(I)$ порождает функцию множества

$$V_{\text{ap}}(G, E) = \inf_{\mathcal{S}} \sup_{\mathcal{P}} \sum_{(x, I) \in \mathcal{P}} |G(I)|,$$

называемую *аппроксимативной вариационной мерой*. Здесь supremum берется по всем $\mathcal{S}$ -разбиениям на множестве E , т.е. по всем конечным наборам пар $\mathcal{P} = \{(x_j, [u_j, v_j])\}_{j=1}^p$ таких, что $x_j \in [u_j, v_j]$, с точками $x_j \in E$ и попарно неперекрывающимися отрезками $[u_j, v_j]$ с концами $u_j, v_j \in \mathcal{S}(x_j)$, а infimum берется по всем выборам $\mathcal{S}$ (из приведенного определения видно, что достаточно рассматривать сужения выборов $\mathcal{S}$ на множество E , что в дальнейшем и будет использоваться при их явном построении). Кроме того, по определению считается $V_{\text{ap}}(G, \emptyset) = 0$. Если теперь ограничиться рассмотрением только выборов вида

$$\mathcal{S}(x) = \begin{cases} (x - \delta(x), x + \delta(x)) \cap [a, b] & \text{при } x \in (a, b), \\ [a, a + \delta(a)) \cap [a, b] & \text{при } x = a, \\ (b - \delta(b), b] \cap [a, b] & \text{при } x = b, \end{cases}$$

где $\delta(\cdot)$ – некоторая положительная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, то полученная функция множества $V(G, \cdot)$ будет называться *вариационной мерой*. Другими словами, вариационную меру можно представить в виде

$$V(G, E) = \inf_{\delta} \sup_{\mathcal{P}} \sum_{(x, I) \in \mathcal{P}} |G(I)|,$$

где infimum берется по всем функциям $\delta: E \rightarrow (0, +\infty)$. Аналогично считается $V(G, \emptyset) = 0$. Ясно, что для любого множества $E \subset [a, b]$ справедливо соотношение $V_{\text{ap}}(G, E) \leq V(G, E)$. Можно также доказать, что обратное неравенство, вообще говоря, не имеет места. Непосредственно из определений вытекает, что обе вариационные меры являются внешними метрическими мерами, а потому они являются борелевскими мерами [11; т. 1, гл. 1, § 1.11, теорема 1.11.9]. Аппроксимативная вариационная мера $V_{\text{ap}}(G, \cdot)$ (соответственно вариационная мера $V(G, \cdot)$) является *полуумеренной мерой*² на F_{σ} -множестве E , если это множество можно представить в виде $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, где множества E_n замкнуты и $V_{\text{ap}}(G, E_n) < +\infty$ (соответственно $V(G, E_n) < +\infty$). Ясно, что требование принадлежности множества E классу F_{σ} необходимо для того, чтобы вариационные меры являлись полуумеренными мерами на нем. Вариационные меры $V_{\text{ap}}(G, \cdot)$ и $V(G, \cdot)$ будут называться *абсолютно непрерывными*, если они обращаются в нуль на всех множествах нулевой меры Лебега.

С каждой функцией точки $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ связана аддитивная функция отрезка $F([u, v]) = f(v) - f(u)$ и, наоборот, с каждой аддитивной функцией отрезка $F(I)$

¹Choice – термин, введенный Томсоном в [9].

²Semi-moderated measure – термин, введенный Пфеффером в [12].

можно связать функцию точки $f(t) = F([a, t])$. Таким образом, всякая функция точки f порождает вариационные меры $V_{\text{ар}}(F, \cdot)$ и $V(F, \cdot)$, поэтому далее под $F(I)$ всегда будет пониматься аддитивная функция отрезка, определяемая описанным выше способом. Наконец, $\mu(E)$ будет обозначать меру Лебега множества E , а $\bar{E}$ – замыкание этого множества. Длина отрезка J будет обозначаться $|J|$.

2. Характеризации классов функций VB , VBG , VB^* , VBG^* , AC , ACG , AC^* и ACG^* . Приводимые в данном пункте утверждения являются ключевыми при доказательстве основного результата данной работы. Они также представляют самостоятельный интерес, поскольку являются характеристиками перечисленных классов функций.

ЛЕММА 2. Пусть множество $E \subset [a, b]$ замкнуто. Функция (соответственно непрерывная на множестве E функция) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является VBG^* -функцией (соответственно VBG -функцией) на E тогда и только тогда, когда она является VBG^* -функцией (соответственно VBG -функцией) на каждом совершенном множестве $P \subset E$ нулевой меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Подробное доказательство будет проведено для класса VBG -функций. Для VBG^* -функций оно полностью аналогично. При этом здесь будет использована конструкция, неоднократно применявшаяся при доказательстве аналогичных утверждений в отношении вариационных мер [13]–[20]. Поскольку для не более, чем счетного множества E утверждение леммы очевидно, то в силу теоремы Кантора–Бендиксона [10; гл. 2, § 6, теорема 4] множество E можно предполагать континуальным. Пусть Q – множество точек $x \in E$ таких, что ни в одной порции множества E , содержащей эту точку, функция f не является VBG -функцией. Тогда множество $S = E \setminus Q$ характеризуется тем, что для каждой его точки x найдется порция $E \cap (u_x, v_x)$, содержащая эту точку, на которой функция f является VBG -функцией. Интервалы $\{(u_x, v_x)\}_{x \in S}$ образуют покрытие множества S открытыми множествами, из которого, пользуясь теоремой [21; гл. 2, § 5, теорема 5], можно выделить не более, чем счетное подпокрытие $\{(u_j, v_j)\}_{j=1}^{+\infty}$. Тогда $S = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (S \cap (u_j, v_j))$, причем функция f является VBG -функцией на каждой порции $S \cap (u_j, v_j)$, поэтому f является VBG -функцией на множестве S .

В отношении множества Q возможны два случая: либо Q пусто, либо Q непусто. Пусть Q непусто. Тогда оно совершенно. Действительно, Q замкнуто в E как дополнение до множества S , открытого в E , а из замкнутости самого множества E вытекает замкнутость множества Q . Затем, для всякой изолированной точки $t \in Q$ можно было бы найти порцию $E \cap I$, содержащую среди всех точек множества Q только эту изолированную точку. Тогда f являлась бы VBG -функцией на множестве $S \cap I = (E \cap I) \setminus \{t\}$, а значит, и на всей порции $E \cap I$, чего не может быть. Таким образом, множество Q не имеет изолированных точек.

Каждая порция $E \cap I$, содержащая некоторую точку множества Q , может быть представлена в виде $E \cap I = (Q \cap I) \cup (S \cap I)$. По доказанному выше f является VBG -функцией на порции $S \cap I$, но не на порции $E \cap I$, поэтому функция f не является VBG -функцией на любой порции множества Q . Пусть $\tilde{Q}$ обозначает множество, полученное из Q удалением всех точек, изолированных хотя бы с одной стороны. Поскольку из Q было выброшено не более, чем счетное множество, то функция f не является VBG -функцией также на любой порции множества $\tilde{Q}$. Пусть $c = \inf Q$

и $d = \sup Q$. Разделим отрезок $[c, d]$ на три равных отрезка

$$J_1 = [c, v_1], \quad J_2 = [v_1, v_2], \quad J_3 = [v_2, d].$$

Поскольку функция f не является VBG -функцией на порциях $\tilde{Q} \cap (c, v_1)$ и $\tilde{Q} \cap (v_2, d)$, то найдется конечный набор неперекрывающихся отрезков

$$\{I_i^{(1)} = [u_i^{(1)}, v_i^{(1)}]\}_{i=1}^{p_1}$$

с концами из множества $\tilde{Q}$ такой, что каждый отрезок $I_i^{(1)}$ содержится либо в J_1 , либо в J_3 ; в каждом из отрезков J_1 и J_3 содержится не менее двух отрезков $I_i^{(1)}$ и

$$\sum_{i=1}^{p_1} |f(v_i^{(1)}) - f(u_i^{(1)})| > 1.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по индукции. Пусть на k -м шаге построен конечный набор неперекрывающихся отрезков

$$\{I_i^{(k)} = [u_i^{(k)}, v_i^{(k)}]\}_{i=1}^{p_k}$$

с концами $u_i^{(k)}, v_i^{(k)} \in \tilde{Q}$. Опять разделим каждый отрезок $I_i^{(k)}$ на три равных отрезка $J_{i1}^{(k)}$, $J_{i2}^{(k)}$ и $J_{i3}^{(k)}$. Точки $u_i^{(k)}, v_i^{(k)}$ не изолированы с обеих сторон, поэтому в отрезках $J_{i1}^{(k)}$ и $J_{i3}^{(k)}$ содержится бесконечное число точек из $\tilde{Q}$. Поскольку функция f не является VBG -функцией на множествах $\tilde{Q} \cap J_{i1}^{(k)}$ и $\tilde{Q} \cap J_{i3}^{(k)}$, то найдется конечный набор неперекрывающихся отрезков

$$\{I_i^{(k+1)} = [u_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}]\}_{i=1}^{p_{k+1}}$$

с концами $u_i^{(k+1)}, v_i^{(k+1)} \in \tilde{Q}$ такой, что

- (i) каждый отрезок $I_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, p_{k+1}$, содержится в одном из отрезков $J_{j1}^{(k)}$, $J_{j3}^{(k)}$;
- (ii) в каждом из отрезков $J_{j1}^{(k)}$, $J_{j3}^{(k)}$, $j = 1, \dots, p_k$, содержится не менее двух отрезков $I_i^{(k+1)}$;
- (iii) каждая из точек $u_i^{(k)}, v_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, p_k$, является концом некоторого отрезка $I_j^{(k+1)}$;
- (iv) $\sum_{i: I_i^{(k+1)} \subset I_j^{(k)}} |f(v_i^{(k+1)}) - f(u_i^{(k+1)})| > k + 1$

(для VBG^* -функции f ее приращение на отрезках $I_i^{(k+1)}$ в свойстве (iv) заменяется на ее колебание на этих отрезках) и т.д. В итоге будет построено совершенное множество $N = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{p_k} I_i^{(k)}$. Так как по свойству (i)

$$\bigcup_{i=1}^{p_{k+1}} I_i^{(k+1)} \subset \bigcup_{i=1}^{p_k} (J_{i1}^{(k)} \cup J_{i3}^{(k)}),$$

а отрезки $J_{i1}^{(k)}, J_{i3}^{(k)}$ вложены в отрезки $J_{i1}^{(k-1)}, J_{i3}^{(k-1)}$, не пересекаются между собой и

$$|J_{i1}^{(k)}| = |J_{i3}^{(k)}| = \frac{1}{3}|I_i^{(k)}| \leq \frac{1}{3}|J_{i1}^{(k-1)}| = \frac{1}{3}|J_{i3}^{(k-1)}|,$$

то мера $\mu(N) = 0$. По построению множества N для каждой его точки среди всех отрезков $I_i^{(k)}$ найдется последовательность отрезков, стягивающихся в эту точку. По свойству (iii) их концы принадлежат множеству $\tilde{Q} \subset E$, поэтому каждая точка множества N является предельной для E . Так как E замкнуто, то $N \subset E$. Итак, множество N непусто, является совершенным подмножеством множества E и имеет меру нуль, поэтому по условию леммы функция f является VBG -функцией на нем. Тогда оно представимо в виде $N = \bigcup_{m=1}^{+\infty} N_m$, где f является VB -функцией на каждом множестве N_m . По теореме Бэра [21; гл. 2, § 3, теорема 2] найдется множество N_r , плотное в некоторой порции $N \cap (u, v)$. Тогда найдется отрезок $I_j^{(k_0)}$, содержащийся в (u, v) . Так как N_r плотно в $N \cap I_j^{(k_0)}$, то функция f является VB -функцией на множестве $N \cap I_j^{(k_0)}$ [6; гл. 7, § 4], [7; гл. 6, теорема 6.2]. С другой стороны, из свойства (iv) следует, что f не является VB -функцией на этом множестве, поскольку в силу структуры множества N и свойства (iii) концы отрезков $I_i^{(k)} \subset I_j^{(k_0)}$ принадлежат множеству $N \cap I_j^{(k_0)}$. Во избежание противоречия остается заключить, что множество Q пусто. Тогда $E = S$ и лемма доказана, поскольку уже было установлено, что f является VBG -функцией на множестве S .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вопрос о справедливости леммы 2 в отношении всех VBG -функций остается открытым.

Интересно также рассмотреть условия, аналогичные тем, что были изучены в лемме 2, применительно к классам функций ограниченной вариации VB и VB^* . Приводимая ниже лемма 3 показывает, что здесь ситуация по сравнению с VBG - и VBG^* -функциями сильно упрощается.

ЛЕММА 3. *Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является VB -функцией (соответственно VB^* -функцией) на множестве $E \subset [a, b]$ тогда и только тогда, когда она является VB -функцией (соответственно VB^* -функцией) на каждом множестве, представляющем собой монотонную последовательность точек множества E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество E конечно, то лемма очевидна, так как E всегда можно представить в виде неубывающей последовательности точек $x_1, x_2, \dots, x_n, x_n, \dots$, поэтому достаточно предполагать E бесконечным. Необходимость в этом случае очевидна. Докажем достаточность. Как и в лемме 2, подробное доказательство будет проведено для класса VB -функций. Предположим противное, т.е. что f не является VB -функцией на множестве E . Пусть $c = \inf E$, $d = \sup E$. Рассмотрим следующие случаи.

а) $c, d \in E$. Тогда существует конечный набор точек

$$c = u_1^{(0)} < v_1^{(0)} \leq u_2^{(0)} < v_2^{(0)} \leq \dots \leq u_{n_0}^{(0)} < v_{n_0}^{(0)} = d$$

из множества E такой, что

$$\sum_{i=1}^{n_0} |f(v_i^{(0)}) - f(u_i^{(0)})| > 1.$$

В силу сделанного предположения должен найтись отрезок $[u_{j_0}^{(0)}, v_{j_0}^{(0)}]$ такой, что f не является VB -функцией на множестве $[u_{j_0}^{(0)}, v_{j_0}^{(0)}] \cap E$. Дальнейшие рассуждения проведем по индукции. Пусть на k -м шаге найден отрезок $[u_{j_k}^{(k)}, v_{j_k}^{(k)}]$ с концами

$u_{j_k}^{(k)}, v_{j_k}^{(k)} \in E$ такой, что f не является VB -функцией на множестве $[u_{j_k}^{(k)}, v_{j_k}^{(k)}] \cap E$. Тогда опять существует конечный набор точек

$$u_{j_k}^{(k)} = u_1^{(k+1)} < v_1^{(k+1)} \leq u_2^{(k+1)} < v_2^{(k+1)} \leq \dots \leq u_{n_{k+1}}^{(k+1)} < v_{n_{k+1}}^{(k+1)} = v_{j_k}^{(k)}$$

из множества E такой, что

$$\sum_{i=1}^{n_{k+1}} |f(v_i^{(k+1)}) - f(u_i^{(k+1)})| > k + 2. \quad (1)$$

Опять найдется отрезок $[u_{j_{k+1}}^{(k+1)}, v_{j_{k+1}}^{(k+1)}]$ такой, что f не является VB -функцией на множестве $[u_{j_{k+1}}^{(k+1)}, v_{j_{k+1}}^{(k+1)}] \cap E$ и т.д. В результате будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[u_{j_k}^{(k)}, v_{j_k}^{(k)}]\}_{k=0}^{+\infty}$ с общей точкой u и счетное множество

$$S = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{u_i^{(k)}, v_i^{(k)}\}$$

точек из E . Оно является объединением множеств S_1 и S_2 , которые представляют собой монотонно возрастающую и монотонно убывающую последовательности, сходящиеся к u . Тогда по условию функция f является VB -функцией на S_1 и S_2 , а значит, и на S , что противоречит (1).

б) $c \notin E$, $d \in E$. Тогда опять существует конечный набор точек

$$c < u_1^{(0)} < v_1^{(0)} \leq u_2^{(0)} < v_2^{(0)} \leq \dots \leq u_{n_0}^{(0)} < v_{n_0}^{(0)} = d$$

из множества E такой, что

$$\sum_{i=1}^{n_0} |f(v_i^{(0)}) - f(u_i^{(0)})| > 1.$$

В силу сделанного предположения либо найдется отрезок $[u_{j_0}^{(0)}, v_{j_0}^{(0)}]$ такой, что f не является VB -функцией на множестве $[u_{j_0}^{(0)}, v_{j_0}^{(0)}] \cap E$, либо f не является VB -функцией на множестве $(c, u_1^{(0)}) \cap E$. Если выполнено первое, то, рассмотрев в качестве E множество $[u_{j_0}^{(0)}, v_{j_0}^{(0)}] \cap E$ и применив к нему рассуждения п. а), придем к противоречию. Если же выполнено второе, то к множеству $E_1 = (c, u_1^{(0)}) \cap E$ применим те же самые рассуждения, что и к E , и так далее по индукции. В результате либо найдутся такие k и j_k , что функция f не будет являться VB -функцией на множестве $[u_{j_k}^{(k)}, v_{j_k}^{(k)}] \cap E$, и тогда опять все сводится к противоречию, либо будут построены последовательность множеств $E_k = (c, u_1^{(k-1)}) \cap E$ и последовательность конечных наборов точек

$$c < u_1^{(k)} < v_1^{(k)} \leq \dots \leq u_{n_k}^{(k)} < v_{n_k}^{(k)} = u_1^{(k-1)}$$

из множества E_k таких, что функция f не будет являться VB -функцией на множествах E_k и

$$\sum_{i=1}^{n_k} |f(v_i^{(k)}) - f(u_i^{(k)})| > k + 1. \quad (2)$$

Тогда, рассмотрев множество

$$S = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{u_i^{(k)}, v_i^{(k)}\},$$

представляющее собой последовательность, монотонно убывающую к c , получим по условию, что f является VB -функцией на S , а это противоречит (2).

Случай $c \in E$, $d \notin E$ рассматривается аналогично п. б), а случай $c, d \notin E$ сводится к предыдущим за счет выбора точки $x \in (c, d) \cap E$ и рассмотрения множеств $(c, x] \cap E$ и $[x, d) \cap E$. Для VB^* -функции f ее приращение на отрезках $[u_i^{(k)}, v_i^{(k)}]$ следует всюду заменить на ее колебание на этих отрезках. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно заметить, что всякая монотонная последовательность, рассмотренная вместе со своим пределом, является частным случаем счетного замкнутого множества. При этом из определения 1 вытекает, что любая действительная функция, заданная на отрезке, является VBG^* -функцией на классе таких множеств, поэтому условия леммы 3, теряют всякий смысл при рассмотрении VBG - и VBG^* -функций. С этой точки зрения вполне естественной выглядит замена в лемме 2 класса всех счетных замкнутых множеств на класс всех совершенных множеств нулевой меры, т.е. малость в смысле мощности заменяется малостью в смысле меры при сохранении свойства замкнутости.

Следующий пример показывает, что для AC - и AC^* -функций аналог леммы 3 уже неверен.

ПРИМЕР. Пусть $\varkappa$ – лестница Кантора и $E = [0, 1]$. Так как $\varkappa$ не убывает и непрерывна, то, очевидно, она является AC^* -функцией на любой монотонной последовательности точек отрезка $[0, 1]$. С другой стороны, известно, что $\varkappa$ не является AC -функцией на $[0, 1]$ (классы AC^* и AC в этом случае совпадают, см. [6]).

Тем не менее, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является AC -функцией (соответственно AC^* -функцией) на множестве $E \subset [a, b]$ тогда и только тогда, когда она является AC -функцией (соответственно AC^* -функцией) на каждом не более, чем счетном подмножестве множества E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество E конечно, то предложение очевидно, поэтому можно предполагать E бесконечным. Необходимость в этом случае очевидна. Докажем достаточность. Предположим противное. Тогда найдется число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность конечных наборов точек $u_1^{(k)} < v_1^{(k)} \leq \dots \leq u_{n_k}^{(k)} < v_{n_k}^{(k)}$ из множества E суммарной длины $\sum_{i=1}^{n_k} (v_i^{(k)} - u_i^{(k)}) < 1/k$, для которых справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n_k} |f(v_i^{(k)}) - f(u_i^{(k)})| \geq \varepsilon_0 \left(\sum_{i=1}^{n_k} \omega(f, [u_i^{(k)}, v_i^{(k)}]) \geq \varepsilon_0 \right). \quad (3)$$

Рассмотрев счетное множество $S = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{u_i^{(k)}, v_i^{(k)}\}$, получим по условию, что f является AC -функцией (AC^* -функцией) на S , а это противоречит (3), и предложение доказано.

Перейдем теперь к аналогу леммы 2 для ACG - и ACG^* -функций, а заодно укажем еще один критерий для AC - и AC^* -функций.

ЛЕММА 4. *Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на замкнутом множестве $E \subset [a, b]$, является AC -функцией (соответственно AC^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на E тогда и только тогда, когда она является AC -функцией (соответственно AC^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на каждом замкнутом множестве $P \subset E$ нулевой меры, причем для ACG - и ACG^* -функций множества P достаточно брать совершенными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Аналогично леммам 2 и 3 подробное доказательство будет проведено для класса AC -функций. Для остальных классов оно полностью аналогично. Из условия леммы вытекает, что f является AC -функцией на всякой монотонной последовательности точек множества E . Поскольку всякая AC -функция является VB -функцией [6; гл. 7, § 5], [7; гл. 6, теорема 6.2], то из леммы 3 следует, что f является VB -функцией на всем множестве E . Далее пусть P – произвольное замкнутое подмножество множества E меры $\mu(P) = 0$. Тогда по условию леммы функция f является AC -функцией на множестве P . Значит, она обладает N -свойством Лузина на этом множестве [6; гл. 7, § 6, теорема 6.1], [7; гл. 6, теорема 6.12], поэтому образ каждого замкнутого множества меры нуль имеет меру нуль, т.е. f обладает N' -свойством на всем множестве E . Тогда по лемме 1 функция f обладает N -свойством Лузина на множестве E . Таким образом, f является непрерывной на E функцией из класса VB , обладающей N -свойством Лузина, поэтому по теореме Банаха–Зарецкого [6; гл. 7, § 6, теорема 6.7], [7; гл. 6, теорема 6.16] f является AC -функцией на множестве E . Для ACG - и ACG^* -функций необходимо вместо леммы 3 воспользоваться леммой 2. В этом случае возможность замены класса всех замкнутых множеств меры нуль на класс всех совершенных множеств меры нуль вытекает из теоремы Кантора–Бендиксона и того, что всякая действительзначная функция, непрерывная на не более, чем счетном множестве, является ACG^* -функцией на этом множестве.

Результаты, аналогичные леммам 2 и 4, в отношении ACG -, ACG^* -, VBG - и VBG^* -функций были получены Эне в работах [22; теорема 5], [23; лемма 2.12.5], [24; лемма 5] и [25; лемма 3.1]. Однако на класс множеств P им накладывались более сильные требования, а именно, для ACG^* -, ACG - и VBG -функций рассматривались все множества меры нуль, а для VBG^* -функций – все G_δ -множества меры нуль. Таким образом, леммы 2 и 4 усиливают вышеприведенные результаты в том направлении, что в качестве P достаточно рассматривать лишь совершенные множества меры нуль. Необходимо еще отметить, что в случае, когда речь идет о VBG^* -функциях, лемма 2 вытекает из результатов Томсона [16; теорема 1] и [26; гл. 4, § 40, теорема 40.1], но при дополнительном требовании ограниченности функции f на множестве E . Приведенное здесь доказательство показывает, что данное требование излишне.

3. Следствия полученных результатов, касающиеся вариационных мер.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть заданы функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и F_σ -множество $E \subset [a, b]$. Тогда если вариационная мера $V(F, \cdot)$ σ -конечна на каждом компактном множестве $P \subset E$ меры $\mu(P) = 0$, то она является полуумеренной мерой на всем множестве E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество E представимо в виде $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$, где множества E_m замкнуты. Пусть P – произвольное компактное подмножество множества E меры $\mu(P) = 0$. По условию вариационная мера $V(F, \cdot)$ σ -конечна на множестве P , а следовательно, и на множествах $P \cap E_m$. Это означает, что f является VBG^* -функцией на каждом множестве $P \cap E_m$ и ограничена в некоторой окрестности каждой точки множества P [26; гл. 4, § 40, теорема 40.1], [27; теорема 3]. Отсюда в силу произвольности выбора P вытекает, что f ограничена в некоторой окрестности каждой точки множества E . Поскольку множества $P \cap E_m$ замкнуты, имеют меру нуль и множество P выбрано произвольным образом, то из леммы 2 следует, что функция f является VBG^* -функцией на каждом множестве E_m . Это означает, что справедливо представление $E_m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{mn}$, причем f является VB^* -функцией на всех множествах E_{mn} . Следовательно, f является VB^* -функцией на замыканиях $\bar{E}_{mn}$ [6; гл. 7, § 7, теорема 7.1], [7; гл. 6, теорема 6.2]. В [27; теорема 1] показано, что этого достаточно для конечности вариационных мер $V(F, \bar{E}_{mn})$. Так как множества E_m замкнуты, то $\bar{E}_{mn} \subset E_m$, поэтому $E = \bigcup_{m,n=1}^{+\infty} \bar{E}_{mn}$, и следствие доказано.

Следствие 1 усиливает результат [12; теорема 13], а также результат [16; теорема 1], рассмотренный только для аддитивных функций $F(I)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть заданы F_σ -множество $E \subset [a, b]$ и функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на E . Тогда если аппроксимативная вариационная мера $V_{\text{ap}}(F, \cdot)$ конечна на каждом множестве $Z \subset E$ нулевой меры, то она является полуумеренной мерой на всем множестве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество E представимо в виде $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E_m$, где множества E_m замкнуты. Пусть Z – произвольное подмножество множества E меры $\mu(Z) = 0$. По условию аппроксимативная вариационная мера $V_{\text{ap}}(F, \cdot)$ конечна на Z , а следовательно, и на множествах $Z \cap E_m$. Тогда функция f является VBG -функцией на каждом множестве $Z \cap E_m$ [28; теорема 2]. Поскольку множества $Z \cap E_m$ имеют меру нуль и множество Z выбрано произвольным образом, то из леммы 2 следует, что функция f является VBG -функцией на каждом множестве E_m . Это означает, что справедливо представление $E_m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{mn}$, причем f является VB -функцией на всех множествах E_{mn} , поэтому она является VB -функцией на замыканиях $\bar{E}_{mn}$ [6; гл. 7, § 4], [7; гл. 6, теорема 6.2]. Рассмотрим множество P_{mn} точек плотности множества $\bar{E}_{mn}$. Каждой точке $x \in \bar{E}_{mn} \cap P_{mn}$ поставим в соответствие множество $\mathcal{S}(x) = \bar{E}_{mn} \cap P_{mn}$. Тогда у всякого $\mathcal{S}$ -разбиения $\mathcal{P} = \{(x_j, [u_j, v_j])\}_{j=1}^p$ на множестве $\bar{E}_{mn} \cap P_{mn}$ точки u_j, v_j принадлежат этому же множеству, поэтому

$$V_{\text{ap}}(F, \bar{E}_{mn} \cap P_{mn}) \leq \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^p |f(v_j) - f(u_j)| \leq \mathcal{V}(f, \bar{E}_{mn} \cap P_{mn}) < +\infty. \quad (4)$$

Поскольку $\mu(\bar{E}_{mn} \setminus P_{mn}) = 0$ [6; гл. 4, § 10, теорема 10.2], [10; гл. 9, § 6, теорема 1], то из условия вытекает конечность аппроксимативной вариационной меры $V_{\text{ap}}(F, \bar{E}_{mn} \setminus P_{mn})$. Тогда неравенство (4) влечет конечность аппроксимативной вариационной меры $V_{\text{ap}}(F, \bar{E}_{mn})$. Так как множества E_m замкнуты, то $\bar{E}_{mn} \subset E_m$, поэтому $E = \bigcup_{m,n=1}^{+\infty} \bar{E}_{mn}$, и следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Абсолютно непрерывная на F_σ -множестве $E \subset [a, b]$ аппроксимативная вариационная мера $V_{\text{ap}}(F, \cdot)$, порожденная непрерывной на E функцией $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, является полуумеренной мерой на этом множестве.

Следствие 2 усиливает результат [28; теорема 5] в отношении F_σ -множеств E и непрерывных функций f на нем, а следствие 3 является аналогом результата [12; теорема 13] для аппроксимативных вариационных мер. Из леммы 4 вытекает также следующая характеристика абсолютно непрерывных вариационных мер.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Вариационная мера $V(F, \cdot)$, порожденная функцией $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, абсолютно непрерывна на F_σ -множестве $E \subset [a, b]$ тогда и только тогда, когда $V(F, P) = 0$ для каждого совершенного множества $P \subset E$ меры $\mu(P) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидным образом вытекает из леммы 4, а также из известного факта о том, что вариационная мера $V(F, \cdot)$ абсолютно непрерывна на замкнутом подмножестве отрезка $[a, b]$ тогда и только тогда, когда функция f является ACG^* -функцией на этом множестве [13], [22].

4. Основная теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывная на непустом замкнутом множестве $E \subset [a, b]$, являлась VBG -функцией (соответственно VBG^* -функцией, ACG -функцией, ACG^* -функцией) на этом множестве необходимо и достаточно, чтобы каждое непустое совершенное множество $P \subset E$ меры $\mu(P) = 0$ содержало порцию, на которой f есть VB -функция (соответственно VB^* -функция, AC -функция, AC^* -функция), причем требование непрерывности в отношении VBG^* -функций можно отбросить.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 2, доказательство будет проведено для VBG -функций. Для остальных классов функций оно полностью аналогично и вытекает из уже приведенных утверждений. Необходимость, очевидно, вытекает из теоремы 1. Докажем достаточность. Пусть P – произвольное непустое совершенное подмножество множества E меры $\mu(P) = 0$. По условию каждое непустое совершенное подмножество множества P содержит порцию, на которой f является VB -функцией. Тогда по теореме 1 функция f является VBG -функцией на множестве P . Тогда в силу произвольности выбора P по лемме 2 функция f является VBG -функцией на множестве E (для ACG - и ACG^* -функций нужно вместо леммы 2 использовать лемму 4) и теорема доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение первоначального варианта данной работы и обнаруженные в нем ошибки, опечатки и неточности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Lusin, “Sur les propriétés de l’intégrale de M. Denjoy”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **155** (1912), 1475–1477.
- [2] Н. Н. Лузин, *Интеграл и тригонометрический ряд*, ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1951.
- [3] A. Denjoy, “Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non-sommables”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **33** (1916), 127–222; **34** (1917), 181–238.
- [4] A. Khintchine, “Sur une extension de l’intégrale de M. Denjoy”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **162** (1916), 287–291.
- [5] А. Хинчин, “О процессе интегрирования Denjoy”, *Матем. сб.*, **30**:4 (1916), 543–557.
- [6] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал, М., 2004.

- [7] R. Gordon, “The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock”, *Graduate Studies in Mathematics*, v. 4, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1994.
- [8] J. Foran, “A note on Lusin’s condition (N)”, *Fund. Math.*, **90**:2 (1976), 181–186.
- [9] B. S. Thomson, “Derivation bases on the real line, I”, *Real Anal. Exchange*, **8**:1 (1982/83), 67–207.
- [10] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Лань, СПб, 1999.
- [11] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, т. 1, 2, R&C Dynamics, Москва–Ижевск, 2003.
- [12] W. F. Pfeffer, “The Lebesgue and Denjoy–Perron integrals from a descriptive point of view”, *Ricerche Mat.*, **48**:2 (1999), 211–223.
- [13] B. Bongiorno, L. Di Piazza, V. A. Skvortsov, “A new full descriptive characterization of Denjoy–Perron integral”, *Real Anal. Exchange*, **21**:2 (1995/96), 656–663.
- [14] W. F. Pfeffer, “On variations of functions of one real variable”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **38**:1 (1997), 61–71.
- [15] В. А. Скворцов, “Вариационная мера и достаточное условие дифференцируемости аддитивной функции интервала”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1997, № 2, 55–57.
- [16] B. S. Thomson, “Some properties of variational measures”, *Real Anal. Exchange*, **24**:2 (1998/99), 845–853.
- [17] В. А. Скворцов, “О кратном интеграле Перрона”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2000, № 2, 11–14.
- [18] B. Bongiorno, L. Di Piazza, V. A. Skvortsov, “On variational measures related to some bases”, *J. Math. Anal. Appl.*, **250**:2 (2000), 533–547.
- [19] L. Di Piazza, “Variational measures in the theory of the integration in $\mathbb{R}^m$ ”, *Czechoslovak Math. J.*, **51**:126 (2001), 95–110.
- [20] V. A. Skvortsov, Y. Zherybyov, “On classes of functions generating absolutely continuous variational measures”, *Real Anal. Exchange*, **30**:1 (2004/05), 361–372.
- [21] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, М., 2004.
- [22] V. Ene, “Characterizations of $AC^*G \cap \mathcal{C}$, $\underline{AC}^* \cap \mathcal{C}_i$, AC and $\underline{AC}$ functions”, *Real Anal. Exchange*, **19**:2 (1993/94), 491–509.
- [23] V. Ene, “Real Functions – Current Topics”, *Lect. Notes in Math.*, v. 1603, Springer-Verlag, 1995.
- [24] V. Ene, “Characterizations of $VBG \cap (N)$ ”, *Real Anal. Exchange*, **23**:2 (1997/98), 611–630.
- [25] V. Ene, “Thomson’s variational measure and nonabsolutely convergent integrals”, *Real Anal. Exchange*, **26**:1 (2000/01), 35–49.
- [26] B. S. Thomson, “Real Functions”, *Lect. Notes in Math*, v. 1170, Springer-Verlag, 1985.
- [27] Ю. А. Жеребьёв, “ VBG_q^* -функции и σ -конечные вариационные меры”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 6, 17–22.
- [28] П. Своровски, В. А. Скворцов, “О вариационной мере, определяемой аппроксимативным дифференциальным базисом”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2002, № 1, 54–57.

Ю. А. Жеребьёв

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: yura@zheryby.mccme.ru

Поступило

19.01.2006

Исправленный вариант

29.05.2006