Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карагулян, Экспоненциальные оценки оператора
Кальдерона–Зигмунда и смежные вопросы рядов Фурье,
Матем. заметки, 2002, том 71, выпуск 3, 398–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:42:44

УДК 517

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ОПЕРАТОРА КАЛЬДЕРОНА–ЗИГМУНДА И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ РЯДОВ ФУРЬЕ

Г. А. Карагулян

В работе изучаются свойства максимального оператора, порожденного оператором Кальдерона–Зигмунда. Получено, в частности, уточнение одного неравенства Ханта. Библиография: 11 названий.

Рассматривается линейный оператор T_α , $\alpha > 0$, определенный для функций $f \in L(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$T_\alpha f(x) = \int_{|y-x|>\alpha} K(x, y) f(y) dy,$$

где ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n}, \quad (1)$$

$$|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \frac{|x - x'|^\beta}{|x - y|^{n+\beta}}, \quad |x - x'| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \quad (2)$$

$$|K(x, y) - K(x, y')| \leq C \frac{|y - y'|^\beta}{|x - y|^{n+\beta}}, \quad |y - y'| \leq \frac{1}{2}|x - y|. \quad (3)$$

Оператор Кальдерона–Зигмунда Tf определяется как предел

$$Tf(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} T_\alpha f(x).$$

Как установили Кальдерон, Зигмунд и Котляр [1], [2], этот оператор имеет слабый тип $(1, 1)$ и, более того, для максимального оператора

$$T_* f(x) = \sup_{\alpha > 0} |T_\alpha f(x)| \quad (4)$$

имеем

$$|\{x : |T_* f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c_n}{\lambda} \|f\|_{L^1}, \quad (5)$$

где c_n зависит от размерности и от оператора T . Частным случаем оператора Кальдерона–Зигмунда является преобразование Гильберта $Hf(x)$. Аналогом оператора Гильберта на окружности является оператор сопряженной функции $\tilde{f}$ ($f \in L(\mathbb{T})$). Аналогично (4) обозначим

$$\tilde{f}_*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\pi} \left| \int_{|y-x| > \varepsilon} f(y) \operatorname{ctg} \left(\frac{y-x}{2} \right) dy \right|.$$

Если $f \in L(\mathbb{R}^n)$, то обозначим

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(t)| dt, \quad (6)$$

$$f^\#(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f - f_B|, \quad f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f, \quad (7)$$

где B – n -мерный шар. Здесь (6) есть максимальная функция Харди–Литтлвуда, а функция (7) введена Фейфферманом и Стейном [3]; с ее помощью можно определить важное в анализе пространство BMO как пространство функций f с условием $f^\# \in L^\infty$.

Задача оценки $Tf(x)$ с помощью максимального оператора (6) является одной из важных задач в теории сингулярных интегралов и рассматривалась многими авторами (Буркгольдер, Койфман, Ганди, Ч.Фейфферман, Стейн, Хант и др.). Подробно об этих вопросах см. в обзорной статье Дынькина [4].

Классическая теорема Зигмунда [5] утверждает, что для любой функции $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{T}} \exp \left(c_1 \frac{|\tilde{f}|}{\|f\|_\infty} \right) \leq c_2. \quad (8)$$

В 1972 г. Хант [6] установил более общее неравенство, а именно, для любой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$|\{x : |\tilde{f}(x)| > \lambda, Mf(x) < s\}| \leq c_1 \exp \left(-c_2 \frac{\lambda}{s} \right), \quad (9)$$

где $|\Omega|$ – мера Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{T}$. Мы доказываем, что справедливы следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют положительные постоянные $c_{n,T}$, $b_{n,T}$, $d_{n,T}$, зависящие от n и T , такие, что для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ выполнена оценка*

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_* f(x)}{Mf(x)} > \lambda, T_* f(x) > s \right\} \right| < \frac{d_{n,T} \|f\|_{L^1}}{s} \exp(-c_{n,T} \lambda) \quad (10)$$

при $\lambda > b_{n,T}$ и $s > 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $f \in L(\mathbb{R}^n)$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ есть некоторый шар, то для любого $\lambda > 1$*

$$\left| \left\{ x \in B : \frac{|f(x) - f_B|}{f^\#(x)} > \lambda \right\} \right| \leq c|B| \exp(-c_n \lambda). \quad (11)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ с $\text{supp } f \subset B$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ есть некоторый шар, имеет место неравенство

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_* f(x)}{Mf(x)} > \lambda \right\} \right| < c|B| \exp(-c_{n,T} \lambda) \quad (12)$$

при любом $\lambda > b_{n,T}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $f \in L(\mathbb{T})$, то

$$\int_{\mathbb{T}} \exp \left(c_1 \frac{\tilde{f}_*(x)}{Mf(x)} \right) dx < c_2, \quad (13)$$

где c_1 и c_2 – абсолютные постоянные.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любой $f \in L(\mathbb{T})$ существует функция $\varphi(x) > 0$, $x \in \mathbb{T}$, со свойством

$$|\{x \in \mathbb{T} : \varphi(x) > \lambda\}| < c \exp(-c_n \lambda), \quad \lambda > 1,$$

такая, что

$$\tilde{f}_*(x) \leq \varphi(x) Mf(x), \quad x \in \mathbb{T}. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что неравенство (9) следует из (12). При этом даже для случая $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ неравенство (12) сильнее, чем (8), так как отношение $Mf(x)/\|f\|_\infty$ может быть близко к нулю на множестве большой меры. Такое случится, если $\text{supp } f$ имеет малую меру. Заметим, что во всех неравенствах экспоненциальную функцию нельзя заменить на функцию, растущую быстрее, чем $\exp(ct)$, даже если $f \in L^\infty$. Соответствующим примером в одномерном случае может служить характеристическая функция интервала, и это легко проверить. Условие $T_* f(x) > s$ в (10) не может быть отброшено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что неравенство (9) доказывается в [6] методом Кальдерона–Зигмунда разложения функции $f = g + b$, где $g \in L^\infty$, а $\text{supp } b$ имеет малую меру. Далее для функции g применяется неравенство Зигмунда (8), а для $\tilde{b}$ устанавливается экспоненциальная оценка вне $\text{supp } b$. Такой подход неприменим для доказательства неравенства (10), так как функции g и b должны зависеть от параметра s из неравенства (9) и нам придется иметь дело с целым семейством таких разложений. При доказательстве (10) не используется также неравенство Зигмунда. По существу мы даем новые доказательства неравенств (8) и (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 2 является обобщением теоремы Джона–Ниренберга [7], которая утверждает то же самое при дополнительном условии $f^\#(x) \leq M$, т.е. $f \in BMO$. При этом надо отметить, что в доказательстве теоремы 2 повторяются рассуждения Джона и Ниренберга.

Из полученных неравенств можно получить ряд следствий для тригонометрических рядов Фурье. Пусть $f \in L(\mathbb{T})$ – некоторая функция. Обозначим через

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \text{и} \quad \tilde{\sigma}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx$$

соответственно ряд Фурье и сопряженный ряд Фурье функции f . Через $S_n(x, f)$ и $\tilde{S}_n(x, f)$ обозначим частичные суммы этих рядов.

Зигмунд [5] установил, что если $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f)|}{\|f\|_\infty}\right) &\leq c_2, \quad \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|\tilde{S}_n(x, f)|}{\|f\|_\infty}\right) \leq c_2, \\ \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{\|f\|_\infty}\right) &\rightarrow 1, \quad \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|\tilde{S}_n(x, f) - \tilde{f}(x)|}{\|f\|_\infty}\right) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (15)$$

при некоторых абсолютных постоянных c_1 и c_2 .

Результат аналогичного характера для функций $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, был установлен Риссом [8]. Этот результат состоит в том, что для таких функций f

$$\begin{aligned} \|S_n(x, f)\|_p &\leq c_p \|f\|_p, \quad \|\tilde{S}_n(x, f)\|_p \leq c_p \|f\|_p, \\ \|S_n(x, f) - f(x)\|_p &\rightarrow 0, \quad \|\tilde{S}_n(x, f) - \tilde{f}(x)\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, как известно [9, с. 294], существует функция $f \in L^1(\mathbb{T})$, для которой

$$\|S_n(x, f)\|_{L^1} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тем не менее, оказывается, что ряд Фурье любой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ сходится в некотором пространстве $L_w^1(T)$ с весом $w(x) > 0$, $x \in \mathbb{T}$, причем w зависит от функции f . Более того, возможно обобщение утверждений (15) и (16) для функций из $L^1(\mathbb{T})$. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 6. *Для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ имеем*

$$\int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f)|}{Mf(x)}\right) dx < c_2, \quad \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|\tilde{S}_n(x, f)|}{Mf(x)}\right) dx < c_2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{Mf(x)}\right) dx &\rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \\ \int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|\tilde{S}_n(x, f) - f(x)|}{Mf(x)}\right) dx &\rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где c_1 и c_2 — абсолютные постоянные.

Из этой теоремы очевидно следуют оценки (15) и (16) и, более того, даже если $f \in L^\infty$, в ней содержится уточнение, а именно везде $\|f\|_\infty$ можно заменить на $Mf(x)$.

Введем определение множителя сходимости в L^p для произвольного функционального ряда. Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_n(x), \quad x \in (a, b), \quad (19)$$

есть некоторый функциональный ряд, определенный на интервале (a, b) . Неотрицательную функцию $w(x) \geq 0$ назовем *множителем сходимости* в L^p ($p > 0$) для ряда (19),

если этот ряд сходится в пространстве с весом $L_w^p(a, b)$, т.е. для его частичных сумм $S_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_a^b |S_n(x) - f(x)|^p w(x) dx \rightarrow 0$$

для некоторой функции $f \in L_w^p(a, b)$. Далее, $w(x)$ назовем *множителем ограниченности* в L^p , если

$$\int_a^b |S_n(x)|^p w(x) dx \leq C, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из теоремы 6 очевидно следует

СЛЕДСТВИЕ 7. Если $f(x) \in L^1(\mathbb{T})$, то функция $w(x) = (Mf(x))^{-p}$ является множителем сходимости в L^p для рядов $\sigma(f)$ и $\tilde{\sigma}(f)$ для любого $p > 0$.

Прежде чем перейти к доказательствам, введем несколько обозначений. Для фиксированного шара B определим

$$M_B f = \sup_{B' \supset B} \frac{1}{|B'|} \int_{B'} |f(t)| dt, \quad (20)$$

где B' – также n -мерный шар. Через $B(x, r)$ обозначим замкнутый шар с центром $x \in \mathbb{R}^n$ и радиусом r . Если $t > 0$ – некоторое число, то обозначим через tB шар с центром x и радиусом tr . Если $f(x)$ – некоторая функция из $L^0(\mathbb{R}^n)$, а $E \subset \mathbb{R}^n$, то обозначим

$$OSC_E f = \sup_{x, x' \in E} |f(x) - f(x')|.$$

Далее, пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, а $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ – некоторый шар. Тогда для любых x, x' имеем

$$\left| \int_{|y-x_0|>2r} (K(x, y) - K(x', y)) f(y) dy \right| \leq \gamma_n M_B f. \quad (21)$$

Это неравенство является одним из основных свойств операторов Гильберта и Кальдерона–Зигмунда и используется в доказательствах многих теорем. С учетом (3) интеграл в (21) оценивается следующей величиной:

$$\int_{|y-x_0|>2r} \frac{|x-x'|^\alpha}{|y-x_0|^{n+\alpha}} f(y) dy \leq C r^\alpha \int_{|y-x_0|>2r} \frac{f(y)}{|y-x_0|^{n+\alpha}} dy \leq C_n M_B f,$$

так как последний интеграл можно рассматривать как сумму средних значений по шарам, содержащим $2B$. Неравенство (21) будем использовать в доказательстве теоремы 1.

В дальнейшем обозначим через $\alpha_n, \beta_n, \dots$ постоянные, зависящие от размерности n , а в некоторых местах они могут зависеть также от оператора T .

Нам понадобится следующая лемма Безикевича.

ЛЕММА 1 [10, с. 13]. Пусть A – некоторое множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть для каждого $x \in A$ задан замкнутый шар $B(x)$ с центром в x , причем $|B(x)| < d$, $x \in A$. Тогда из данных шаров $\{B(x)\}_{x \in A}$ можно выбрать такую последовательность $\{B_k\}$ (быть может конечную), что

$$A \subset \bigcup B_k, \quad \sum \chi_{B_k}(x) \leq \beta_n.$$

ЛЕММА 2. Пусть $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ – некоторый шар или $B = \mathbb{R}^n$, а $E \subset B$ есть измеримое множество конечной меры с мерой $|E| < \frac{1}{2}|B|$ (при $B \neq \mathbb{R}^n$). Тогда существует семейство шаров $\{B_k\}$ такое, что

$$\left| E \setminus \bigcup_k B_k \right| = 0, \quad (22)$$

$$\sum_k \chi_{B_k}(x) \leq \theta_n \quad (23)$$

$$\sum_k |B_k| \leq \theta_n |E|, \quad (24)$$

$$\forall k \quad |B_k \cap (B \setminus E)| \geq \alpha_n |B_k|, \quad (25)$$

где θ_n и $0 < \alpha_n < 1$ – числа, зависящие только от размерности n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Лебега для п.в. $x \in E$ существует шар $B(x, r_x)$ такой, что $|B(x, r_x) \cap E| > \frac{1}{2}|B(x, r_x)|$, откуда следует $|B(x, r_x) \cap E| > |B(x, r_x) \cap (B \setminus E)|$. С другой стороны, из условия $|E| < \frac{1}{2}|B|$ при $B \neq \mathbb{R}^n$ следует $B \subset B(x, 2r)$ при любом $x \in B$ и, следовательно,

$$|B(x, 2r) \cap E| = |E| < \frac{1}{2}|B| < |B \setminus E| = |B(x, 2r) \cap (B \setminus E)|.$$

Если же $B = \mathbb{R}^n$, то последнее неравенство будет иметь место, если вместо r возьмем достаточно большое число. Отсюда из соображений непрерывности существует $t_x > r_x$ такое, что

$$|B(x, t_x) \cap E| = |B(x, t_x) \cap (B \setminus E)|,$$

причем каждая из этих величин больше $\gamma_n |B(x, t_x)|$. Последнее легко следует из геометрических соображений. Очевидно, что $|B(x, t_x)| \leq (1/\gamma_n) |E|$, и поэтому, используя лемму Безиковича, из семейства шаров $\{B(x, t_x)\}$ можно выбрать последовательность $\{B_k\}$, для которой имеем (22)–(25), причем (25) следует из неравенств

$$\sum_k |B_k| < \frac{1}{\gamma_n} \sum_k |B_k \cap E| = \frac{1}{\gamma_n} |E|.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ – некоторый шар, а $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда для любого $\lambda > 1$ существует измеримое множество $E \subset B$ такое, что

$$|E| < \frac{1}{\lambda} |B|, \quad (26)$$

$$OSC_{B \setminus E} T_* f \leq \beta_n \lambda M_B f, \quad (27)$$

где β_n зависит от n и T , а величина $M_B f$ определена в (20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки слабого типа (см. (5)) легко следует неравенство

$$|\{x \in B : T_*(f\chi_{4B})(x) > \lambda M_B f\}| \leq \frac{c_n}{\lambda} |B|$$

при любом $\lambda > 0$. Отсюда, обозначив

$$E = \{x \in B : T_*(f\chi_{4B})(x) > c_n \lambda M_B f\},$$

с помощью (20) имеем (26), а также неравенство

$$T_*(f\chi_{4B})(x) \leq c_n \lambda M_B f, \quad x \in B \setminus E. \quad (28)$$

Пусть теперь $x, x' \in B \setminus E$ и $T_* f(x) \geq T_* f(x')$. Имеем

$$T_* f(x) - T_* f(x') \leq 2(T_\alpha f(x) - T_\alpha f(x')) \quad (29)$$

для некоторого числа $\alpha > 0$. Обозначим

$$A = \inf\{t \geq 0 : B(x, \alpha) \cup B(x', \alpha) \subset B(x_0, t)\},$$

$$a = \sup\{t \geq 0 : B(x, \alpha) \cap B(x', \alpha) \supset B(x_0, t)\}.$$

Если последнее множество пусто, то полагаем $a = 0$.

Рассмотрим следующие два случая.

При $A < 4r$ из (28) и (21) имеем

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) - T_\alpha f(x') &\leq \left| \int_{|y-x_0| > 4r} (K(x, y) - K(x', y)) f(y) dy \right| \\ &\quad + T_*(f\chi_{4B})(x) + T_*(f\chi_{4B})(x') \\ &\leq b_n \lambda M_B f. \end{aligned} \quad (30)$$

Если же $A \geq 4r$, то из геометрических соображений легко следует, что в этом случае $a > \frac{1}{3}A > \frac{4}{3}r$. Отсюда имеем (см. (1) и (30))

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) - T_\alpha f(x') &\leq \left| \int_{|y-x_0| > A} (K(x, y) - K(x', y)) f(y) dy \right| \\ &\quad + \int_{A \geq |y-x_0| > a} (|K(x, y)| + |K(x', y)|) |f(y)| dy \\ &\leq \gamma_n M_B f + d_n \int_{A \geq |y-x_0| \geq a} \frac{|f(y)|}{|y-x_0|^n} dy \\ &\leq \gamma_n M_B f + d'_n \frac{1}{a^n} \int_{|y-x_0| \leq A} |f(y)| dy \leq g_n M_B f. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (29), (30) и (31) следует (27). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначив

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : T_* f(x) > \frac{s}{2} \right\}, \quad (32)$$

из (5) находим, что

$$|E| < \frac{2c_n}{s} \|f\|_{L^1}, \quad (33)$$

$$T_* f(x) < \frac{s}{2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus E. \quad (34)$$

Применим лемму 2 для $B = \mathbb{R}^n$ и множества $E \subset B$. Тогда получим семейство шаров $\{B_k^1\}$ такое, что

$$\begin{aligned} |E \setminus \cup_k B_k^1| &= 0, \quad \sum_k |B_k^1| \leq \theta_n |E|, \quad \sum_k \chi_{B_k^1}(x) \leq \theta_n, \\ \forall k \quad |B_k^1 \cap (B \setminus E)| &\geq \alpha_n |B_k^1|. \end{aligned}$$

Далее, используя лемму 3, в каждом B_k^1 найдем множество $E_k^1 \subset B_k^1$ такое, что

$$|E_k^1| < \min\left(\frac{1}{2\theta_n^2}, \alpha_n\right) |B_k^1|, \quad OSC_{B_k^1 \setminus E_k^1} T_* f \leq \xi_n M_{B_k^1} f.$$

Еще раз применив леммы 2 и 3 по очереди, получим шары $\{B_k^2\}$ и множества $\{E_k^2\}$, $E_k^2 \subset B_k^2$, с соответствующими свойствами. Продолжив этот процесс до бесконечности, на шаге t для каждого B_t^{m-1} определяются семейство шаров $\{B_k^m\}_{k \in Q_t^m}$ и семейство множеств $\{E_k^m \subset B_k^m\}_{k \in Q_t^m}$ со следующими свойствами:

$$|E_k^m| < \min\left(\frac{1}{2\theta_n^2}, \alpha_n\right) |B_k^m|, \quad (35)$$

$$OSC_{B_k^m \setminus E_k^m} T_* f \leq \xi_n M_{B_k^m} f, \quad (36)$$

$$\left| E_t^{m-1} \setminus \bigcup_{k \in Q_t^m} B_k^m \right| = 0, \quad (37)$$

$$\sum_k |B_k^m| \leq \theta_n \sum_t |E_t^{m-1}|, \quad (38)$$

$$\sum_k \chi_{B_k^m}(x) \leq \theta_n, \quad (39)$$

$$|B_k^m \cap (B_t^{m-1} \setminus E_t^{m-1})| > \alpha_n |B_k^m|, \quad k \in Q_t^m. \quad (40)$$

Используя неравенства (35), (38) и (39), получаем

$$\left| \bigcup_k E_k^m \right| \leq \sum_k |E_k^m| \leq \frac{1}{2\theta_n^2} \sum_k |B_k^m| \leq \frac{1}{2\theta_n} \sum_t |E_t^{m-1}| \leq \frac{1}{2} \left| \bigcup_t E_t^{m-1} \right|$$

(при $m = 1$ вместо $\bigcup_t E_t^{m-1}$ полагается E). Отсюда, имея в виду (33), находим

$$\left| \sum_k E_k^m \right| \leq \frac{1}{2^m} |E| \leq \frac{2c}{s2^m} \|f\|_{L^1}. \quad (41)$$

Далее, учитывая (38), имеем $|B_k^m| \leq \theta_n/2^m$ и, следовательно, если радиус шара B_k^m равен r_k^m , то

$$r_k^m \leq \frac{\omega_n}{2^{m/n}}. \quad (42)$$

И поэтому, если шар B_k^p "порожден B_t^q ($p > q$) через несколько шагов", то из неравенства (42) следует, что

$$B_k^p \subset \gamma_n B_t^q, \quad \gamma_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_n}{2^{m/n}}. \quad (43)$$

Из неравенств (35) и (40) вытекает, что

$$(B_t^{m-1} \setminus E_t^{m-1}) \cap (B_k^m \setminus E_k^m) \neq \emptyset, \quad k \in Q_t^m. \quad (44)$$

Пусть теперь

$$x \in \left(\bigcup_k B_k^1 \right) \setminus \left(\bigcup_k E_k^m \right)$$

– любая точка. Легко проверить, что x содержится в некотором множестве $B_k^p \setminus E_k^p$, $p = 1, 2, \dots, m$. Из (43) имеем

$$x \in \bigcap_{i=1}^p \gamma_n B_{k_i}^i. \quad (45)$$

Из (44) следует, что существуют точки t_l , $l = 1, 2, \dots, p$, такие, что

$$t_i \in (B_{k_i}^i \setminus E_{k_i}^i) \cap (B_{k_{i-1}}^{i-1} \setminus (E_{k_{i-1}}^{i-1})), \quad i = 2, 3, \dots, p, \quad t_1 \in (B_{k_1}^1 \setminus E_{k_1}^1) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E),$$

и, следовательно, из (36) и (34) получим

$$\begin{aligned} |T_* f(x) - T_* f(t_p)| &\leq \xi_n M_{B_{k_p}^p} f, \\ |T_* f(t_i) - T_* f(t_{i-1})| &\leq \xi_n M_{B_{k_{i-1}}^{i-1}} f, \quad i = 2, 3, \dots, p, \quad T_* f(t_1) \leq \frac{s}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Складывая эти неравенства, с учетом (38), (41) и (45) получаем

$$|T_* f(x) - T_* f(t_1)| \leq \xi_n \sum_{i=0}^p M_{B_{k_i}^i} f \leq \xi'_n \sum_{i=0}^p M_{\gamma_n B_{k_i}^i} f \leq \xi'_n p M f(x) \leq \xi'_n m M f(x)$$

при $x \in \bigcup_k B_k^1 \setminus \bigcup_k E_k^m$. Объединив последнее с (41), с учетом (46) получаем

$$\left| \left\{ x \in \bigcup_k B_k^1 : \frac{T_* f(x)}{M f(x)} > 2\xi'_n m, \quad T_* f(x) > s \right\} \right| \leq \frac{2c \|f\|_{L^1}}{s2^m}.$$

Если же $x \notin \bigcup_k B_k^1$, то имеем (34). Так как $m \in \mathbb{N}$ произвольно, отсюда следует (10). Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся леммой Кальдерона–Зигмунда (см. [11, с. 242]).

ЛЕММА 4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ – некоторый шар, $u \in L^1(B)$ и

$$\alpha > \frac{1}{|B|} \int_B u \, dt.$$

Тогда существует последовательность шаров $\{B_k\}$ такая, что

$$|u| \leq \alpha \quad \text{п.в. в } B \setminus \bigcup_k B_k, \quad (47)$$

$$a_n \alpha \leq \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |u| \, dt \leq A_n \alpha, \quad (48)$$

$$\sum_k |B_k| \leq \frac{\theta_n}{\alpha} \int_B |u| \, dt. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применим лемму 4 к

$$u = f - f_B \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{2\theta_n}{|B|} \int_B |f - f_B|.$$

Получим шары $\{B_k^1\}$ такие, что

$$|f(x) - f_B| \leq \frac{2\theta_n}{|B|} \int_B |f - f_B| \quad \text{для п.в. } x \in B \setminus \bigcup_k B_k^1 \quad (50)$$

(см. (47)) и в силу (48) и (49) соответственно имеем

$$|f_{B_k^1} - f_B| \leq \frac{2A_n\theta_n}{|B|} \int_B |f - f_B|, \quad (51)$$

$$\sum_k |B_k^1| \leq \frac{1}{2} |B|. \quad (52)$$

Обозначим $E_k^1 = B \setminus B_k^1$. Если к каждому B_t^1 мы снова применим лемму 4 с

$$u = f - f_{B_t^1} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{2\theta_n}{|B_t^1|} \int_{B_t^1} |f - f_{B_t^1}|,$$

то получим такие шары $\{B_k^2\}_{k \in Q_t^2}$, что для п.в. $x \in (\bigcup_k B_k^1) \setminus (\bigcup_k B_k^2)$ при $x \in B_k^1$ в силу (47) и (51) имеем

$$|f(x) - f_B| \leq \frac{2\theta_n}{|B_k^1|} \int_{B_k^1} |f - f_{B_k^1}| + \frac{2A_n\theta_n}{|B|} \int_B |f - f_B|;$$

далее, по (48) и (51)

$$|f_{B_k^2} - f_B| \leq \frac{2A_n\theta_n}{|B|} \int_B |f - f_B| + \frac{2A_n\theta_n}{|B_k^1|} \int_{B_k^1} |f - f_{B_k^1}|,$$

а также

$$\sum_k |B_k^2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |B|.$$

Если $k \in Q_t^2$, то обозначим $E_k^2 = E_t^1 \setminus B_k^2$. Продолжив этот процесс до бесконечности, на m -м шаге для каждого B_t^{m-1} получим шары $\{B_k^m\}_{k \in Q_t^m}$ такие, что для п.в. $x \in \bigcup_k B_k^{m-1} \setminus \bigcup_k B_k^m$ если последовательность шаров $B^0 = B, B_{k_1}^1, B_{k_2}^2, \dots, B_{k_{m-1}}^{m-1}$ такова, что $x \in B_{k_{m-1}}^{m-1}$ и $k_i \in Q_{k_{i-1}}^i, i = 1, 2, \dots, m-1$, то

$$|f(x) - f_B| \leq d_n \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{|B_{k_i}^i|} \int_{B_{k_i}^i} |f - f_{B_{k_i}^i}| \right), \quad (53)$$

а также

$$\sum_k |B_k^m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |B|. \quad (54)$$

Обозначим $E_k^m = E_t^{m-1} \setminus B_k^m$ при $k \in Q_t^m$. Пусть теперь $x \in B \setminus \bigcup_k B_k^m$, а p есть минимальное натуральное число, для которого $x \notin \bigcup_k B_k^p$. Очевидно, $p \leq m$ и

$$x \in \bigcap_{i=0}^{p-1} \bigcup_k E_k^i.$$

Отсюда следует, что существует последовательность шаров $B^0, B_{k_1}^1, B_{k_2}^2, \dots, B_{k_{p-1}}^{p-1}$ такая, что $k_i \in Q_{k_{i-1}}^i$ и $x \in \bigcap_{i=0}^{p-1} B_{k_i}^i$, откуда получаем

$$|f(x) - f_B| \leq m d_n f^\#(x), \quad x \in B \setminus \bigcup_k B_k^m.$$

Следовательно, учитывая также (54), имеем

$$|\{x \in B : |f(x) - f_B| > \lambda B_n f^\#(x)\}| \leq \exp(-c\lambda) |B|.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия 3. Пусть B – шар с центром x_0 и радиусом r . Заметим, что неравенство (12) инвариантно относительно преобразования

$$g(x) = \frac{r^n f(r(x - x_0))}{\|f\|_{L^1}}$$

и

$$\text{supp } g \subset B_0 = B(0, 1), \quad \|g\|_{L^1} = 1. \quad (55)$$

Отсюда следует, что достаточно доказывать (12) для функции g . При $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$ имеем (см. (1), (4) и (55))

$$T_* g(x) \leq \int_{|y| < 1} \frac{c|g(y)|}{|x - y|^n} dy \leq \frac{b_n}{|x|^n} \|g\|_{L^1}, \quad M g(x) > \frac{b'_n}{|x|^n} \|g\|_{L^1}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{T_*g(x)}{Mg(x)} \leq a_n, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 2). \quad (56)$$

Очевидно (см. (55)), что

$$Mg(x) > a'_n \quad \text{при } x \in B(0, 2). \quad (57)$$

Из (10), (56) и (57) при $\lambda > \max(a_n, d_n/a'_n)$, где d_n – постоянная из теоремы 1, имеем

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{T_*g(x)}{Mg(x)} > \lambda \right\} \right| &= \left| \left\{ x \in B(0, 2) : \frac{T_*g(x)}{Mg(x)} > \lambda \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x \in B(0, 2) : \frac{T_*g(x)}{Mg(x)} > \lambda, T_*g(x) > d_n \right\} \right| \\ &\leq c \exp(-c_n, T \lambda). \end{aligned}$$

Это дает неравенство (12) для g . Следствие 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЙ 4 И 5. Так как преобразование Гильберта есть частный случай оператора Кальдерона–Зигмунда на прямой, то из (12) получаем, что для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ с $\text{supp } f \in I$, где I – некоторый интервал, выполнена оценка

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{H_*f(x)}{Mf(x)} > \lambda \right\} \right| < c|I| \exp(-c\lambda) \quad (58)$$

для любого $\lambda > \gamma$. Пусть теперь $g \in L^1(\mathbb{T})$. Рассматривая g как функцию на $(-\pi, \pi)$, продолжим ее периодически на $\mathbb{R}$ и обозначим $f(x) = g(x)\chi_{(-3\pi, 3\pi)}(x)$. Из ограниченности функции $1/t - \frac{1}{2} \text{ctg}(t/2)$ на $(-\pi, \pi)$ имеем

$$|H_*f(x) - \tilde{g}_*(x)| \leq c, \quad x \in (-\pi, \pi). \quad (59)$$

Отсюда ввиду (58) и (59) легко следует оценка

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{T} : \frac{\tilde{f}_*(x)}{Mf(x)} > \lambda \right\} \right| < c \exp(-c\lambda)$$

при $\lambda > 0$. Отсюда же получаем нужное нам неравенство (13). Неравенство (14) есть непосредственное следствие (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Имеем

$$|S_n(x, f)| \leq |\widetilde{f \sin nx}| + |\widetilde{f \cos nx}|, \quad n = 1, 2, \dots$$

С другой стороны, имеем

$$M(f(t) \sin nt)(x) \leq Mf(x), \quad M(f(t) \cos nt)(x) \leq Mf(x).$$

Отсюда, используя неравенство (13) для функций $f(t) \cos nt$ и $f(t) \sin nt$, легко получаем первое из неравенств (17), а второе доказывается аналогично.

Перейдем к доказательству (18). Пусть $\sigma_N(x, f)$ – средние Фейера функции f . Легко проверить, что

$$\frac{M(f - \sigma_N)(x)}{Mf(x)} \leq 2. \quad (60)$$

При $N \rightarrow \infty$ имеем $\|\sigma_N - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ и, следовательно, используя тот факт, что максимальная функция $Mf(x)$ имеет слабый тип $(1, 1)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдем N такое, что

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{T} : \frac{M(\sigma_N - f)(x)}{Mf(x)} > \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon^2. \quad (61)$$

Обозначим

$$E_1 = \left\{ \frac{M(\sigma_N - f)(x)}{Mf(x)} > \varepsilon \right\}, \quad E_2 = \mathbb{T} \setminus E_1. \quad (62)$$

Далее, пусть c_1 и c_2 – постоянные из (16). При $n > N$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \exp\left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{Mf(x)}\right) dx \\ &= \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) \exp\left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - \sigma_N) - (f(x) - \sigma_N(x))|}{M(f - \sigma_N)(x)} \frac{M(f - \sigma_N)(x)}{Mf(x)}\right) dx. \end{aligned} \quad (63)$$

Последние два интеграла обозначим соответственно через I_1 и I_2 . Используя неравенство Гёльдера и оценку $|f(x) - \sigma_N(x)| \leq M(f - \sigma_N)(x)$, получим (см. (60) и (16))

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{E_1} \exp\left(\frac{c_1}{2} \frac{|S_n(x, f - \sigma_N) - (f(x) - \sigma_N(x))|}{M(f - \sigma_N)(x)}\right) dx \\ &\leq \sqrt{|E_1|} \exp \frac{c_1}{2} \left(\int_{\mathbb{T}} \exp\left(c_1 \frac{|S_n(x, f - \sigma_N)|}{M(f - \sigma_N)(x)}\right) dx \right)^{1/2} \leq \varepsilon \sqrt{c_2} \exp \frac{c_1}{2}. \end{aligned} \quad (64)$$

Для оценки I_2 используем неравенство $\exp t - 1 \leq t \exp t$ ($t > 0$). Имеем (см. (60)–(62))

$$\begin{aligned} I_2 - 1 &\leq \int_{E_2} \exp\left(\frac{\varepsilon c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - \sigma_N) - (f(x) - \sigma_N(x))|}{M(f - \sigma_N)(x)}\right) dx \\ &\leq \varepsilon \exp \frac{\varepsilon c_1}{4} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f - \sigma_N)|}{M(f - \sigma_N)(x)} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\mathbb{T}} \exp\left(\frac{\varepsilon c_1}{2} \frac{|S_n(x, f - \sigma_N)|}{M(f - \sigma_N)(x)}\right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon c_1}{4}\right) c_2 \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (65)$$

Из (63)–(65) следует

$$\int_{\mathbb{T}} \exp\left(\frac{c_1}{4} \frac{|S_n(x, f) - f(x)|}{Mf(x)}\right) dx - 1 \leq \varepsilon c_3 \quad \text{при } n > N.$$

Так как ε произвольно, имеет место первое из равенств (17). Для доказательства второго равенства надо повторить аналогичные рассуждения, только в местах, где мы пользовались неравенством $|f(x) - \sigma_N(x)| \leq M(f - \sigma_N)(x)$, надо применить (12) для функции $f(x) - \sigma_N(x)$. Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Calderón A. P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85–139.
- [2] Kotlar M. A. Unified theory of Hilbert transforms and ergodic theory // Rev. Mat. Guyana. 1955. V. 1. P. 105–167.
- [3] Fefferman Ch., Stein E. M. H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V. 129. № 3–4. P. 137–193.
- [4] Дынькин Е. М. Методы теории сингулярных интегралов (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона–Зигмунда) // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 15. М.: ВИНТИ, 1987. С. 197–292.
- [5] Zygmund A. Sur les fonctions conjuguées // Fund. Math. 1929. V. 49. P. 284–303.
- [6] Hunt R. A. An estimate for conjugate functions // Studia Math. 1972. V. 44. № 4. P. 371–377.
- [7] John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
- [8] Riesz M. Sur les fonctions conjuguées // Math. Z. 1927. V. 27. P. 214–244.
- [9] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [10] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [11] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

Институт математики НАН Армении, г. Ереван

Поступило
15.10.2001