Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Злобин, Интегралы Рина, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 226–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3550>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:15:52

Интегралы Рина

С. А. Злобин

Исследуется обобщение интегралов, рассмотренных Дж. Рином, в виде кратных интегралов. Эти интегралы дают рациональные приближения к значениям дзета-функции Римана. В частном случае получаются приближения Апери, используемые для доказательства иррациональности числа $\zeta(3)$.

Библиография: 12 названий.

Арифметическая природа значений дзета-функции Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ в нечетных точках $s \geq 3$ является актуальной и привлекательной проблемой теории чисел. Первый шаг в изучении этой проблемы сделал в 1978 г. Апери [1], доказав иррациональность $\zeta(3)$. В 1979 г. Бейкерс [2] рассмотрел интегралы

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-z(1-xy))^{n+1}} dx dy dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Эти интегралы дают приближения Апери, т.е. представляются в виде

$$2u_n\zeta(3) - v_n, \quad (2)$$

причем $u_n \in \mathbb{Z}$ и $D_n^3 v_n \in \mathbb{Z}$ (через D_n обозначено наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$).

Трансцендентность $\zeta(3)$ и иррациональность $\zeta(2n+1)$ при $n \geq 2$ пока не доказаны. Однако после Апери с помощью различных обобщений были доказаны интересные результаты. Отметим, в частности, результат Т. Ривоаля [3] о бесконечности размерности $\mathbb{Q}$ -линейного пространства, порожденного значениями $\zeta(2n+1)$, а также результат Зудилина [4] об иррациональности по крайней мере одного из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$. Для доказательства этих фактов использовались линейные формы от нескольких значений дзета-функции Римана в нечетных точках.

В 2003 г. Рин представил на конференции [5] интегралы

$$I_l = \int_0^1 f(z)^{l-1} z^{-(l-1)(2n+1)} z^t (1-z)^n dz, \quad (3)$$

где

$$f(z) = z^{2n+1} \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-zx)^{n+1}} dx = Q_n(z) \ln(1-z) - P_n(z),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00359).

P_n, Q_n – многочлены степени n , а $t = n$ при $l = 2$ и $t = (2n + 1)(l - 2)$ при $l > 2$. Эти интегралы интересны тем, что дают рациональные приближения к $\zeta(l)$, а при $l = 3$ они являются приближениями Аперы (2). В тезисах докладов [5] Рин пишет, что пока этот факт (при $l > 3$) проверен численно с помощью программы Mathematica. В дальнейшем доказательство также не было опубликовано. Мы докажем этот факт в несколько более общей формулировке, а также подробно исследуем интеграл (3). При доказательстве будут использованы результаты работ [6] и [7] о разложении кратных сумм и интегралов в линейные формы от обобщенных полилогарифмов

$$\text{Li}_{\vec{s}}(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_l^{s_l}},$$

где $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ – вектор с натуральными компонентами. Ряды, определяющие обобщенные полилогарифмы, сходятся при $|z| < 1$. Для удобства полагается $\text{Li}_{\emptyset}(z) = 1$.

В настоящей статье мы не доказываем новых арифметических результатов, однако надеемся, что используемые методы и конструкции могут быть полезны в изучении значений дзета-функции в нечетных точках.

Прежде всего, приведем одномерный интеграл (3) к кратному:

$$\begin{aligned} I_l &= \int_0^1 (f(z)z^{-(2n+1)})^{l-1} z^t (1-z)^n dz \\ &= \int_0^1 \prod_{j=1}^{l-1} \int_0^1 \frac{x_j^n (1-x_j)^n}{(1-zx_j)^{n+1}} dx_j \cdot z^t (1-z)^n dz \\ &= \int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^n (1-x_j)^n}{(1-x_j x_l)^{n+1}} x_l^t (1-x_l)^n dx_1 \dots dx_l. \end{aligned}$$

Наше обобщение состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть параметры a_j, b_j, c_j – целые, причем $b_j > a_j \geq 1$ при $j = 1, \dots, l$ и $c_j \geq 1$ при $j = 1, \dots, l-1$, а также выполнены неравенства $c_j \leq b_j - a_j$ при $j = 1, \dots, l-1$ и

$$a_l \geq b_1 + b_2 + \dots + b_{l-1} - \min_{j=1, \dots, l-1} b_j - l + 3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-zx_j x_l)^{c_j}} x_l^{a_l-1} (1-x_l)^{b_l-a_l-1} dx_1 \dots dx_l \\ &= Q(z^{-1}) \text{Li}_{2, \{1\}_{l-2}}(z) + \sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \text{Li}_{\{1\}_j}(z), \end{aligned}$$

где Q, P_j – многочлены с рациональными коэффициентами, причем $P_j(1) = 0$ при $j > 0$, а $\{1\}_k$ означает k -мерный вектор, все координаты которого равны 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим интеграл в формулировке теоремы через $I_l(z)$ и разложим его в кратную сумму (суммирование ведется по $i = 1, \dots, l-1$):

$$\begin{aligned}
 I_l(z) &= \sum_{k_i \geq 0} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(k_j+c_j)}{\Gamma(c_j)k_j!} \int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} x_j^{k_j+a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1} \\
 &\quad \times x_l^{k_1+\dots+k_{l-1}+a_l-1} (1-x_l)^{b_l-a_l-1} dx_1 \dots dx_l \\
 &= \sum_{k_i \geq 0} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_j-a_j)}{\Gamma(c_j)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(b_l-a_l)}{(k_1+\dots+k_{l-1}+a_l)\dots(k_1+\dots+k_{l-1}+b_l-1)} \\
 &\quad \times \prod_{j=1}^{l-1} \frac{(k_j+1)\dots(k_j+c_j-1)}{(k_j+a_j)\dots(k_j+b_j-1)} \\
 &= \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\Gamma(b_j-a_j)}{\Gamma(c_j)} \sum_{k_i \geq 1} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}-l+1} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(b_l-a_l)}{(k_1+\dots+k_{l-1}+a_l-l+1)\dots(k_1+\dots+k_{l-1}+b_l-l)} \\
 &\quad \times \prod_{j=1}^{l-1} \frac{k_j \dots (k_j+c_j-2)}{(k_j+a_j-1)\dots(k_j+b_j-2)}.
 \end{aligned}$$

Разложим каждую дробь

$$\frac{k_j \dots (k_j+c_j-2)}{(k_j+a_j-1)\dots(k_j+b_j-2)}$$

в сумму простейших дробей. Это можно сделать, так как по условию степень числителя меньше степени знаменателя. То же сделаем и с дробью

$$\frac{\Gamma(b_l-a_l)}{(k_1+\dots+k_{l-1}+a_l-l+1)\dots(k_1+\dots+k_{l-1}+b_l-l)}.$$

Утверждение теоремы теперь будет вытекать из следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть α_j, β – целые неотрицательные числа, причем

$$\beta \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - \min_{j=1, \dots, l-1} \alpha_j.$$

Тогда кратная сумма

$$\sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1+\dots+k_{l-1}}}{k_1+\dots+k_{l-1}+\beta} \cdot \frac{1}{(k_1+\alpha_1)\dots(k_{l-1}+\alpha_{l-1})}, \quad j = 1, \dots, l-1,$$

представляется в виде

$$\sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

если $\beta \neq \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$ и

$$\frac{(l-1)!}{z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}}} \text{Li}_{2, \{1\}_{l-2}}(z) + \sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \text{Li}_{\{1\}_j}(z),$$

если $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$. В обоих случаях выполняется $P_j(1) = 0$ при $j > 0$.

Докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА 2. При целых неотрицательных числах α_j и натуральных k_j выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \cdots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} \\ &= \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_{l-1} + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})} \\ & \quad \times \frac{1}{(k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-2)} + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (k_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)})}, \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем подстановкам на множестве $l-1$ элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из известного тождества (см., например, [8; с. 85])

$$\frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_m} = \sum_{\sigma \in S_m} \frac{1}{(y_1 + y_2 + \dots + y_m)(y_{\sigma(1)} + \dots + y_{\sigma(m-1)}) \cdots y_{\sigma(1)}} \quad (4)$$

при $m = l-1$ и $y_j = k_j + \alpha_j$. Тождество (4) может быть доказано по индукции и представления правой части (4) в виде

$$\frac{1}{(y_1 + y_2 + \dots + y_m)} \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\sigma \in S_m \\ \sigma(m)=j}} \frac{1}{(y_{\sigma(1)} + \dots + y_{\sigma(m-1)}) \cdots y_{\sigma(1)}}.$$

Применяя лемму 2 для $\alpha_j = 0$, получим два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. При любом натуральном m выполняется тождество

$$\begin{aligned} (-\ln(1-z))^m &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right)^m = \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_m}}{k_1 \cdots k_m} \\ &= m! \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_m}}{(k_1 + \dots + k_m)(k_1 + \dots + k_{m-1}) \cdots k_1} = m! \text{Li}_{\{1\}_m}(z). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 1 – хорошо известный результат (см., например, [9; § 1]).

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом натуральном $l \geq 2$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{(k_1 + \dots + k_{l-1})k_1 \dots k_{l-1}} \\ = (l-1)! \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{(k_1 + \dots + k_{l-1})^2 (k_1 + \dots + k_{l-2}) \dots k_1} \\ = (l-1)! \operatorname{Li}_{2, \{1\}_{l-2}}(z). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Обозначим исходную сумму через $S(z)$. Рассмотрим сначала случай $\beta \neq \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$. С помощью леммы 2 представим $S(z)$ как

$$\begin{aligned} \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + \beta} \\ \times \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_{l-1} + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})} \\ \times \frac{1}{(k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-2)} + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (k_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим фиксированную подстановку $\sigma \in S_{l-1}$ и сделаем замену переменных: $n_1 = k_1 + \dots + k_{l-1}$, $n_2 = k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-2)}$, $\dots$, $n_{l-1} = k_{\sigma(1)}$. Достаточно доказать утверждение леммы для выражения

$$\begin{aligned} E(z) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_{l-1} \geq 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + \beta)(n_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})} \\ \times \frac{1}{(n_2 + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (n_{l-1} + \alpha_{\sigma(1)})}. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n_1 + \beta)(n_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})} \\ = \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - \beta} \left(\frac{1}{n_1 + \beta} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

и ограничение на параметр β из условия леммы, представим $E(z)$ как разность двух кратных сумм вида

$$\sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_{l-1} \geq 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + \gamma_1)(n_2 + \gamma_2) \dots (n_{l-1} + \gamma_{l-1})},$$

причем $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_{l-1}$. По следствию 7 из [6] эти суммы представляются в виде

$$\sum_{j=0}^{l-1} P_j(z^{-1}) \operatorname{Li}_{\{1\}_j}(z).$$

Порядок нуля в точке ∞ (т.е. разность степеней знаменателя и числителя) рациональной (по n_1) функции (5) равен 2, а по остальным переменным n_j в суммируемой в $E(z)$ функции он равен 1. Поэтому по теореме 1 из [6] выполнено $P_j(1) = 0$ при $j > 0$.

Осталось рассмотреть случай $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$. Проведем индукцию по величине $\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$. База индукции ($\alpha_1 = \dots = \alpha_{l-1} = 0$) обеспечивается следствием 2:

$$S(z) = (l-1)! \operatorname{Li}_{2, \{1\}_{l-2}}(z).$$

Пусть теперь при некотором j_0 число $\alpha_{j_0} \neq 0$. Преобразуем кратные суммы:

$$\begin{aligned} S(z) &= \sum_{k_{j_0} \geq 1} \sum_{\substack{k_j \geq 1 \\ j \neq j_0}} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + \beta} \cdot \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \dots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} \\ &= \sum_{k_{j_0} \geq 0} \sum_{\substack{k_j \geq 1 \\ j \neq j_0}} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + \beta} \cdot \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \dots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} \\ &\quad - \sum_{k_{j_0} = 0} \sum_{\substack{k_j \geq 1 \\ j \neq j_0}} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + \beta} \cdot \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \dots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} \\ &= \sum_{k_j \geq 1} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + (\beta - 1)} \\ &\quad \times \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \dots (k_{j_0} + (\alpha_{j_0} - 1)) \dots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})} \\ &\quad - \sum_{\substack{k_j \geq 1 \\ j \neq j_0}} \frac{z^{k_1 + \dots + k_{j_0-1} + k_{j_0+1} + k_{l-1}}}{k_1 + \dots + k_{j_0-1} + k_{j_0+1} + k_{l-1} + \beta} \\ &\quad \times \frac{1}{(k_1 + \alpha_1) \dots (k_{j_0-1} + \alpha_{j_0-1})(k_{j_0+1} + \alpha_{j_0+1}) \dots (k_{l-1} + \alpha_{l-1})}. \end{aligned} \quad (6)$$

В уменьшаемом число β и величина $\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$ уменьшились на единицу по сравнению с $S(z)$, и к нему можно применить предположение индукции. К вычитаемому можно применить уже доказанную часть леммы, так как

$$\beta > \alpha_1 + \dots + \alpha_{j_0-1} + \alpha_{j_0+1} + \dots + \alpha_{l-1}.$$

Лемма, а вместе с ней и теорема 1 теперь полностью доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Прделанное преобразование в (6) соответствует подстановке

$$x_{j_0} x_l = \frac{1 - (1 - z x_{j_0} x_l)}{z}$$

в интеграле Рина.

Теорема 1 действительно обобщает результат Рина, а именно, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть параметры a_j , b_j , c_j удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда

$$\int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^{a_j-1} (1-x_j)^{b_j-a_j-1}}{(1-x_j x_l)^{c_j}} x_l^{a_l-1} (1-x_l)^{b_l-a_l-1} dx_1 \dots dx_l = u \zeta(l) - v,$$

где $u, v \in \mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что в условиях теоремы 1 интеграл сходится. Перейдем в тождестве теоремы 1 к пределу $z \rightarrow 1-$. Так как по теореме 1 выполняется $P_j(1) = 0$ при $j > 0$ и по следствию 1 справедливо тождество $\text{Li}_{\{1\}_j}(z) = (-1)^j \ln^j(1-z)/j!$, то

$$\lim_{z \rightarrow 1-} P_j(z) \text{Li}_{\{1\}_j}(z) = \lim_{z \rightarrow 1-} P_j(z) \cdot \frac{(-1)^j \ln^j(1-z)}{j!} = 0$$

при $j > 0$. Используя равенство $\text{Li}_{2, \{1\}_{l-2}}(1) = \zeta(2, \{1\}_{l-2}) = \zeta(l)$, справедливое по теореме о двойственности для кратной дзета-функции (см., например, [10; формула (30)]), приходим к утверждению следствия.

Рассмотрим теперь наиболее “симметричный” случай, т.е. интеграл

$$I_l(z) = \int_{[0,1]^l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j^n (1-x_j)^n}{(1-z x_j x_l)^{n+1}} x_l^t (1-x_l)^n dx_1 \dots dx_l, \quad t = (2n+1)(l-2).$$

При $z = 1$ он дает интеграл (3), который рассматривал Рин. Прежде всего, выясним асимптотическое поведение $I_l(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Перепишем интеграл $I_l(1)$ в виде

$$I_l(1) = \int_{[0,1]^l} \left(\prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j(1-x_j)}{1-x_j x_l} \cdot x_l^{2(l-2)} (1-x_l) \right)^n \frac{x_l^{l-2}}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-x_j x_l)} dx_1 \dots dx_l.$$

Отсюда следует, что $I_l(1) = \tau^{n+o(n)}$, где

$$\tau = \max_{\vec{x} \in [0,1]^l} F(\vec{x}), \quad F(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{l-1} \frac{x_j(1-x_j)}{1-x_j x_l} \cdot x_l^{2(l-2)} (1-x_l).$$

Функция F , доопределенная на границе куба $[0,1]^l$ нулем, является непрерывной на кубе. Также выполняется неравенство

$$I_l(1) \leq \tau^n \int_{[0,1]^l} \frac{x_l^{l-2}}{\prod_{j=1}^{l-1} (1-x_j x_l)} dx_1 \dots dx_l = (l-1)! \zeta(l) \tau^n. \quad (7)$$

Найдем максимум τ . Он достигается в некоторой точке строго внутри куба $[0,1]^l$, причем в этой точке логарифмическая производная функции F по любой переменной x_j обращается в нуль. При $j = 1, \dots, l-1$

$$\frac{F'_{x_j}}{F} = \frac{1}{x_j} - \frac{1}{1-x_j} + \frac{x_l}{1-x_j x_l} = 0.$$

Это уравнение можно привести к виду

$$x_l x_j^2 - 2x_j + 1 = 0,$$

откуда $1/x_j = 1 \pm \sqrt{1 - x_l}$. Так как $1/x_j > 1$, то подходит только корень со знаком '+'. Значит, в точке максимума $x_1 = x_2 = \dots = x_{l-1} = x_0$ и $x_l = (2x_0 - 1)/x_0^2$.

Приравняем логарифмическую производную по переменной x_l к нулю:

$$\frac{F'_{x_l}}{F} = \frac{2(l-2)}{x_l} - \frac{1}{1-x_l} + \frac{(l-1)x_0}{1-x_0x_l} = 0.$$

Подставляя сюда $x_l = (2x_0 - 1)/x_0^2$, получаем уравнение на x_0 :

$$(x_0 - 1)(2x_0^2 + (l-3)x_0 + (2-l)) = 0.$$

Требуется найти корень внутри интервала $(0, 1)$, поэтому значение $x_0 = 1$ не подходит. По тем же причинам отбрасываем отрицательный корень квадратного уравнения; положительный же корень равен

$$x_0 = \frac{3-l+\sqrt{l^2+2l-7}}{4}.$$

Соответствующее значение τ выражается следующим образом:

$$\tau = \frac{(1-x_0)^2(2x_0-1)^{2(l-2)}}{x_0^{2(l-2)}}.$$

Перейдем к арифметике коэффициентов линейных форм. Нам понадобится вспомогательная лемма.

ЛЕММА 3. При целых $n \geq 1$, $\alpha \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\beta \in \{1, 2, \dots, n + \alpha\}$ верно

$$D_n \binom{n+\alpha}{n} \frac{1}{\beta} \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\beta \leq n$, то утверждение леммы очевидно, так как β делит D_n . Пусть теперь $\beta > n$ и $\beta = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$, где p_i — различные простые. Если $r \geq 2$, то $p_i^{s_i} \leq n$, так как $\beta \leq 2n$. Но тогда опять β делит D_n . Осталось рассмотреть случай, когда $\beta = p^s$, p — простое. В этом случае p^{s-1} делит D_n и достаточно показать, что p делит $\binom{n+\alpha}{n}$. Представим бином в виде

$$\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+\alpha)}{\alpha!}.$$

Среди чисел $1, 2, \dots, \alpha$ ровно $[\alpha/p]$ делятся на p , ровно $[\alpha/p^2]$ делятся на p^2 , и так далее до p^{s-1} , а на p^s не делится ни одно из них. Среди чисел $n+1, n+2, \dots, n+\alpha$ не менее $[\alpha/p]$ делятся на p , не менее $[\alpha/p^2]$ делятся на p^2 , и так далее до p^{s-1} , а на p^s делится ровно одно (число β). Таким образом, число p входит в числитель в степени, как минимум на 1 превышающей степень, в которой p входит в знаменатель, что и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. При $l \geq 3$ знаменатели коэффициентов многочленов Q и P_j в представлении $I_l(z)$ в виде линейной формы от полилогарифмов делят $D_{(l-2)n}^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим $I_l(z)$ в виде кратной суммы (см. доказательство теоремы 1):

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geq 1} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}-l+1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{k_j \cdots (k_j + n - 1)}{(k_j + n) \cdots (k_j + 2n)} \\ \times \frac{n!}{(k_1 + \dots + k_{l-1} + (2l-4)n) \cdots (k_1 + \dots + k_{l-1} + (2l-3)n)}.$$

Сделаем сдвиг по переменным суммирования и добавим дополнительные нулевые слагаемые:

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geq 1} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}-ln+1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{(k_j - n) \cdots (k_j - 1)}{k_j \cdots (k_j + n)} \\ \times \frac{n!}{(k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-3)n) \cdots (k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-2)n)}.$$

Раскладывая каждую дробь в сумму простейших, получаем

$$I_l(z) = \sum_{k_i \geq 1} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}-ln+1} \sum_{\alpha_1=0}^n \dots \sum_{\alpha_{l-1}=0}^n \prod_{j=1}^{l-1} \binom{n+\alpha_j}{n} \binom{n}{\alpha_j} \frac{(-1)^{n-\alpha_j}}{k_j + \alpha_j} \\ \times \binom{n}{\alpha_l} \frac{(-1)^{\alpha_l}}{k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-3)n + \alpha_l}. \quad (8)$$

Достаточно изучить знаменатели коэффициентов для сумм вида

$$\sum_{k_i \geq 1} z^{k_1+k_2+\dots+k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \binom{n+\alpha_j}{n} \frac{1}{k_j + \alpha_j} \cdot \frac{1}{k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-3)n + \alpha_l}$$

для фиксированных $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, n\}$. По лемме 2

$$E = \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j + \alpha_j} \cdot \frac{1}{k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-3)n + \alpha_l} \\ = \frac{1}{k_1 + \dots + k_{l-1} + (l-3)n + \alpha_l} \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(k_1 + \dots + k_{l-1} + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})} \\ \times \frac{1}{(k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-2)} + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \cdots (k_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(1)})}.$$

Рассмотрим вначале случай $\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} \leq (l-2)n$. В этом случае для каждой подстановки σ сделаем замену переменных:

$$n_1 = k_1 + \dots + k_{l-1}, \quad n_2 = k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-2)}, \quad \dots, \quad n_{l-1} = k_{\sigma(1)}.$$

В разложении суммы

$$\sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_{l-1} \geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1 + (l-3)n + \alpha_l} \times \frac{1}{(n_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1})(n_2 + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (n_{l-1} + \alpha_{\sigma(1)})}$$

в линейную форму от полилогарифмов знаменатели коэффициентов многочленов по лемме 1 из [7] делят $D_{(l-2)n}^l$, так как и $(l-3)n + \alpha_l \leq (l-2)n$.

Теперь рассмотрим случай $\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} > (l-2)n \geq (l-3)n + \alpha_l$. Тогда

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l} \\ &\times \left(\frac{1}{n_1 + (l-3)n + \alpha_l} - \frac{1}{n_1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}} \right) \\ &\times \sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})} \\ &= \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l} \left(\sum_{\sigma \in S_{l-1}} \frac{1}{n_1 + (l-3)n + \alpha_l} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})} - \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j + \alpha_j} \right). \end{aligned}$$

Через $n_j(\sigma)$ обозначена сумма $k_{\sigma(1)} + \dots + k_{\sigma(l-j)}$, $n_1 = k_1 + \dots + k_{l-1}$. Опять по лемме 1 из [7] для суммы

$$\sum_{n_1 > n_2(\sigma) > \dots > n_{l-1}(\sigma) \geq 1} \frac{z^{n_1}}{(n_1 + (l-3)n + \alpha_l)} \times \frac{1}{(n_2(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)} + \dots + \alpha_{\sigma(l-2)}) \dots (n_{l-1}(\sigma) + \alpha_{\sigma(1)})}$$

искомый знаменатель делит $D_{(l-2)n}^{l-1}$. Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{k_i \geq 1} z^{k_1 + k_2 + \dots + k_{l-1}} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k_j + \alpha_j} &= \prod_{j=1}^{l-1} \sum_{k_i \geq 1} \frac{z^{k_j}}{k_j + \alpha_j} \\ &= \prod_{j=1}^{l-1} z^{-\alpha_j} \left(\text{Li}_1(z) - \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{1}{k_j} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$(\text{Li}_1(z))^s = s! \text{Li}_{\{1\}_s}(z), \quad D_n \cdot \sum_{k_j=1}^{\alpha_j} \frac{1}{k_j} \in \mathbb{Z},$$

раскрывая произведение по j , получаем линейную форму от $\text{Li}_{\{1\}_s}(z)$, $s = 0, \dots, l-1$, а коэффициенты стоящих при них многочленов (от аргумента z^{-1}) делят D_n^{l-1} . Осталось найти μ такое, что для любых $\alpha_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ выполнено

$$\frac{\mu}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l} \in \mathbb{Z}.$$

При $l > 3$ справедливо неравенство

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l \leq (l-1)n - (l-3)n = 2n \leq (l-2)n,$$

поэтому в качестве μ можно выбрать $D_{(l-2)n}$. При $l = 3$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1} - (l-3)n - \alpha_l = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \leq n + \alpha_1,$$

поэтому по лемме 3 можно выбрать

$$\mu = D_n \binom{n + \alpha_1}{n}.$$

Лемма теперь полностью доказана.

Рассмотрим подробнее случай $l = 3$. Значения x_0 и τ следующие:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = (\sqrt{2} - 1)^4.$$

Покажем, что $I_3(1)$ дает приближения Апері (2). По теореме 1

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n(1-x_1)^n x_2^n(1-x_2)^n}{(1-x_1x_3)^{n+1}(1-x_2x_3)^{n+1}} x_3^{2n+1}(1-x_3)^n dx_1 dx_2 dx_3 = 2u'_n \zeta(3) - v'_n,$$

где $u'_n, v'_n \in \mathbb{Q}$. Из представления $I_l(z)$ в виде (8) и леммы 1 можно написать явный вид коэффициента при $\zeta(3)$:

$$u'_n = \sum_{\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq n} \binom{n}{\alpha + \beta} \binom{\alpha + n}{n} \binom{n}{\alpha} \binom{\beta + n}{n} \binom{n}{\beta}.$$

Для u_n в (2) известна формула

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2.$$

ЛЕММА 5. Для любого целого неотрицательного n выполнено $u'_n = u_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} u'_n &= \sum_{\alpha=0}^n \binom{\alpha+n}{n} \binom{n}{\alpha} \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \binom{n}{\alpha+\beta} \binom{\beta+n}{n} \binom{n}{\beta} \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \binom{\alpha+n}{n} \binom{n}{\alpha}^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, n+1, -n+\alpha \\ 1, \alpha+1 \end{matrix}; 1 \right]. \end{aligned}$$

К гипергеометрической функции ${}_3F_2$ применим преобразование Тома (см. [11; формула (3.1.1)] или [12; § 3.9]):

$${}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, a, b \\ d, e \end{matrix}; 1 \right] = \frac{(e-b)_n}{(e)_n} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, b, d-a \\ d, 1+b-e-n \end{matrix}; 1 \right],$$

где $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера. Получим

$$\begin{aligned} u'_n &= \sum_{\alpha=0}^n \binom{\alpha+n}{n} \binom{n}{\alpha}^2 \frac{(n+1)_n}{(\alpha+1)_n} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -n+\alpha, -n \\ 1, -2n \end{matrix}; 1 \right] \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\alpha=0}^n \binom{n}{\alpha}^2 {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -n, -n+\alpha, -n \\ 1, -2n \end{matrix}; 1 \right] \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\alpha=0}^n \binom{n}{\alpha}^2 \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \frac{(-n)_{\beta}^2 (-n+\alpha)_{\beta}}{\beta!^2 (-2n)_{\beta}} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{\beta=0}^n \frac{(-n)_{\beta}^2}{\beta!^2 (-2n)_{\beta}} \sum_{\alpha=0}^{n-\beta} \binom{n}{\alpha}^2 (-n+\alpha)_{\beta}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\sum_{\alpha=0}^{n-\beta} \binom{n}{\alpha}^2 (-n+\alpha)_{\beta} = (-n)_{\beta} \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} -n, -n+\beta \\ 1 \end{matrix}; 1 \right].$$

Гипергеометрическая функция ${}_2F_1$ может быть явно вычислена по теореме Гаусса (см. [12; формула (1.3.1)]):

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1 \right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a+b).$$

Следовательно,

$$u'_n = \binom{2n}{n} \sum_{\beta=0}^n \frac{(-n)_{\beta}^3}{\beta!^2 (-2n)_{\beta}} \cdot \frac{(2n-\beta)!}{n! (n-\beta)!} = \sum_{\beta=0}^n \binom{n}{\beta}^2 \binom{2n-\beta}{n}^2.$$

Делая замену $\beta = n - k$, получаем

$$u'_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 = u_n,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Интеграл

$$\int_{[0,1]^3} \frac{x_1^n (1-x_1)^n x_2^n (1-x_2)^n}{(1-x_1 x_3)^{n+1} (1-x_2 x_3)^{n+1}} x_3^{2n+1} (1-x_3)^n dx_1 dx_2 dx_3$$

дает приближения Апери (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный интеграл равен $2u'_n \zeta(3) - v'_n$, причем $u'_n = u_n$ по лемме 5 и $D_n^3 v'_n \in \mathbb{Z}$ по лемме 4. Из оценки интеграла (7) следует, что

$$|2u_n \zeta(3) - v'_n| \leq 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Интеграл Бейкерса (1) дает приближения Апери, и из его оценки

$$|2u_n \zeta(3) - v_n| \leq 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$D_n^3 \cdot |v'_n - v_n| \leq 4\zeta(3)D_n^3(\sqrt{2} - 1)^{4n}.$$

Левая часть является целым числом, а при $n \geq 7$ правая часть меньше единицы ($D_n \leq 3^n$ для любого натурального n), следовательно, $v'_n = v_n$. При $n < 7$ числа v_n и v'_n можно вычислить явно и проверить то же равенство. Теорема доказана.

Рин доказал теорему 2 с помощью равенства интегралов $I_l(1)$ и (1), используя замену переменных в интеграле Бейкера:

$$x = \frac{1 - x_3}{1 - x_1 x_3}, \quad y = 1 - x_1 x_3, \quad z = x_2.$$

К сожалению, уже при $l = 4$ интеграл Рина

$$\int_{[0,1]^4} \frac{x_1^n (1 - x_1)^n x_2^n (1 - x_2)^n x_3^n (1 - x_3)^n}{(1 - x_1 x_4)^{n+1} (1 - x_2 x_4)^{n+1} (1 - x_3 x_4)^{n+1}} x_4^{4n+2} (1 - x_4)^n dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

недостаточно мал, чтобы доказать какой-либо арифметический результат. Действительно, в этом случае значения x_0 и τ таковы:

$$x_0 = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}, \quad \tau = \frac{(5 - \sqrt{17})^2 (\sqrt{17} - 3)^4}{(\sqrt{17} - 1)^4}.$$

Знаменатели коэффициентов делят D_{2n}^4 , чья асимптотика

$$\ln D_{2n}^4 = 8n + o(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

а

$$\ln I_4(1) = \ln \tau \cdot n + o(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

причем $\ln \tau \approx -4,35366$.

Автор выражает благодарность чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко за интересную тему и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Apéry, “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Astérisque*, **61** (1979), 11–13.
- [2] F. Beukers, “A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ ”, *Bull. London Math. Soc.*, **11**:3 (1979), 268–272.
- [3] T. Rivoal, “La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **331**:4 (2000), 267–270.
- [4] W. Zudilin, “Arithmetic of linear forms involving odd zeta values”, *J. Théorie Nombres Bordeaux*, **16**:1 (2004), 251–291; [arXiv:math/0206176](https://arxiv.org/abs/math/0206176).
- [5] G. Rhin, “Approximation of values of zeta functions at integers”, *The Meeting on “Elementare und Analytische Zahlentheorie”*, Abstracts (Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, March 9–15, 2003), 19; <http://www.mfo.de/programme/schedule/2003/11/Report12.2003.pdf>.
- [6] С. А. Злобин, “Разложения кратных интегралов в линейные формы”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 683–706.

- [7] С. А. Злобин, “Свойства коэффициентов некоторых линейных форм от обобщенных полилогарифмов”, *Фундам. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 41–58.
- [8] D. E. Littlewood, *Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.
- [9] M. Waldschmidt, “Multiple polylogarithms”, *Number Theory and Discrete Mathematics*, Proceedings of the International Conference (Chandigarh, October 2–6, 2000), eds. A. K. Agarwal et al., Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, 57–68.
- [10] В. В. Зудилин, “Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений”, *УМН*, **58**:1 (2003), 3–32.
- [11] Дж. Гаспер, М. Рахман, *Базисные гипергеометрические ряды*, Мир, М., 1993.
- [12] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **32**, Stechnert-Hafner, New York, 1964.

С. А. Злобин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

19.12.2005

Исправленный вариант

10.06.2006