Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Плотности решеток, соответствующих пространствам положительной, отрицательной и вариационной размерностей, и их применение к временным рядам, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 251–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:25:51

УДК 519

Плотности решеток, соответствующих пространствам положительной, отрицательной и вариационной размерностей, и их применение к временным рядам

В. П. Маслов

В работе доказывается общая теорема о распределении типа Бозе–Эйнштейна. Понятие размерности и плотности решеток применяется с помощью этой теоремы к колеблющимся временным рядам.

Библиография: 15 названий.

В настоящей работе мы ставим три принципиальных вопроса. Вначале приведем эвристические соображения.

1. Какова связь между непрерывным и дискретным: между непрерывным пространством и отвечающей ему решеткой – скелетом этого пространства, его рамкой. Отрезки трех мерной решетки можно выпрямить в прямую, решетка по обычным понятиям одномерна.

Как отобразить на решетку это пространство? Если ставить вопрос в более общей математической форме: как отобразить на натуральный ряд (точек) компакт хаусдорфовой размерности D ?

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ существует шкала $0 \leq D \leq 1$ канторовой пыли с мерой Хаара, равной x^D отрезка $(0, x)$, подобного всему данному множеству канторовой пыли. Прямое произведение этой шкалы на евклидов куб размерности $k - 1$ даст всю шкалу $k + \sigma$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in (0, 1)$.

Пусть задан натуральный ряд $i = 1, 2, \dots$. Сопоставим точке i вес, отвечающий положительной размерности D :

$$\rho_i(D) = \frac{\Gamma(D + i - 1)}{\Gamma(D)\Gamma(i)}. \quad (1)$$

В силу формулы Эйлера [1]

$$\Gamma(D) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(i - 1)!}{D(D + 1) \cdots (D + i - 1)} i^D, \quad (2)$$

вес $\rho_i(D)$ при $i \rightarrow \infty$ стремится к i^{D-1} , т.е. к весу, отвечающему [2] в непрерывном случае размерности D . Отсюда

$$\sum_{i=k}^{k+s} \rho_i(D)$$

при $D < 1$ и $k \rightarrow \infty$ отвечает мере Хаара для канторовой пыли хаусдорфовой размерности D “отрезка” длины s .

Можно сказать, что $\rho_i(D)$ – “квантованная” плотность пространства хаусдорфовой размерности D .

2. Второй вопрос – вопрос о пространствах отрицательной размерности. Дирак следующим образом объяснял парадокс, заключающийся в наличии отрицательных энергий в уравнении, которое он открыл, конструируя релятивистское уравнение электрона для объяснения его спина. Он предположил, что все отрицательные уровни энергии заполнены электронами. Когда электрон покидает отрицательный уровень, образуется дырка – позитрон, которая ведет себя как электрон с положительным зарядом. Этим удивительным рассуждением он предсказал существование позитрона.

В наших работах [3]–[6] дано следующее определение отрицательной размерности пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Общее определение пространств отрицательной размерности). Пусть имеется компакт M_{t_0} хаусдорфовой размерности t_0 , являющийся элементом t -параметрической шкалы вложенных друг в друга компактов $0 < t < \infty$. Две шкалы будем называть *эквивалентными* относительно M_{t_0} , если у них совпадают компакты при $t \geq t_0$. Будем говорить, что компакт M_{t_0} является *дыркой* в этом эквивалентном множестве шкал, а $-t_0$ есть *отрицательная размерность* этого класса эквивалентности.

“Квантование” пространств с отрицательной размерностью проводится точно так же [4], как и с положительной, по той же формуле (1), поскольку Γ -функция аналитически продолжается для отрицательных D . Если D – целое отрицательное, то при $i = 1, \dots, |D + 1|$ имеют место простые полюса, которые являются дискретным аналогом инфракрасной катастрофы. Можно также считать эти точки конденсатом. Поэтому имеют смысл только значения плотности при $i > |D|$, и они равны

$$\rho_i = \frac{1}{i(i-1)(i-2) \cdots (i-D-1)}. \quad (3)$$

Если D – отрицательное нецелое, то при $i > |D|$

$$\rho_i = \frac{\Gamma(i+D-1)}{(i-1)!}, \quad (4)$$

а при $i < D$ ρ_i меняют знаки.

Однако пространства с отрицательной размерностью, если нет “непрерывного” аналога, не так просто распознать. Приведем важный пример.

В наших предыдущих работах мы применили метод квантовой статистики к лингвостатистике [7].

Каждому слову в частотном словаре соответствует число его встречаемости в исходном корпусе текстов. Некоторым словам может соответствовать одно и то же число встречаемости в тексте.

Ранг слова (т.е. его порядковый номер в частотном словаре) отсчитывается от слова A_1 с самым большим числом встречаемости в заданном корпусе текстов. Обозначим число слов с одинаковым числом встречаемости i через N_i . Тогда, если

A_m – последнее слово в списке слов одинаковой встречаемости m (слова с одинаковым числом встречаемости могут быть упорядочены произвольным образом), то ранг r_m слова A_m равен

$$r_m = \sum_{i=m}^s N_i. \quad (5)$$

Аналогия между бозе-частицами на уровне энергии осциллятора $\lambda_i = i$ и словами с частотой (числом) встречаемости i заключается в том, что слова с одной и той же частотой встречаемости мы можем упорядочивать как угодно: в алфавитном, обратном алфавитном или в любом другом порядке. Нумерация рангов (номеров) слов внутри одной частоты (числа) встречаемости произвольна. В этом смысле слова неразличимы и подчиняются бозе-статистике.

Однако в рассматриваемых подходах есть различие. В частотном словаре считают число встречаемости каждого слова, а затем упорядочивают слова, начиная от наиболее часто встречающихся.

Когда не было компьютеров, человеку было сложно вычислять число слов с одинаковой частотой встречаемости. Человек способен, посмотрев на страницу как на картинку, определить на ней искомое слово по его графическому образу в стольких местах, во скольких оно встречается. Человек смотрит на страницу текста в этом случае как на фотографию, не вникая в смысл. Аналогично, если человек ищет определенную фамилию в длинном списке фамилий людей, принятых в институт, он не прочитывает все фамилии подряд, а глазами находит (или не находит) нужное имя.

Глаз привыкает распознавать нужное изображение, и эта способность обостряется с увеличением просматриваемого материала: чем больше страниц он просматривает, тем легче находит нужный графический образ. Поэтому при ручном подсчете проще было, не читая текст, распознавать на странице искомое слово и вычеркивать его карандашом, считая при этом, сколько раз оно встретилось. Такая процедура повторяется для каждого следующего слова уже по тексту с вычеркнутыми словами (“дырками”), что облегчает поиск. Иначе говоря, эта процедура заключается в распознавании образа данного слова, как мы распознаем, например, в лесу нужный нам гриб, не перебирая все подряд, что растет на земле. Обычный компьютер это делает перебором, а квантовый (см. [8]), распознавая образ.

Но и для обычного компьютера число операций для нахождения частоты встречаемости слова меньше, чем для нахождения числа слов в тексте с данной частотой встречаемости.

Можно сказать, что число грибов, которые мы собрали (отобрали у леса), это число дырок, которые мы оставили в лесу. Точно так же слова, которые мы “выловили” из текста описанным выше образом, – это аналог не частиц, а дырок. Поэтому и ранг слов лингвисты считают с другого конца, по сравнению с тем, как это делали бы физики. Физики считали бы частицы, начиная с нижнего уровня, а дырки – отсутствующие электроны, начиная с верхнего.

Поэтому слова в частотном словаре ассоциируются не с частицами, а с дырками. Соответственно, размерность в распределении частотного словаря нужно выбирать “дырочную”, отрицательную или нулевую.

И это, возможно, ответит на вопрос о том, как правильно определять размерность в дискретном варианте, – ответ в духе идей Колмогорова. Если длина алгоритма определения дырочной размерности много меньше, чем длина алгоритма, определяющего положительную размерность, то это – дырочная размерность.

Пусть E – число словоупотреблений в исследуемом массиве текстов (длина массива); N – число слов в отвечающем этому массиву словаре. Тогда $\omega^0 = E/N$ – средняя частота встречаемости слова в тексте.

Если ω_i – число встречаемости i -го слова в тексте, то будем называть относительной частотой $\bar{\omega}_i = \omega_i - \omega^0$, т.е. для всех частот встречаемости больших средней частоты $\omega^0 = E/N$ $\bar{\omega}_i$ положительно, а для меньших – отрицательно.

Последовательности слов в тексте сопоставим последовательность их относительных частот $\bar{\omega}_i$ и рассмотрим кумулятивную сумму $f_k = \sum_{i=1}^k \bar{\omega}_i$.

Полагаю, что показатель Гёльдера для f_k равен $1/2$. В этом случае размерность текста, как это следует из приводимой ниже формулы (12), будет нулевой и полюс (конденсат) будет при $i = 1$, что отвечает всем известным словарям.

3. Третий вопрос связан с показателем Гёльдера, который можно выразить через вариационную размерность. Понятие вариационной размерности идейно близко к хаусдорфовой размерности. При этом в последнее время в связи с экономическими задачами оно применяется к временному ряду, т.е. в основном к дискретному случаю.

Мы приведем определение показателя Гёльдера, данное Шафером и Вовком [9], в терминах нестандартного анализа.

Рассмотрим произвольный интервал $[0, T]$ (стандартных) действительных чисел, $T > 0$, и пусть N – бесконечно большое нестандартное натуральное число. Эти числа далее фиксированы. Обозначим $dt = T/N$. Основное множество

$$\mathcal{T} = \{n dt \mid 0 \leq n \leq N\}$$

содержит все стандартные числа из интервала $[0, T]$, а также те нестандартные действительные числа, которые отличаются от них на бесконечно малые величины.

Пусть f – произвольная функция на $\mathcal{T}$ и $t \in \mathcal{T} - \{T\}$. Положим $df(t) = f(t+dt) - f(t)$.

ЛЕММА 1. Пусть f – непрерывная (возможно принимающая нестандартные значения) функция на $\mathcal{T}$, $p \in [1, \infty)$ – действительное число и пусть

$$\text{var}_f(p) = \sum_{t \in \mathcal{T} - \{T\}} |df(t)|^p.$$

Тогда существует единственное действительное число $1/H(f) \in [0, 1]$ такое, что

- 1) $\text{var}_f(p)$ – бесконечно большое при $1 \leq p < 1/H(f)$;
- 2) $\text{var}_f(p)$ – бесконечно малое при $p > 1/H(f)$.

Число $H(f)$ будем называть показателем Гёльдера, а $1/H(f)$ – вариационной размерностью.

Если $H(f) = 1/2$, то функция f является винеровской.

Мы воспользуемся соотношением между гладкостью функций и поведением на бесконечности ее преобразования Фурье, о котором мы говорили в [4].

Известна связь между гёльдеровским показателем H стационарного случайного процесса и показателем α степенного убывания его спектра.

Пусть сигнал $f(t)$ стационарен, так что $\langle f(t) \rangle \equiv \langle f \rangle = \text{const}$, и имеет гёльдеровский показатель H , так что

$$|f(t+s) - f(t)|^2 \sim s^{2H}, \quad 0 < H < 1. \quad (6)$$

Тогда для автокорреляционной функции $F(s)$

$$F(s) = \langle f(t+s)f(t) \rangle - \langle f^2 \rangle$$

получаем

$$F(0) - F(s) \sim s^{2H}. \quad (7)$$

По теореме Винера–Хинчина спектральная плотность $J(\omega)$ является преобразованием Фурье автокорреляционной функции:

$$J(\omega) = \int F(s) \exp(i\omega s) ds = \int F(s) \cos \omega s ds \quad (8)$$

и, соответственно,

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int J(\omega) \exp(-i\omega s) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int J(\omega) \cos \omega s d\omega. \quad (9)$$

Поскольку функция $F(s)$ четна, имеем

$$F(0) - F(s) = \frac{1}{2\pi} \int J(\omega)(1 - \cos \omega s) d\omega = \frac{1}{\pi} \int J(\omega) \sin^2 \frac{\omega s}{2} d\omega. \quad (10)$$

Пусть $J(\omega)$ убывает на бесконечности как $|\omega|^{-\alpha}$. Тогда

$$F(0) - F(s) \sim \int |\omega|^{-\alpha} \sin^2 \frac{\omega s}{2} d\omega = s^{\alpha-1} \int |\omega s|^{-\alpha} \sin^2 \frac{\omega s}{2} d(\omega s). \quad (11)$$

Заменяя в последнем интеграле переменную на $u = \omega s$, видим, что зависимость от s остается только в множителе перед интегралом. Таким образом, $s^{2H} \sim F(0) - F(s) \sim s^{\alpha-1}$ или

$$H = \frac{1}{2}(\alpha - 1), \quad \alpha = 2H + 1. \quad (12)$$

Для колмогоровской турбулентности $H = 1/3$, $D = -5/3$.

Поскольку мы оговорили, что переменная tN принимает дискретные значения $t = 1, 2, \dots, N$, то в силу принципа двойственности Понтрягина, или, как это принято в физической литературе, по теореме Котельникова “минимальный” ряд Фурье функции, совпадающий в точках $t = 1, 2, \dots, N$, состоит из N членов.

Из (12) следует, что если H полуцелое, то α целое. Но как говорилось, $H = 1/2$ отвечает винеровскому процессу (броуновскому движению), а это означает в силу (1), что у функции $\rho_i(-2)$ в точках $i = 1$ и $i = 2$ простые полюсы. Таким образом, для дискретного броуновского движения первые два члена a_1 и a_2 преобразования Фурье обращаются в бесконечность. Значит, имеет место инфракрасная катастрофа.

Если же $H \neq 1/2$, то удобнее находить H из отношения a_2/a_1 первых двух членов ряда Фурье или просто использовать это отношение вместо вычисления H как показатель отклонения от винеровского процесса.

Как рассматривалось в [3], относительно значений случайной величины $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ устанавливается упорядоченность по их величине. Среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ могут быть и равные. В последнем случае их объединяют, складывая при этом отвечающие им “вероятности”, т.е. отношение числа “попаданий” на λ_i к общему числу испытаний. Число равных λ_i : $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+k}$ будем называть кратностью q_i значения λ_i . Если размерность равна D , то

$$q_i = \frac{\rho_i(D)}{\min_{1 \leq i \leq s} \rho_i(D)}.$$

В нашем рассмотрении к бесконечности стремится как число испытаний N , так и s .

Пусть N_i – число “выпадений” значения λ_i : $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, тогда

$$\sum_{i=1}^s \frac{N_i}{N} \lambda_i = M, \quad (13)$$

где M – математическое ожидание.

Кумулятивная вероятность $\mathcal{P}_k$ есть сумма первых k вероятностей в последовательности λ_i : $\mathcal{P}_k = (1/N) \sum_{i=1}^k N_i$, где $k < s$. Обозначим $NP_k = B_k$, $\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^s q_i \lambda_i / Q$, $Q = \sum_{i=1}^s q_i$.

Задача распадается на два случая:

Случай 1)

$$E < \bar{\lambda}N,$$

Случай 2)

$$\bar{\lambda}N \leq E \leq \lambda_{\max}N.$$

Для первого случая имеет место нижеследующая теорема.

Если все варианты, для которых

$$\sum_{i=1}^s N_i = N \quad (14)$$

и

$$\sum_{i=1}^s N_i \lambda_i \leq E \quad (15)$$

равноценны (равновероятны), то [10]–[12] большинство вариантов будет скапливаться около следующей зависимости “кумулятивной вероятности” $B_l\{N_i\}_{i=1}^l = \sum_{i=1}^l N_i$,

$$\sum_{i=1}^l N_i = \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1}, \quad (16)$$

где β' и ν' определяются из условий

$$B_s = N, \quad \sum_{i=1}^s \frac{q_i \lambda_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1} = E, \quad (17)$$

если $N \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow \infty$.

Дополнительно к [3] мы предположим, что $a_1 N \leq Q \leq a_2 N$, $a_1, a_2 = \text{const}$, $Q = \sum_{i=1}^s q_i$.

Введем обозначения: $\mathcal{M}$ – множество всех наборов $\{N_i\}$, удовлетворяющих условиям (14) и (15); $\mathcal{N}\{\mathcal{M}\}$ – число элементов множества $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть все варианты наборов $\{N_i\}$ таких, что выполняются условия (14) и (15), равновероятны. Тогда число вариантов $\mathcal{N}$ наборов $\{N_i\}$, удовлетворяющих (14) и (15), для которых выполняется дополнительное соотношение

$$\left| \sum_{i=1}^l N_i - \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1} \right| \geq N^{(3/4+\varepsilon)}, \quad (18)$$

меньше чем $c_1 \mathcal{N}\{\mathcal{M}\} / N^m$, где c_1 и m – любые числа, $\sum_{i=1}^l q_i \geq \varepsilon Q$, ε – сколь угодно малое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\mathcal{A}$ – подмножество $\mathcal{M}$, удовлетворяющее условию

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=l+1}^s N_i - \sum_{i=l+1}^s \frac{q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu} - 1} \right| &\leq \Delta, \\ \left| \sum_{i=1}^l N_i - \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1} \right| &\leq \Delta, \end{aligned}$$

где Δ , β , ν – некоторые действительные числа, не зависящие от l .

Обозначим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=l+1}^s N_i - \sum_{i=l+1}^s \frac{q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu} - 1} \right| &= S_{s-l}, \\ \left| \sum_{i=1}^l N_i - \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1} \right| &= S_l. \end{aligned}$$

Очевидно, что если $\{N_i\}$ множество всех наборов $\{N_i\}$, то

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} = \sum_{\{N_i\}} \left(\Theta \left(E - \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i \right) \delta_{\sum_{i=1}^s N_i, N} \Theta(S_l - \Delta) \Theta(S_{s-l} - \Delta) \right), \quad (19)$$

где $\sum N_i = N$.

Здесь сумма берется по всем целым N_i , $\Theta(\lambda)$ – функция Хевисайда, а δ_{k_1, k_2} – символ Кронекера.

Используем интегральные представления:

$$\delta_{NN'} = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi e^{-iN\varphi} e^{\nu N'} e^{iN'\varphi}, \quad (20)$$

$$\Theta(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\lambda - i} e^{\beta y(1+i\lambda)}. \quad (21)$$

Прибегнем к стандартной регуляризации. Заменим первую Θ – функцию Хевисайда в (19), на непрерывную функцию

$$\Theta_\alpha(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha > 1, y < 0, \\ 1 - e^{\beta y(1-\alpha)} & \text{при } \alpha > 1, y \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\Theta_\alpha(y) = \begin{cases} e^{\beta y(1-\alpha)} & \text{при } \alpha < 0, y < 0, \\ 1 & \text{при } \alpha < 0, y \geq 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ – параметр. Получим

$$\Theta_\alpha(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y(1+ix)} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x-\alpha i} \right) dx. \quad (24)$$

Если $\alpha > 1$, тогда $\Theta(y) \leq \Theta_\alpha(y)$.

Пусть $\nu < 0$. Заменив (20) и (21) в (19), поменяв местами интегрирование и суммирование и переходя к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, мы получим оценку

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} &\leq \left| \frac{e^{-\nu N + \beta E}}{i(2\pi)^2} \right| \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \left[\exp(-iN\varphi) \sum_{\{N_j\}} \left(\exp \left\{ \left(-\beta \sum_{j=1}^s N_j \lambda_j \right) + (i\varphi + \nu) N_j \right\} \right) \right] d\varphi \\ &\times \Theta(S_l - \Delta) \Theta(S_{s-l} - \Delta), \\ &\sum N_i = N, \end{aligned} \quad (25)$$

где β и ν – такие действительные параметры, для которых ряд сходится.

Имеем

$$\int_0^\infty dM \Theta \left(M - \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i \right) e^{-\beta E} = \int_{\sum_{i=1}^s N_i \lambda_i}^\infty dE e^{-\beta E} = \frac{e^{-\beta \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i}}{\beta}. \quad (26)$$

Оценивая правую часть, пронеся модуль под интеграл и затем под знак суммы и интегрируя по φ , получим

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} \leq \frac{e^{-\nu N + \beta E}}{2\pi} \sum_{\{N_i\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i + \nu N_i \right\} \Theta(S_l - \Delta) \Theta(S_{s-l} - \Delta). \quad (27)$$

Обозначим

$$Z(\beta, N) = \sum_{\{N_i\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i}, \quad (28)$$

где сумма берется по всем N_i таким, что $\sum_{i=1}^s N_i = N$,

$$\begin{aligned} \zeta_l(\nu, \beta) &= \prod_{i=1}^l \xi_i(\nu, \beta), & \zeta_{s-l}(\nu, \beta) &= \prod_{i=l+1}^s \xi_i(\nu, \beta), \\ \xi_i(\nu, \beta) &= \frac{1}{(1 - e^{\nu - \beta \lambda_i})^{q_i}}, & i &= 1, \dots, l. \end{aligned}$$

Из неравенства для гиперболического косинуса $\text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ при $|x_1| \geq \delta$, $|x_2| \geq \delta$,

$$\text{ch}(x_1) \text{ch}(x_2) = \text{ch}(x_1 + x_2) + \text{ch}(x_1 - x_2) > \text{ch}(x_1 + x_2) > \frac{e^\delta}{2} \quad (29)$$

следует, что для всех положительных s и Δ выполняется неравенство (ср. [10])

$$\Theta(S_{s-l} - \Delta) \Theta(S_l - \Delta) \leq e^{-c\Delta} \text{ch} \left(c \sum_{i=1}^l N_i - c\phi_l \right) \text{ch} \left(c \sum_{i=l+1}^s N_i - c\bar{\phi}_{s-l} \right), \quad (30)$$

где

$$\phi_l = \sum_{i=1}^l \frac{q_i}{e^{\beta' \lambda_i - \nu'} - 1}, \quad \bar{\phi}_{s-l} = \sum_{i=l+1}^s \frac{q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu} - 1}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} &\leq e^{-c\Delta} \exp(\beta E - \nu N) \\ &\times \sum_{\{N_i\}} \exp \left\{ -\beta \sum_{i=1}^l N_i \lambda_i + \nu \sum_{i=1}^l N_i \right\} \text{ch} \left(\sum_{i=1}^l c N_i - c\phi \right) \\ &\times \exp \left\{ -\beta \sum_{i=l+1}^s N_i \lambda_i + \nu \sum_{i=l+1}^s N_i \right\} \text{ch} \left(\sum_{i=l+1}^s c N_i - c\bar{\phi} \right) \\ &= e^{\beta E} e^{-c\Delta} (\zeta_l(\nu - c, \beta) \exp(-c\phi_l) + \zeta_l(\nu + c, \beta) \exp(c\phi_l)) \\ &\times (\zeta_{s-l}(\nu - c, \beta) \exp(-c\bar{\phi}_{s-l}) + \zeta_{s-l}(\nu + c, \beta) \exp(c\bar{\phi}_{s-l})). \end{aligned} \quad (31)$$

Используем равенства

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \ln \zeta_l \Big|_{\substack{\beta=\beta' \\ \nu=\nu'}} \equiv \phi_l, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \ln \zeta_{s-l} \Big|_{\substack{\beta=\beta' \\ \nu=\nu'}} \equiv \bar{\phi}_{s-l} \quad (32)$$

и разложение $\zeta_l(\nu \pm c, \beta)$ по формуле Тейлора. Существует $\gamma < 1$ такое, что

$$\ln(\zeta_l(\nu \pm c, \beta)) = \ln \zeta_l(\nu, \beta) \pm c(\ln \zeta_l)'_{\nu}(\nu, \beta) + \frac{c^2}{2} (\ln \zeta_l)''_{\nu}(\nu \pm \gamma c, \beta).$$

Подставляя это разложение и используя формулу (32), мы получим, что $\phi_{\nu, \beta}$ сокращается.

Другое представление формулы Тейлора дает

$$\begin{aligned} \ln(\zeta_l(\nu + c, \beta)) &= \ln(\zeta_l(\beta, \nu)) + \frac{c}{\beta} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln(\zeta_l(\beta, \nu)) \\ &+ \int_{\nu}^{\nu+c/\beta} d\nu' (\nu + c/\beta - \nu') \frac{\partial^2}{\partial \nu'^2} \ln(\zeta_l(\beta, \nu')). \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично для ζ_{s-l} .

Из явного вида функции $\zeta_l(\beta, \nu)$ получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln(\zeta_l(\beta, \nu)) = \beta^2 \sum_{i=1}^l \frac{g_i \exp(-\beta(\lambda_i + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_i + \nu)) - 1)^2} \leq \beta^2 Qd, \quad (34)$$

где d выражается формулой

$$d = \frac{\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_1 + \nu)) - 1)^2}. \quad (35)$$

Та же оценка имеет место для ζ_{s-l} .

Учитывая, что $\zeta_l \zeta_{s-l} = \zeta_s$, мы получим оценку при $\beta = \beta'$, $\nu = \nu'$

$$\mathcal{N}\{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}\} \leq \zeta_s(\beta', \nu') \exp(-c\Delta + \frac{c^2}{2} \beta^2 Qd) \exp(E\beta' - \nu' N). \quad (36)$$

Теперь выразим $\zeta_s(\nu', \beta')$ через $Z(\beta, N)$. Для этого докажем лемму.

ЛЕММА 2. При высказанных предположениях асимптотика интеграла

$$Z(\beta, N) = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{-iN\alpha} \zeta_s(\beta, \nu + i\alpha) \quad (37)$$

имеет вид

$$Z(\beta, N) = C e^{-\nu N} \frac{\zeta_s(\beta, \nu)}{|(\partial^2 \ln \zeta_s(\beta, \nu))/(\partial^2 \nu)|} \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \quad (38)$$

где $C = \text{const}$.

Имеем

$$Z(\beta, N) = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iN\alpha} \zeta_s(\beta, \nu + i\alpha) d\alpha = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{NS(\alpha, N)} d\alpha, \quad (39)$$

где

$$S(\alpha, N) = -i\alpha + \ln \zeta_s(\beta, \nu + i\alpha) = -i\alpha - \sum_{i=1}^s q_i \ln[1 - e^{\nu + i\alpha - \beta\lambda_i}]. \quad (40)$$

Здесь S зависит от N , поскольку от N зависят s , λ_i и ν ; последнее выбирается таким образом, чтобы точка $\alpha = 0$ была стационарной точкой фазы S , т.е. из условия

$$N = \sum_{i=1}^s \frac{q_i}{e^{\beta\lambda_i - \nu} - 1}. \quad (41)$$

Будем считать, что $a_1 N \leq s \leq a_2 N$, $a_1, a_2 = \text{const}$ и, кроме того, $0 \leq \lambda_i \leq B$, $B = \text{const}$, $i = 1, \dots, s$. При выполнении этих условий в некотором интервале $\beta \in [0, \beta_0]$ значений обратной температуры все производные фазы ограничены, стационарная точка невырождена и вещественная часть фазы вне окрестности нуля строго меньше ее значения в нуле минус некоторое положительное число. Поэтому при вычислении асимптотики интеграла можно заменить отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ отрезком $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Сделаем в этом интеграле замену переменной

$$z = \sqrt{S(0, N) - S(\alpha, N)}. \quad (42)$$

Она голоморфна в круге $|\alpha| \leq \varepsilon$ в комплексной α -плоскости и имеет голоморфную обратную, если ε достаточно мало. В результате получаем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{NS(\alpha, N)} d\alpha = e^{NS(0, N)} \int_{\gamma} e^{-Nz^2} f(z) dz, \quad (43)$$

где контур γ в комплексной z -плоскости получается заменой (42) из отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$, а

$$f(z) = \left(\frac{\partial \sqrt{S(0, N) - S(\alpha, N)}}{\partial \alpha} \right)^{-1} \Big|_{\alpha=\alpha(z)}. \quad (44)$$

При малом ε контур γ целиком лежит внутри двойного сектора $\operatorname{re}(z^2) > c(\operatorname{re} z)^2$ для некоторого $c > 0$, поэтому его можно “сдвинуть” на вещественную ось, не меняя интеграл с точностью до экспоненциально малых по N членов. Итак, с указанной точностью имеем

$$Z(\beta, N) = \frac{e^{-\nu N}}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-Nz^2} f(z) dz. \quad (45)$$

Теперь, поскольку переменная z стала вещественной, функцию $f(z)$ можно считать финитной (изменив ее вне отрезка интегрирования), распространить интеграл на всю ось (что снова даст экспоненциально малую ошибку) и затем вычислить асимптотическое разложение интеграла, разлагая подынтегральную функцию в ряд Тейлора по z с остаточным членом. Это обосновывает применение метода стационарной фазы к указанному интегралу для данного случая.

ЛЕММА 3. Имеем

$$\frac{1}{\mathcal{N}(\mathcal{M})} \sum_{\{N_i\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i}, \quad (46)$$

где $\sum N_i = N$, $\lambda_i N_i \leq E - N^{1/2+\varepsilon}$, стремится к нулю быстрее N^{-k} для любого k , $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим точку минимума по β при $\nu(\beta, N)$, удовлетворяющем условию

$$\sum \frac{q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu(\beta, N)} - 1} = N.$$

Нетрудно убедиться, что она удовлетворяет условию (17). Предположим, что условие леммы не выполняется.

Тогда при $\sum N_i = N$, $\sum \lambda_i N_i \geq E - N^{1/2+\varepsilon}$

$$e^{\beta E} \sum_{\{N_i\}} e^{-\beta \sum_{i=1}^s N_i \lambda_i} \geq e^{(N^{1/2+\varepsilon})\beta},$$

и очевидно, что $\beta \ll \frac{1}{\sqrt{N}}$ дает минимум (31) при выполнении леммы 1.

По той же схеме Коваль получил и прямое доказательство этой леммы.

Положим в формуле (36) после подстановки (38) $c = \Delta/N^{1+\alpha}$, тогда нетрудно видеть, что при $\Delta = N^{3/4+\varepsilon}$ отношение

$$\frac{\mathcal{N}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{A})}{\mathcal{N}(\mathcal{M})} \approx \frac{1}{N^m},$$

где m – любое целое. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [13] по небрежности вкралась ошибка. На странице 7 в ссылке на работу [10] вместо формулы (95) следовало указать формулу (94) и рассмотреть формулу (96), а именно $\nu = \nu' + O(1/N^{1/4})$. Это меняет оценку (4): экспонента должна быть $3/4$, а не $1/2$.

Случай 2) доказывается совершенно аналогично (ср. [10], [14]) за исключением того, что β будет меньше нуля и d из формулы (35) нужно заменить на

$$d' = \frac{\exp(-\beta(\lambda_s + \nu))}{(\exp(-\beta(\lambda_s + \nu)) - 1)^2}. \quad (47)$$

Мы доказываем кумулятивную формулу, в которой плотности по виду совпадают с распределением Бозе–Эйнштейна. Отличие состоит только в том, что в формуле вместо набора λ_n случайных величин или собственных значений оператора Гамильтониана стоят некоторые средние их значения по ячейкам. В силу нашей теоремы ε_i – средние значения энергии λ_k в i -ой ячейке – это нелинейные средние по Колмогорову.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если нормировать N_i в формуле (18), поделив на N , то правая часть (18) даст оценку $N^{-1/4+\varepsilon}$. Условие (19) также будет необходимо нормировать, поделив на N .

Тогда мы полагаем, что $Q = \sum_{i=1}^s q_i \rightarrow \infty$, и оценка будет $O(Q^{-1/4+\varepsilon})$. Условия на β и ν будут иметь вид

$$\sum \frac{\lambda_i q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu} - 1} = E^0, \quad \sum \frac{q_i}{e^{\beta \lambda_i - \nu} - 1} = Q, \quad E^0 = \frac{E}{Q}.$$

ПРИМЕР. Пусть задан временной ряд

$$b_1, b_2, \dots, b_M, \quad \sum_{i=1}^M b_i^2 = A_0 \gg 1.$$

Используя теорему Котельникова, получаем функцию вида

$$f(t) = \sum_{n=1}^M a_n \cos\left(\frac{\pi n t}{M}\right),$$

обращающуюся в целых точках $t = i$ в заданные значения b_i , $i = 1, \dots, M$. Будем предполагать, что

- 1) $(1/M) \sum_{n=1}^M a_n^2 = (1/M) \sum_{i=1}^M b_i^2 = A_0$, $A_0 M \gg 1$;
- 2) a_n – рациональные числа;
- 3) энергия ограничена, а именно

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{dt} \right)^2(t) dt \leq E, \quad E \gg 1.$$

Отсюда следует

$$\sum_{n=1}^M n^2 a_n^2 \leq \frac{EM^2}{\pi^2}. \quad (48)$$

Спектральной плотностью интервала l называется [15] средний квадрат амплитуды, а именно

$$A_l = \frac{1}{M-l} \sum_{n=l}^M a_n^2.$$

Поскольку в силу 1) a_n^2 – рациональные числа, то их можно привести к общему знаменателю N так, что $a_n^2 = N_n/N$, где N_n и N – целые. Тогда получим

$$\sum_{n=1}^M \frac{N_n}{N} = A_0 M. \quad (49)$$

Далее положим $\lambda_n = n^2$, тогда условие (48) примет вид

$$\sum_{n=1}^M \lambda_n \frac{N_n}{N} \leq \frac{EM^2}{\pi^2}. \quad (50)$$

Теперь условия 1), 2), 3) принимают обычный вид для теоремы 1. Мы будем предполагать, что наборы $\{N_n/N\}_{n=1}^M$ равновероятны при ограничениях (49) и (50).

Отсюда, поскольку

$$A_l = \frac{1}{M-l} \sum_{n=l}^M \frac{N_n}{N}, \quad (51)$$

то, если D известно, то в силу теоремы 1

$$A_l \cong \frac{1}{M-l} \sum_{n=l}^M \frac{\rho_n(D)}{e^{\pi^2 n^2 \beta - \sigma} - 1} \quad (52)$$

при условиях

$$\sum_{n=1}^M \frac{n^2 \rho_n(D)}{e^{\pi^2 n^2 \beta - \sigma} - 1} = \frac{EM^2}{\pi^2}, \quad (53)$$

$$\sum_{n=1}^M \frac{\rho_n(D)}{e^{\pi^2 n^2 \beta - \sigma} - 1} = A_0 M. \quad (54)$$

Для колмогоровской турбулентности $D = -5/3$, а условие $A_0 \gg 1$ означает сильную внешнюю подкачку. Турбулентность квантовой жидкости характеризуется тем, что вихри могут образовываться лишь дискретным образом, подчиняясь условиям квантования, зависящим от постоянной Планка $\hbar$. Возможно, что в этом случае условия Колмогорова на спектральную плотность должны быть проквантованы согласно формулам (52)–(54).

В заключение выражаю глубокую благодарность В.В. Вьюгину, А.Н. Соболевскому и Е.В. Щепину за ценные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Математический энциклопедический словарь*, ред. Ю. В. Прохоров, Советская энциклопедия, М., 1988.
- [2] Yu. I. Manin, *The Notion of Dimension in Geometry and Algebra*, [arXiv:math.AG/0502016](#).
- [3] В. П. Маслов, “Отрицательная асимптотическая топологическая размерность, новый конденсат и их связь с квантованным законом Ципфа”, *Матем. заметки*, **80**:6 (2006), 856–863.
- [4] В. П. Маслов, “Общее понятие топологических пространств отрицательной размерности и квантование их плотностей.”, *Матем. заметки*, **81**:1 (2007), 157–160.
- [5] V. P. Maslov, *Negative Dimension in General and Asymptotic Topology*, [arXiv:math.GM/0612543](#).
- [6] V. P. Maslov, *Dimension of Holes and High-Temperature Condensate in Bose–Einstein Statistics*, [arXiv:physics/0612182](#).
- [7] V. P. Maslov, “Quantum Linguistic Statistics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:3 (2006), 315–325.
- [8] V. P. Belavkin, V. P. Maslov, “Design of the optimal dynamic analyzer: mathematical aspects of sound and visual pattern recognition”, *Mathematical Aspects of Computer Engineering*, eds. V. P. Maslov, K. A. Volosov, Mir, Moscow, 146–237.
- [9] G. Shafer, V. Vovk, *Probability and Finance. It’s Only a Game!*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, New York, 2001.
- [10] В. П. Маслов, “Нелинейное среднее в экономике”, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 377–395.
- [11] В. П. Маслов, “Об одной общей теореме теории множеств, приводящей к распределению Гиббса, Бозе–Эйнштейна, Парето и закону Ципфа–Мандельброта для фондового рынка”, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 870–877.
- [12] В. П. Маслов, “Закон “отсутствия предпочтения” и соответствующее распределение в частотной теории вероятностей”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 220–230.
- [13] V. P. Maslov, *On a General Theorem of Number Theory Leading to the Gibbs, Bose–Einstein, and Pareto Distribution as well as to the Zipf–Mandelbrot Law for the Stock Market*, [arXiv:physics/0601005](#).
- [14] V. P. Maslov, T. V. Maslova, *Rank Distributions in Semiotics*, [arXiv:math.PR/0612540](#).
- [15] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, ФАЗИС, М., 1998.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

07.01.2007