Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, О множествах единственности для кратных рядов Уолша, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 265–279

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3553>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:36:43

О множествах единственности для кратных рядов Уолша

М. Г. Плотников

Работа посвящена изучению множеств единственности для кратных рядов Уолша при ρ -регулярной (или ограниченной) сходимости по прямоугольникам. Доказывается, что счетное множество есть множество единственности для таких рядов при указанной сходимости. Строится некоторый класс совершенных множеств единственности для кратных рядов Уолша при указанной сходимости. Показывается, что понятие индекса совершенного множества не решает задачи о принадлежности данного множества классу множеств единственности. Отмечается, что результаты работы верны для некоторых переставленных кратных рядов Уолша.

Библиография: 14 названий.

В работе исследуются вопросы единственности для кратных рядов Уолша

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_N} \omega_{n_1, \dots, n_N}(z).$$

При этом изучается ρ -регулярная сходимость, которая является более общей, чем часто используемая сходимость по прямоугольникам. Доказывается, что любое счетное множество является множеством единственности для кратных рядов Уолша при ρ -регулярной сходимости (следствие 2). Показано, что понятие индекса совершенного множества, введенное в работе [1], не решает вопроса о принадлежности данного совершенного множества классу U -множеств или M -множеств (теорема 5). Попутно установлено некоторое число фактов, имеющих самостоятельный интерес (теоремы 1–4). Важно, что все результаты работы имеют место не только в том случае, когда одномерные функции Уолша рассматриваются в одной из “стандартных” нумераций (какими обычно считают нумерации Пэли, Качмажа и самого Уолша), но и в случае произвольной перестановки одномерных функций Уолша, сохраняющей ранг всех функций.

Напомним, что множество A называется M -множеством для рядов по какой-то системе функций, если существует ряд по этой системе, не все коэффициенты которого нулевые, сходящийся к нулю вне множества A . Если множество A не является M -множеством для таких рядов, то оно называется U -множеством (или *множеством единственности*) для этих рядов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00428) и программы “Ведущие научные школы”, (грант № 1657.2003.1).

Еще при изучении одномерных рядов Уолша было показано, что принадлежность данного множества классу U -множеств или классу M -множеств в большей степени зависит не от “густоты” множества, а от его арифметической природы. В 1947 г. Виленкин доказал (см. [2]), что пустое множество является U -множеством для рядов Уолша. Тот факт, что счетное множество есть U -множество для рядов Уолша, независимо друг от друга установили в 1949 г. Шнейдер и Файн (см. [3], [4]); в той же работе [3] доказано, что множество положительной меры есть M -множество для рядов Уолша. Но среди совершенных множеств нулевой меры есть как U -множества (см. [3]), так и M -множества (этот результат был независимо получен Шнейдером в работе [3] и Кури в работе [5]). В 1977 г. Скворцов установил существование совершенного M -множества, η -мерная мера Хаусдорфа которого равна нулю при всех $\eta > 0$ (см. [6]). Тем самым, “жидкое” в определенном смысле множество оказывается M -множеством. В другом примере, построенном Скворцовым (см. [7; с. 202]), U -множество оказывается в некотором смысле “густым”.

Изучению множеств единственности для кратных рядов Уолша посвящено не так много работ. Из работ Мовсисяна (см. [8]) и Скворцова (см. [9]) следует, что счетное множество есть U -множество для таких рядов при сходимости по прямоугольникам. Широкий класс совершенных U -множеств для кратных рядов Уолша при такой сходимости был построен Лукомским (см. [10]).

Мы рассматриваем ρ -регулярную сходимость рядов Уолша, при которой прямоугольные частичные суммы

$$S_Q(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=0}^{Q_1} \sum_{n_2=0}^{Q_2} \cdots \sum_{n_N=0}^{Q_N} c_{n_1, n_2, \dots, n_N} \omega_{n_1, n_2, \dots, n_N}(z)$$

стремятся к сумме $S(z)$ в точке z , если $\min_i Q_i \rightarrow \infty$ и $\min_{ij} \{Q_i/Q_j\} \geq \rho$. Если последнее условие отбросить, то получится сходимость по прямоугольникам. Обозначать ρ -регулярную сходимость будем так:

$$S_Q(z) \xrightarrow{\rho} S(z).$$

Мы рассматриваем значения $\rho < 1/2$. В работе [1] для изучения вопросов единственности для двумерных рядов Хаара были введены понятия верхнего и нижнего индексов совершенных множеств, описывающие в некотором смысле “густоту” таких множеств. Для двумерных рядов Хаара при помощи этих понятий решалась задача о принадлежности данного множества классу U -множеств или M -множеств при некоторых ограничениях на коэффициенты. Мы покажем, что введенные понятия не решают задачу принадлежности данного множества классу U -множеств или M -множеств для кратных рядов Уолша при ρ -регулярной сходимости. Отметим, что класс U -множеств для кратных рядов Уолша при ρ -регулярной сходимости при любом ρ строго уже соответствующего класса при сходимости по прямоугольникам. Это было доказано Лукомским (см. [11]).

Будем определять одномерные функции Уолша на двоичной группе D (см., например, [12], [13]), тогда N -мерные ряды Уолша будут определены на D^N . Напомним, что D есть множество последовательностей $t = \{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $t_k = 0$ или 1. При этом отображение

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k 2^{-k-1}$$

переводит группу D в так называемый *модифицированный отрезок* $J^* = [0, 1]^*$, который отличается от обычного отрезка тем, что любая двоично-рациональная точка $t = p/2^n$ считается дважды: левая точка $t - 0$, соответствующая последовательности $\{t_k^1\}$ такой, что $t_k^1 = 1$ при $k \geq M(t)$, и правая точка $t + 0$, соответствующая последовательности $\{t_k^2\}$ такой, что $t_k^2 = 0$ при $k \geq M(t)$. Соответствие $\varphi: D \rightarrow J^*$ является взаимно-однозначным. Поэтому мы будем всегда иметь в виду как двоичную группу D , так и модифицированный отрезок J^* .

Сначала мы будем использовать определение функций Уолша в нумерации Пэли (см. [12], [13]). Если

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\},$$

– двоичное представление числа n , то

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{\infty} [r_j(t)]^{\varepsilon_j},$$

где $r_j(t) = (-1)^{t_j}$ – функция Радемахера.

Двоичным интервалом $\Delta_{\mathbf{n}}^i$ на $(J^*)^N$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, $n_s = 0, 1, \dots$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$, $i_s = 0, \dots, 2^{n_s} - 1$, назовем сегмент вида

$$\left[\frac{i_1}{2^{n_1}} + 0, \frac{i_1 + 1}{2^{n_1}} - 0 \right] \times \dots \times \left[\frac{i_N}{2^{n_N}} + 0, \frac{i_N + 1}{2^{n_N}} - 0 \right].$$

Рангом такого двоичного интервала назовем вектор $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$. Топология на $(J^*)^N$ порождается всевозможными двоичными интервалами. *Двоичным кубом* $\Delta_{\mathbf{n}}^i$ назовем двоичный интервал такой, что $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n$, а его *рангом* назовем просто число n . Иногда в обозначении $\Delta_{\mathbf{n}}^i$ мы будем опускать верхний и нижний индексы.

В дальнейшем нам потребуется проводить операции над векторами. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ – два вектора. Сумму этих векторов и произведение вектора на число мы будем понимать в обычном смысле. Скажем, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_i \leq b_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Если $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$, то обозначим как $2^{\mathbf{k}}$ вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_N})$. Пусть $\mathbf{1}$ обозначает вектор $(1, \dots, 1)$, а $\mathbf{0}$ – вектор $(0, \dots, 0)$. *Модулем вектора* $\mathbf{a}$ будем считать число $|\mathbf{a}|$, равное $\sum_{i=1}^N |a_i|$. Через $\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{m}}^{\mathbf{m}} d_{\mathbf{n}}$ мы будем обозначать выражение

$$\sum_{n_1=m_1}^{M_1} \dots \sum_{n_N=m_N}^{M_N} d_{n_1, \dots, n_N}.$$

Определим N -мерный ряд Уолша как

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_N} \omega_{n_1, \dots, n_N}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}), \quad (1)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N) \in D^N$, $\omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \omega_{n_1}(z_1) \cdot \omega_{n_2}(z_2) \cdot \dots \cdot \omega_{n_N}(z_N)$.

Пусть Δ – двоичный интервал. Поставим в соответствие каждому ряду (1) функцию $\Psi(\Delta)$, задаваемую формулой

$$\Psi(\Delta) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \int_{\Delta} c_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (2)$$

где интеграл понимается естественным образом. Определение $\Psi(\Delta)$ не зависит от того, как мы понимаем суммирование в правой части формулы (2). Действительно, пусть $\mathbf{k}$ – ранг двоичного интервала Δ . Если $n_i > 2^{k_i} - 1$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, N$, то по определению функции Уолша

$$\int_{\Delta} \omega_{\mathbf{n}}(z) dz = 0.$$

Таким образом,

$$\Psi(\Delta) = \sum_{n=0}^{2^{\mathbf{k}}-1} c_n \int_{\Delta} \omega_{\mathbf{n}}(z) dz.$$

Заметив, что при $\mathbf{n} \leq 2^{\mathbf{k}} - 1$ функция $\omega_{\mathbf{n}}(z)$ постоянна на двоичном интервале Δ , получаем формулу

$$\Psi(\Delta) = |\Delta| S_{2^{\mathbf{k}}-1}(z), \quad (3)$$

где z – любая точка интервала Δ .

Будем называть *параметром регулярности двоичного интервала Δ ранга $\mathbf{k}$* число

$$\rho(\Delta) = \frac{1}{\max_{i,j} 2^{|k_i - k_j|}},$$

равное отношению длин минимальной и максимальной сторон интервала. *Параметром регулярности $\rho(\mathbf{k})$ вектора $\mathbf{k}$* будем называть отношение его минимальной и максимальной компонент.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $1/2^{\gamma+1} \leq \rho < 1/2^{\gamma}$ при натуральном γ . Тогда $S_{2^{\mathbf{k}}-1}(z) \xrightarrow{\rho} S(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\substack{\text{diam } \Delta \rightarrow 0 \\ z \in \Delta, \rho(\Delta) \geq 1/2^{\gamma}}} \frac{\Psi(\Delta)}{|\Delta|} = S(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При заданном ρ при больших k_i неравенство

$$\min_{i,j} \frac{2^{k_i} - 1}{2^{k_j} - 1} \geq \rho$$

имеет место тогда и только тогда, когда $|k_i - k_j| \leq \gamma$. Значит, $S_{2^{\mathbf{k}}-1}(z) \xrightarrow{\rho} S(z)$ тогда и только тогда, когда $S_{2^{\mathbf{k}}-1}(z) \rightarrow S(z)$ при $\min_i k_i \rightarrow \infty$ и $\min_{i,j} |k_i - k_j| \leq \gamma$. Теперь доказательство утверждения сразу же следует из формулы (3).

Вернемся к функции $\Psi(\Delta)$. Очевидно, Ψ – аддитивная функция двоичного интервала, т.е. если $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p$ – двоичные интервалы, причем $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\Delta = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i$, то

$$\Psi(\Delta) = \sum_{i=1}^p \Psi(\Delta_i).$$

Сделаем важное замечание. По аналогии с одномерным случаем (см. [13; теоремы 3.1.2, 3.1.10]) можно показать, что соответствие между рядами (1) и аддитивными функциями двоичного интервала, определяемое формулой (2), является

взаимно-однозначным (и даже является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (1) и множество аддитивных функций двоичного интервала структурой линейного пространства). При этом коэффициенты ряда (1) восстанавливаются по функции $\Psi(\Delta)$ по формуле

$$c_n = \sum_{j=0}^{2^k-1} \omega_n^j(k) \Psi(\Delta_k^j), \quad (4)$$

где $\omega_n^i(k)$ – постоянное значение функции $\omega_n(z)$ на двоичном интервале Δ_k^i .

Далее, пусть $z \in (J^*)^N$, а $\{\Delta_n\}$ – стягивающаяся к точке z вложенная последовательность двоичных кубов, причем ранг куба Δ_n равен n . Рассмотрим условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\Delta_n) = 0. \quad (5)$$

Условие (5) естественно трактовать как некоторого рода непрерывность функции $\Phi(\Delta)$ в точке z .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть ряд (1) сходится в точке $z \in (J^*)^N$ ρ -регулярно (при $\rho \in (0, 1/2)$) или по прямоугольникам к конечной сумме. Тогда в точке z для функции $\Psi(\Delta)$, построенной для ряда (1) по формуле (2), выполняется условие (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из утверждения 1.

ЛЕММА 1. Пусть множество $A \subset (J^*)^N$ является M -множеством для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости, $0 < \rho < 1/2$, и функция $\Psi(\Delta)$ соответствует ряду (1), реализующему M -множество A (т.е. ряд (1) таков, что $S_Q(z) \xrightarrow{P} 0$ вне множества A). Если для некоторого двоичного интервала Δ_0 имеем соотношение $A \cap \Delta_0 = \emptyset$, то $\Psi(\Delta_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Psi(\Delta) \neq 0$. Будем считать при этом, что $\Psi(\Delta_0) > 0$ (если это не так, заменим ряд $\sum_n c_n \omega_n(z)$ на ряд $\sum_n (-c_n) \omega_n(z)$). Разбив Δ_0 на конечное число двоичных кубов, получим с учетом аддитивности, что функция Ψ принимает положительное значение на одном из них. Поэтому можно сразу считать Δ_0 двоичным кубом. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\Psi(\Delta_0) - \varepsilon |\Delta_0| > 0$. Положим $\Phi(\Delta) = \Psi(\Delta) - \varepsilon |\Delta|$. Очевидно, функция Φ является аддитивной функцией двоичного интервала.

Так как $\Phi(\Delta_0) > 0$, то, разбив куб Δ_0 на 2^N непересекающихся двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера, получим с учетом аддитивности, что функция Φ принимает положительное значение на одном из них. Продолжая этот процесс дальше, получим вложенную последовательность двоичных кубов $\{\Delta_n\}_{n=0}^{\infty}$ таких, что $\Phi(\Delta_n) > 0$ для любого n . Пусть эта последовательность стягивается к точке $z \in \Delta_0$. Тогда выполняется следующая цепочка соотношений:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\Delta_n)}{|\Delta_n|} + \frac{\varepsilon |\Delta_n|}{|\Delta_n|} \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Итак, в точке z для ряда (1) в силу последней выкладки и формулы (3) не выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{n-1}-1}(z) = 0.$$

Отсюда следует, что $\Delta_0 \cap A \neq \emptyset$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1 [14; теорема 2.3.1]. *Пустое множество является U -множеством для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости при $\rho \in (0, 1/2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если утверждение следствия является неверным, то найдется ряд (1), не равный тождественно нулю и сходящийся к нулю указанным способом всюду на $(J^*)^N$. Этому ряду соответствует функция $\Psi(\Delta)$, не равная тождественно нулю в силу изоморфизма между рядами (1) и аддитивными функциями. По лемме 1 найдется точка $z \in (J^*)^N$, в которой ряд (1) к нулю не сходится. Противоречие, доказывающее следствие.

Чтобы значительно усилить имеющиеся результаты, рассмотрим вместо условия (5) условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \Phi(\Delta_{n \cdot 1 - \sigma}) = 0, \quad (6)$$

где $\{\Delta_k\}$ – последовательность двоичных интервалов такая, что $\Delta_k \subset \Delta_{k-\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$, ранг интервала Δ_k равен k . Несложно построить пример аддитивной функции Φ , которая удовлетворяет условию (6), но не удовлетворяет условию (5). В дальнейшем мы увидим, что из ρ -регулярной сходимости ряда (1) всего лишь в одной точке следует выполнение для функции $\Psi(\Delta)$ условия (5) для любой (!) последовательности $\{\Delta_k\}$ с указанными выше свойствами.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть множество $A \subset (J^*)^N$ и ряд (1) обладают следующим свойством: для ряда (1) выполнено условие*

$$\lim_{m(n) \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad 2^{(m(n)-1)1} \leq n \leq 2^{m(n) \cdot 1} - 1, \quad (7)$$

и, кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{n \cdot 1} - 1}(z) = 0$$

вне множества A . Пусть $\Psi(\Delta)$ – аддитивная функция двоичного интервала, построенная для ряда (1) по формуле (2). Если Δ – двоичный интервал, для которого $\Psi(\Delta) \neq 0$, то Δ содержит непустое совершенное (в топологии $(J^*)^N$) подмножество B , причем $B \subset A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы опирается на три леммы. Обозначим через σ N -мерный вектор, состоящий из нулей и единиц, а через Σ множество таких векторов.

ЛЕММА 2. *Если ряд (1) удовлетворяет условию (7), то для функции $\Psi(\Delta)$, построенной для ряда (1) по формуле (2), и для любой (!) последовательности двоичных интервалов $\{\Delta_k\}$ такой, что $\Delta_k \subset \Delta_{k-\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$ и ранг интервала Δ_k равен k , выполняется условие (6).*

ЛЕММА 3. *Пусть для аддитивной функции двоичного интервала $\Phi(\Delta)$ выполняется условие (5) и $\Phi(\Delta_0) > 0$ для некоторого двоичного куба Δ_0 . Тогда существуют непересекающиеся двоичные кубы Δ^1 и Δ^2 , лежащие в Δ_0 , причем $\Phi(\Delta^i) > 0$ при $i = 1, 2$.*

ЛЕММА 4. *При выполнении условий леммы 3 существует набор двоичных кубов I_n^i , $n = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, 2^n$, со следующими свойствами:*

- 1) все I_n^i лежат в Δ_0 ;

- 2) $I_{n+1}^{2i-1} \subset I_n^i, I_{n+1}^{2i} \subset I_n^i$ для всех $n = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, 2^n$;
 3) $I_{n+1}^{2i-1} \cap I_{n+1}^{2i} = \emptyset$;
 4) $\Phi(I_n^i) > 0$ для всех возможных значений i и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное, и пусть последовательность $\{\Delta_k\}$, удовлетворяющая условиям леммы 2, стягивается к какой-то точке z . В силу формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \Psi(\Delta_{n \cdot 1 - \sigma}) \right| &= \left| \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \frac{1}{2^{nN - |\sigma|}} (-1)^{|\sigma|} S_{2^{n \cdot 1} - \sigma - 1}(z) \right| \\ &= \frac{1}{2^{nN}} \left| \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{|\sigma|} S_{2^{n \cdot 1} - \sigma - 1}(z) \right| \\ &= \frac{1}{2^{nN}} \left| \sum_{s=2^{(n-1) \cdot 1}}^{2^{n \cdot 1} - 1} c_s \omega_s(z) \right| \leq \frac{1}{2^{nN}} \sum_{s=2^{(n-1) \cdot 1}}^{2^{n \cdot 1} - 1} |c_s \omega_s(z)|. \end{aligned}$$

Пусть n настолько велико, что $|c_s| < \varepsilon$, если $2^{(n-1) \cdot 1} \leq s \leq 2^{n \cdot 1} - 1$. Тогда при таком n имеем

$$\left| \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \Psi(\Delta_{n \cdot 1 - \sigma}) \right| \leq \frac{1}{2^{nN}} \varepsilon 2^{(n-1)N} = \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 2, т.е. условие (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Если $\Phi(\Delta) > 0$ для некоторого двоичного интервала Δ , то в силу аддитивности функции Φ $\Phi(\Delta_{n_0}) > 0$ для некоторого двоичного куба Δ_{n_0} . Далее разобьем куб Δ_{n_0} на 2^N непересекающихся двоичных кубов вдвое меньшего линейного размера. В силу аддитивности функции Φ хотя бы для одного из них (назовем его Δ_{n_0+1}) должно выполняться неравенство $\Phi(\Delta_{n_0+1}) > 0$. Если таких кубов больше одного, то утверждение леммы доказано. Если это не так, то точно так же мы можем разбить куб Δ_{n_0+1} на 2^N меньших и т.д. Продолжая этот процесс деления, либо мы на конечном шаге придем к утверждению леммы, либо построим вложенную последовательность двоичных кубов $\{\Delta_n\}$, на каждом из которых функция Φ положительна, ранг Δ_n равен n и среди кубов вдвое меньшего линейного размера, лежащих в Δ_n , ровно на одном функция Φ положительна. Пусть в этом случае последовательность $\{\Delta_n\}$ стягивается к точке z . При этом последовательность кубов $\{\Delta_n\}$ можно естественным образом вложить в последовательность двоичных интервалов $\{\Delta_k\}$. Если $\Delta_n = \Delta_{n_1} \times \dots \times \Delta_{n_N}$, то обозначим через Δ_n^σ двоичный куб $\Delta_n^{\sigma_1} \times \dots \times \Delta_n^{\sigma_N}$, где $\Delta_{n_s}^0 = \Delta_{n_s}$, а $\Delta_{n_s}^1 = \Delta_{n_s-1} \setminus \Delta_{n_s}$. Очевидно,

$$\Delta_{n-1} = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \Delta_n^\sigma.$$

Кроме того,

$$\Delta_{n \cdot 1 - \sigma} = \bigsqcup_{\sigma_0 \leq \sigma} \Delta_n^{\sigma_0}.$$

Имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \Phi(\Delta_{n \cdot 1 - \sigma}) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \sum_{\sigma_0 \leq \sigma} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) = \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} \sum_{\sigma \geq \sigma_0} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma|} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) \\
 &= \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) \sum_{s=|\sigma_0|}^N \left(-\frac{1}{2}\right)^s \binom{s-|\sigma_0|}{N-|\sigma_0|} \\
 &= \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) \sum_{s=0}^{N-|\sigma_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma_0|+s} \binom{s}{N-|\sigma_0|} \\
 &= \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma_0|} \sum_{s=0}^{N-|\sigma_0|} \left(-\frac{1}{2}\right)^s 1^{N-|\sigma_0|-s} \binom{s}{N-|\sigma_0|} \\
 &= \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}) \left(-\frac{1}{2}\right)^{|\sigma_0|} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-|\sigma_0|} \\
 &= \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} (-1)^{|\sigma_0|} \Phi(\Delta_{n \cdot 1}^{\sigma_0}),
 \end{aligned}$$

откуда следует, что из формулы (6) вытекает формула

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{|\sigma|} \Phi(\Delta_n^\sigma) = 0. \quad (8)$$

Так как для последовательности $\{\Delta_n\}$ выполняется равенство (6), то для нее выполняется и равенство (8). С другой стороны,

$$\Phi(\Delta_n) = \Phi\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Delta_{n+1}^\sigma\right) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\Delta_{n+1}^\sigma) \leq \Phi(\Delta_{n+1})$$

(мы использовали тот факт, что $\Phi(\Delta_{n+1}^\sigma) \leq 0$ для всех кубов Δ_{n+1}^σ , не совпадающих с Δ_{n+1}). Таким образом, $\Phi(\Delta_n) \geq \Phi(\Delta_{n+1}) > 0$. Тогда при $n > n_0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{|\sigma|} \Phi(\Delta_n^\sigma) &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\Delta_n^\sigma) - 2 \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma \\ |\sigma| \equiv 1 \pmod{2}}} \Phi(\Delta_n^\sigma) \\
 &\geq \Phi(\Delta_{n-1}) - 2 \cdot 2^{N-1} \cdot 0 = \Phi(\Delta_{n-1}) \geq \Phi(\Delta_{n_0}) > 0
 \end{aligned}$$

и не выполнено условие (8). Противоречие, доказывающее лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По лемме 3 найдутся два непересекающихся двоичных куба $I_1^i \subset \Delta_0$, $i = 1, 2$, причем $\Phi(I_1^i) > 0$. Далее, для каждого $i = 1, 2$ построим пару непересекающихся двоичных кубов I_2^{2i-1} и I_2^{2i} , лежащих в I_1^i , причем $\Phi(I_2^j) > 0$, $j = 1, \dots, 4$. Продолжая этот процесс дальше, мы построим искомым набор I_n^i со всеми свойствами, описанными в условии леммы. Лемма 4 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\Psi(\Delta_0) \neq 0$, при этом будем считать, что $\Psi(\Delta_0) > 0$ (если это не так, заменим ряд $\sum_n c_n \omega_n(z)$ на ряд $\sum_n (-c_n) \omega_n(z)$). Кроме того, можно считать Δ_0 двоичным кубом. Пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$\Psi(\Delta_0) - \varepsilon|\Delta_0| > 0$. Положим $\Phi(\Delta) = \Psi(\Delta) - \varepsilon|\Delta|$. В силу леммы 2 функция $\Psi(\Delta)$ удовлетворяет условию (6), а то, что функция $-\varepsilon|\Delta|$ удовлетворяет условию (6), легко проверить. Пусть I_n^i – набор двоичных квадратов из леммы 4, примененной к функции $\Phi(\Delta)$. Пусть

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^n} I_n^i.$$

Очевидно, $B \subset \Delta_0$ и множество B совершенно в топологии $(J^*)^N$. При этом

$$\lim_{\substack{\text{diam } \Delta \rightarrow 0 \\ z \in \Delta, \rho(\Delta) \geq 1/2^\gamma}} \frac{\Psi(\Delta)}{|\Delta|} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(I_n^i(z))}{|I_n^i(z)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(I_n^i(z))}{|I_n^i(z)|} + \frac{\varepsilon|I_n^i(z)|}{|I_n^i(z)|} \geq 0 + \varepsilon = \varepsilon,$$

где $I_n^i(z)$ – последовательность кубов из набора I_n^i , стягивающаяся к $z \in B$. Итак, в каждой точке $z \in B$ для ряда (1) в силу последней выкладки и утверждения 1 не выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{n+1}-1}(z) = 0.$$

Значит, $B \subset A$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что для выполнения условия (7) достаточно ρ -регулярной сходимости ряда (1) к конечной сумме (при $\rho < 1/2$) всего лишь в одной точке. Для этого рассмотрим равенство

$$c_n \omega_n(z) = \sum_{\sigma \in \Sigma} (-1)^{|\sigma|} S_{n-\sigma}(z).$$

Если ряд (1) сходится в точке z к конечной сумме ρ -регулярно при $\rho < 1/2$, то правая часть этого равенства стремится к нулю при $\min_i n_i \rightarrow \infty$ и $\rho(n) > \rho$. Значит, в силу того, что $|\omega_n(z)| \equiv 1$, c_n стремится к нулю при $\min_i n_i \rightarrow \infty$ и $\rho(n) > \rho$, откуда следует выполнение для данного ряда условия (7).

ТЕОРЕМА 2. Если A – M -множество для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости при $\rho < 1/2$, то A содержит совершенное подмножество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Psi(\Delta)$ – функция двоичного интервала, соответствующая согласно формуле (2) ряду (1), который “реализует” M -множество A , т.е. ряд (1) имеет хотя бы один ненулевой коэффициент и сходится к нулю вне A . В силу изоморфизма между рядами (1) и аддитивными функциями двоичного интервала должен существовать двоичный интервал Δ_0 , на котором $\Psi(\Delta_0) \neq 0$. Учитывая замечание 1, из теоремы 1 следует, что существует совершенное множество $B \subset \Delta_0$, которое принадлежит A . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Счетное множество есть U -множество для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости для $\rho \in (0, 1/2)$.

Далее мы построим целый класс совершенных U -множеств для кратных рядов Уолша. Для начала мы сформулируем вспомогательный технический результат, на который многое будет опираться.

ТЕОРЕМА 3. Если ряд (1) удовлетворяет условию (7), то для любого $k \geq 0$ и для любого вектора $\mathbf{i}$ такого, что $\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq (2^k - 1) \cdot \mathbf{1}$, имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot 2^{m+1-k} - \mathbf{1}}^{(\mathbf{i} + \mathbf{1}) \cdot 2^{m+1-k} - \mathbf{1}} r_{m \cdot \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \Psi(\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}) = 0, \quad (9)$$

где Ψ – соответствующая ряду (1) аддитивная функция двоичного интервала, а

$$r_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \prod_{s=1}^N r_{n_s}(z_s)$$

– функция Радемахера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде чем доказывать теорему, посмотрим, что представляет собой равенство (9). Если $m \geq k$, то все двоичные кубы $\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}$ (где $\mathbf{j}$ лежит в указанных пределах), не пересекаются попарно и в объединении составляют куб $\Delta_{k \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{i}}$. Точка $(\mathbf{j}/2^{m+1} + \mathbf{0})$ принадлежит кубу $\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}$. Кроме того, этот куб $\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}$ есть промежуток знакопостоянства функции $r_{m \cdot \mathbf{1}}(\mathbf{z})$, причем на двух “соседних” кубах искомая функция принимает противоположные значения. Резюмируя все сказанное выше, получаем, что под знаком предела стоит сумма взятых с определенным знаком (причем знаки чередуются в шахматном порядке) значений функции Ψ во всевозможных двоичных кубах ранга $m+1$, лежащих в $\Delta_{k \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{i}}$.

Приступим к доказательству. Так как для ряда (1) выполнено условие (7), то имеет место равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{Nk}} \sum_{\mathbf{n} = 2^m \cdot \mathbf{1}}^{(2^m + 2^k - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) c_{\mathbf{n}} = 0. \quad (10)$$

Действительно, под знаком предела стоит среднее арифметическое 2^{Nk} слагаемых, “равномерно” стремящихся к нулю. Подставим в выражение под знаком предела в формуле (10) вместо коэффициентов $c_{\mathbf{n}}$ их выражения в формуле (4). Получим, что при $m \geq k$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{Nk}} \sum_{\mathbf{n} = 2^m \cdot \mathbf{1}}^{(2^m + 2^k - 1) \cdot \mathbf{1}} \sum_{\mathbf{j} = \mathbf{0}}^{2^{(m+1) \cdot \mathbf{1}} - \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) \omega_{\mathbf{n}}^{\mathbf{j}}((m+1) \cdot \mathbf{1}) \Psi(\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}) \\ &= \frac{1}{2^{Nk}} \sum_{\mathbf{j} = \mathbf{0}}^{2^{(m+1) \cdot \mathbf{1}} - \mathbf{1}} \Psi(\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^{\mathbf{j}}) \left(\sum_{\mathbf{n} = 2^m \cdot \mathbf{1}}^{(2^m + 2^k - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим сумму выражений, стоящих в скобках. Считаем в дальнейшем, что $m \geq k$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{n} = 2^m \cdot \mathbf{1}}^{(2^m + 2^k - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \\ &= r_{m \cdot \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) r_{m \cdot \mathbf{1}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \sum_{\mathbf{n} = \mathbf{0}}^{(2^k - 1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^k} + \mathbf{0} \right) \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{j}}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что если j такое, что $i \cdot 2^{m+1-k} \leq j \leq (i+1) \cdot 2^{m+1-k} - 1$, то

$$\omega_n \left(\frac{j}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) = \omega_n \left(\frac{i}{2^k} + \mathbf{0} \right)$$

и

$$\sum_{n=\mathbf{0}}^{(2^k-1) \cdot \mathbf{1}} \omega_n \left(\frac{i}{2^k} + \mathbf{0} \right) \omega_n \left(\frac{j}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) = 2^{Nk}.$$

Если же j не лежит в указанных пределах, то в силу свойств функций Уолша выражение в скобках в формуле (11) равно нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{Nk}} \sum_{n=2^m \cdot \mathbf{1}}^{(2^m+2^k-1) \cdot \mathbf{1}} \omega_n \left(\frac{i}{2^k} + \mathbf{0} \right) c_n \\ &= r_{m \cdot \mathbf{1}} \left(\frac{i}{2^k} + \mathbf{0} \right) \sum_{j=i \cdot 2^{m+1-k}}^{(i+1)2^{m+1-k}-1} r_{m \cdot \mathbf{1}} \left(\frac{j}{2^{m+1}} + \mathbf{0} \right) \Psi(\Delta_{(m+1) \cdot \mathbf{1}}^j), \end{aligned}$$

а так как предел левой части последней формулы равен нулю и $r_{m \cdot \mathbf{1}}(i/2^k + \mathbf{0}) = \pm 1$, то и предел правой тоже равен нулю, что и требовалось. Теорема доказана.

Следствием последней теоремы служит

ТЕОРЕМА 4. Пусть A – нетривиальное (т.е. $A \neq (J^*)^N$) M -множество для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости ($\rho < 1/2$). Пусть $\Psi(\Delta)$ – функция двоичного интервала, соответствующая ряду (1), который “реализует” M -множество A . Тогда для любого $k \geq 0$ и для любого вектора i такого, что $\mathbf{0} \leq i \leq (2^k - 1)\mathbf{1}$, имеет место равенство (9).

Далее мы введем понятия верхнего и нижнего индекса совершенного множества $A \subset (J^*)^N$. Эти понятия будут практически полностью аналогичны тем, что вводились в работе [1], причем в силу особенностей модифицированного отрезка формулировки выглядят проще.

Пусть A – непустое совершенное (в топологии $(J^*)^N$) множество. На двоичных кубах $\Delta \subset (J^*)^N$ построим функцию $\beta_A(\Delta)$. Пусть $\beta_A([0, 1]^N) = 1$. При этом считаем, что $\beta_A(\Delta) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \cap \Delta = \emptyset$. Построим функцию β_A на двоичных кубах по индукции. Предположив, что функция $\beta_A(\Delta)$ определена на всех двоичных кубах ранга n , где $n \leq t$, определим ее на всех двоичных кубах ранга $t+1$. Пусть имеется куб Δ_t . Тогда $\Delta_t = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_N} \Delta_{m+1}^\sigma$ – дизъюнктивное объединение 2^N двоичных кубов ранга $t+1$. Если $\beta_A(\Delta_t) = 0$, то и $\beta_A(\Delta_{m+1}^\sigma) = 0$ при всех σ . Пусть $\beta_A(\Delta_t) \neq 0$. Это означает, что $A \cap \Delta_t \neq \emptyset$. Ясно, что $A \cap \Delta_{m+1}^\sigma \neq \emptyset$ хотя бы для одного $\sigma \in \Sigma_N$. Если ровно для k векторов σ выполняется условие $A \cap \Delta_{m+1}^\sigma \neq \emptyset$, то положим $\beta_A(\Delta_{m+1}^\sigma) = \beta_A(\Delta_t)/k$, если $A \cap \Delta_{m+1}^\sigma \neq \emptyset$, и $\beta_A(\Delta_{m+1}^\sigma) = 0$ в противном случае. Таким образом, мы определим функцию $\beta_A(\Delta)$ на всех двоичных кубах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – непустое совершенное подмножество $(J^*)^N$ и $z \in A$. Назовем индексом точки $z \in A$ относительно множества A число

$$\text{ind}_A z = \sup \{ j \geq 0 : \beta_A(\Delta_n) = o(|\Delta_n|^j), n \rightarrow \infty \},$$

где Δ_n – вложенная последовательность двоичных кубов, причем для всех n $z \in \Delta_n$ и ранг Δ_n равен n .

Отметим, что данное определение корректно, т.е. мы берем точную верхнюю грань непустого множества. Действительно, $\beta_A(|\Delta_n|) = o(1) = o(|\Delta_n|^0)$, так как если это не так, то $\beta_A(\Delta_n) = C > 0$ для всех $n \geq N_0$, а это означает, что точка z – изолированная (в топологии $(J^*)^N$) точка множества A , что противоречит тому, что A – совершенное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *верхним индексом* совершенного множества $A \subset (J^*)^N$ число

$$\overline{\text{ind}} A = \sup_{z \in A} \text{ind}_A z,$$

а *нижним индексом* множества A – число

$$\underline{\text{ind}} A = \inf_{z \in A} \text{ind}_A z.$$

Если $\overline{\text{ind}} A = \underline{\text{ind}} A$, то их общее значение обозначим через $\text{ind } A$ и назовем *индексом* множества A .

Теперь мы в состоянии сформулировать следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Для любых чисел a, b таких, что $0 \leq a \leq b \leq 1$, существует совершенное U -множество A для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости ($\rho < 1/2$), причем $\underline{\text{ind}} A = a$, $\overline{\text{ind}} A = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала построим совершенное множество B с $\text{ind } B = c$, где c – любое число из отрезка $[0, 1]$. Для этого построим последовательность целых неотрицательных чисел $\{p_n, n \geq 0\}$ со следующими свойствами: $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$, т.е. указанная разность есть либо нуль, либо единица и $p_n/n \rightarrow c$; кроме того, если $c < 1$, то $p_n > nc + \sqrt{n}$, начиная с некоторого $n = n(c)$, а если $c = 1$, то $p_n - n \rightarrow -\infty$.

Очевидно, что во всех случаях указанную последовательность можно найти. Построим по индукции функцию двоичного куба $\Phi(\Delta)$. Положим $\Phi([0, 1]^N) = 1$. Далее, если функция Φ задана на двоичных кубах Δ_n^i ранга n , построим ее на двоичных кубах ранга $n + 1$. Если $\Phi(\Delta_n^i) = 0$, то $\Phi(\Delta_{n+1}^{2i+\sigma}) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_N$. Если же $\Phi(\Delta_n^i) \neq 0$, то возможны два варианта. При $p_{n+1} - p_n = 1$ положим

$$\Phi(\Delta_{n+1}^{2i+\sigma}) = \frac{1}{2^N} \Phi(\Delta_n^i)$$

для всех $\sigma \in \Sigma_N$. Если же $p_{n+1} - p_n = 0$, то положим

$$\Phi(\Delta_{n+1}^{2i}) = \Phi(\Delta_n^i),$$

а для всех $\sigma \neq 0$ положим

$$\Phi(\Delta_{n+1}^{2i+\sigma}) = 0.$$

Таким образом, мы построили функцию Φ . Пусть

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\Delta_n^i : \Phi(\Delta_n^i) > 0} \Delta_n^i.$$

Из свойств последовательности $\{p_n\}$ следует, что $p_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому для любой точки $z \in B$ и для любого куба Δ , содержащего z , существует такой двоичный куб $\Delta_0 \subset \Delta$, что $z \notin \Delta_0$ и $\Phi(\Delta_0) > 0$. При этом куб Δ_0 должен содержать точки из множества B . Значит, множество B не имеет изолированных (в топологии $(J^*)^N$) точек. Кроме того, очевидно, что B – замкнутое множество. В итоге мы имеем совершенное множество B . Процедурой, описанной перед определением 2, построим функцию $\beta_B(\Delta)$. По построению ясно, что $\Phi(\Delta) \equiv \beta_B(\Delta)$. Из построения также следует, что для любого двоичного куба Δ ранга n либо $\Phi(\Delta) = 0$ (если $\Delta \cap B = \emptyset$), либо $\Phi(\Delta) = 1/2^{p_n N}$ (если $\Delta \cap B \neq \emptyset$). Покажем, что $\text{ind } B = c$.

Пусть z – любая точка множества B и $\{\Delta_n\}$ – последовательность двоичных кубов (ранг Δ_n равен n), содержащих эту точку. Тогда

$$\beta_B(\Delta_n) = \Phi(\Delta_n) = \frac{1}{2^{p_n N}} \leq \frac{1}{2^{Nnc}} \cdot \frac{1}{2^{N\sqrt{n}}} = \frac{1}{2^{N\sqrt{n}}} |\Delta_n|^c = o(|\Delta_n|^c).$$

С другой стороны, так как $p_n/n \rightarrow c$, то $p_n/n < c + \varepsilon$, начиная с некоторого n , поэтому

$$\beta_B(\Delta_n) = \frac{1}{2^{p_n N}} \geq \frac{1}{2^{Nn(c+\varepsilon)}} = |\Delta_n|^{c+\varepsilon}.$$

Значит, $\beta_B(\Delta_n) \neq o(|\Delta_n|^{c+\varepsilon})$. Так как $\varepsilon > 0$ можно выбирать любым, то $\text{ind}_B z = c$. В силу произвольности точки $z \in B$ мы имеем равенство $\text{ind } B = c$.

Итак, для любого $c \in [0, 1]$ мы построили совершенное множество B с $\text{ind } B = c$. Пусть B_i , $i = 1, 2$, – множества указанного типа с $\text{ind } B_1 = a$ и $\text{ind } B_2 = b$. Положим

$$A = \left(B_1 \cap \left(\left[0 + 0, \frac{1}{2} - 0 \right] \times (J^*)^{N-1} \right) \right) \cup \left(B_2 \cap \left(\left[\frac{1}{2} + 0, 1 - 0 \right] \times (J^*)^{N-1} \right) \right).$$

Заметим, что в силу условия $p_1 = 1$ оба множества, стоящие под знаком объединения, непустые. Очевидно, A – совершенное множество с $\underline{\text{ind}} A = a$ и $\overline{\text{ind}} A = b$. Покажем, что A – U -множество для рядов (1) при ρ -регулярной сходимости, где $\rho < 1/2$.

Предположим обратное, т.е. то, что A – M -множество для рядов (1). Тогда существует ряд (1), не все коэффициенты которого нулевые, сходящийся к нулю вне A . Построим согласно формуле (2) аддитивную функцию двоичного интервала $\Psi(\Delta)$, соответствующую ряду (1). Из теоремы 2 следует, что существует двоичный интервал Δ , при котором $\Psi(\Delta) \neq 0$. В силу аддитивности функции $\Psi(\Delta)$ найдется двоичный куб Δ_k^i с $k \geq 1$, для которого $\Psi(\Delta_k^i) = d \neq 0$.

Учитывая следствие 1, отметим, что если $A \cap \Delta = \emptyset$, то $\Psi(\Delta) = 0$. Из этого следует, что $A \cap \Delta_k^i \neq \emptyset$; в частности, $\beta_A(\Delta_k^i) > 0$. Кроме того, для всех двоичных кубов Δ , для которых выполняется равенство $\beta_A(\Delta) = 0$, выполняется и равенство $\Psi(\Delta) = 0$.

Пусть $\{p_n\}$ – последовательность, по которой мы строили B_1 , если $\Delta_k^i \subset [0 + 0, 1/2 - 0] \times [0 + 0, 1 - 0]^{N-1}$, и последовательность, по которой мы строили B_2 , если $\Delta_k^i \subset [1/2 + 0; 1 - 0] \times [0 + 0, 1 - 0]^{N-1}$. Рассмотрим последовательность номеров n_m , для которых $p_{n_m+1} - p_{n_m} = 0$. Эта последовательность бесконечна в силу того, что $0 \leq p_{n+1} - p_n \leq 1$ и $p_n/n \rightarrow \beta$, если $\beta < 1$, и $p_n - n \rightarrow -\infty$, если $\beta = 1$. Покажем,

что для этих номеров n_m при $n_m \geq k$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=i \cdot 2^{n_m+1-k}}^{(i+1) \cdot 2^{n_m+1-k}-1} r_{n_m \cdot 1} \left(\frac{j}{2^{n_m+1}} + 0 \right) \Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = d \neq 0. \quad (12)$$

Если мы это покажем, то придем к противоречию с равенством (9) и получим, что множество A является U -множеством для рядов (1).

Итак, докажем соотношение (12). По построению из того, что $p_{n_m} = p_{n_m+1}$, следует, что $\beta_A(\Delta_{n_m+1}^j) = 0$, если хотя бы одно из чисел j_s , $s = 1, \dots, N$, нечетно. В этом случае и $\Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = 0$. Если же все j_s , $s = 1, \dots, N$, четные, то $r_{n_m \cdot 1}(j/2^{n_m+1} + 0) = 1$. Тогда сумма, стоящая в левой части (12), равна

$$\sum_{\substack{j: j_s \equiv 0 \pmod{2} \\ s=1, \dots, N}} r_{n_m \cdot 1} \left(\frac{j}{2^{n_m+1}} + 0 \right) \Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = \sum_{\substack{j: j_s \equiv 0 \pmod{2} \\ s=1, \dots, N}} \Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = \sum_j \Psi(\Delta_{n_m+1}^j)$$

(у всех сумм мы опустили пределы суммирования, полагая их равными тем, что стоят в формуле (12)). В последней выкладке первое равенство имеет место в силу того, что $r_{n_m \cdot 1}(j/2^{n_m+1} + 0) = 1$, если все j_s четные, а второе равенство верно из-за того, что $\Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = 0$, если среди чисел j_s есть нечетное. Но интервалы $\Delta_{n_m+1}^j$, взятые при всех j , которые лежат в указанных в формуле (12) пределах, попарно не пересекаясь, составляют в объединении Δ_k^i , значит,

$$\sum_j \Psi(\Delta_{n_m+1}^j) = \Psi(\Delta_k^i) = d \neq 0.$$

Формула (12), а с ней и вся теорема, доказана.

Рассмотрим теперь перестановки функций Уолша, сохраняющие ранг функций. А именно, пусть для каждого $s = 1, \dots, N$ задана перестановка множества целых неотрицательных чисел $(i_0^s, i_1^s, \dots)$, причем $2^{k_s} \leq n_s \leq 2^{k_s+1} - 1$ тогда и только тогда, когда $2^{k_s} \leq i_n^s \leq 2^{k_s+1} - 1$. Зададим функцию $\omega_n^*(z_s)$ как $\omega_{i_n^s}(z_s)$. Заметим, что в нашей работе мы рассматривали функции Уолша наборами $\omega_{n_s}(z_s)$ при $2^{k_s} \leq n_s \leq 2^{k_s+1} - 1$ при всевозможных $k_s = 0, 1, \dots$, не используя при этом порядок функций $\omega_{n_s}(z_s)$ внутри каждого набора. Поэтому все результаты нашей работы остаются в силе, если вместо функций $\omega_n(z)$ мы используем функции

$$\omega_n^*(z) = \prod_{s=1}^N \omega_{n_s}^*(z_s).$$

Тогда теоремы 1–5 и все следствия к этим теоремам будут иметь место и в том случае, если вместо рядов (1) мы будем рассматривать ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n^*(z)$.

Отметим также, что при доказательстве теоремы 5 мы не использовали то, что ряд (1) сходится ρ -регулярно вне множества A , а использовали более слабые условия, а именно, условие (7) и условие, состоящее в том, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{n \cdot 1} - 1}(z) = 0$$

при $z \notin A$. Таким образом, теорему 5 можно сформулировать в более сильном варианте: если для ряда (1) выполнено условие (7) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^{n-1}-1}(z) = 0$$

вне одного из множеств A , построенных в теореме (5), то искомый ряд является тождественно нулевым. При этом вместо рядов (1) можно рассматривать ряды $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_n^*(z)$. Аналогичным образом можно усилить и остальные результаты нашей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Плотников, “Вопросы единственности для некоторых классов двумерных рядов Хаара”, *Деп. ВИНТИ № 2213-B2001*, ВИНТИ, М., 2001.
- [2] Н. Я. Виленкин, “Об одном классе полных ортогональных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11** (1947), 363–400.
- [3] А. А. Шнейдер, “О единственности разложений функций по системе Уолша”, *Матем. сб.*, **24**:2 (1949), 279–300.
- [4] N. J. Fine, “On the Walsh functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65**:3 (1949), 372–414.
- [5] J. E. Coury, “A class of Walsh M -sets of measure zero”, *J. Math. Anal. Appl.*, **31**:2 (1970), 318–320.
- [6] В. А. Скворцов, “Об h -мере M -множеств для системы Уолша”, *Матем. заметки*, **21**:3 (1977), 335–340.
- [7] В. А. Скворцов, *Вопросы единственности разложения функций в ряды по системам Хаара и Уолша и обобщенные интегралы*, Дисс. ... д.ф.-м.н., МГУ, М., 1982.
- [8] Х. О. Мовсисян, “О единственности двойных рядов по системам Хаара и Уолша”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **9**:1 (1974), 40–61.
- [9] В. А. Скворцов, “О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша”, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, **28**:6 (1973), 77–79.
- [10] С. Ф. Лукомский, “О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша”, *Матем. сб.*, **180**:7 (1989), 937–945.
- [11] S. F. Lukomskii, “On a U -set for multiple Walsh series”, *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.
- [12] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
- [13] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша: теория и применение*, Наука, М., 1987.
- [14] С. Ф. Лукомский, *Представление функций рядами Уолша и коэффициенты сходящихся рядов Уолша*, Дисс. ... д.ф.-м.н., Саратов, 1996.

М. Г. Плотников

Вологодская государственная молочнохозяйственная академия
им. Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступило

24.03.2004

Исправленный вариант

21.04.2004