Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Рочев, Об одном обобщении теоремы Поля, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 280–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:52:07

Об одном обобщении теоремы Поля

И. П. Рочев

Рассматриваются обобщения теоремы Поля на случай целых функций, принимающих алгебраические значения в натуральных или целых точках.

Библиография: 2 названия.

В работе приняты следующие обозначения: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел. Через $[\cdot]$ обозначается целая часть вещественного числа, через $\lceil \cdot \rceil$ – максимум модуля алгебраического числа и всех его сопряженных, через $|f|_R$ – максимум функции $f(z)$ комплексного переменного на круге радиуса R (с центром в нуле).

Известна следующая теорема.

ТЕОРЕМА ПОЛЯ. *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет условиям $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ и $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma < \ln 2$, то $f(z)$ – многочлен.*

Рассматривались различные обобщения последнего утверждения. В работе [1] собраны основные известные на сегодня результаты (ряд из них там же и доказываются) и приведена достаточно обширная библиография. Отметим также работу [2], где рассматривается обобщение теоремы Поля, близкое по духу к полученным нами результатам.

Настоящая работа посвящена одному из обобщений теоремы Поля, которое, насколько известно автору, до сих пор не рассматривалось в научной литературе (в той форме, в которой оно изложено здесь). А именно, основной результат может быть (грубо) сформулирован следующим образом.

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию $f(U) \subset \mathbb{K}$, где U – это либо $\mathbb{N}$ (теорема 1), либо $\mathbb{Z}$ (теорема 2), $\mathbb{K}$ – поле алгебраических чисел (конечное расширение $\mathbb{Q}$). Пусть для $n \in U$ известны оценки на знаменатель $f(n)$ и на $\lceil f(n) \rceil$ вида $O(e^{\alpha|n|})$, где $\alpha \geq 0$ – некоторая постоянная. Если при этом $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где γ меньше некоторой положительной границы, зависящей только от $\mathbb{K}$ (точнее, от степени $\mathbb{K}$) и α (и U), то $f(z)$ – многочлен.

В работе показано, что в качестве границы для γ можно взять $\exp\{-A\alpha h - Bh\}$, где $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ – степень поля $\mathbb{K}$, A и B – некоторые абсолютные постоянные (по поводу точных формулировок см. далее теоремы 1 и 2). С другой стороны, примеры, приведенные в замечаниях к теоремам, позволяют судить о точности оценок для γ .

1. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)$ – целые функции,

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_L(z) \end{pmatrix},$$

$1 = n_0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_L$ – целые числа. Пусть при всех целых j и n , удовлетворяющих условиям $0 \leq j < L$ и $n_j \leq n < n_{j+1}$, выполнено

$$\text{rk}(\Phi(n_1), \dots, \Phi(n_j), \Phi(n)) \leq j.$$

Для $\theta > 1$ определим

$$h(\theta) := (2\theta^2 - 1) \ln \theta - (\theta^2 - 1) \ln(\theta^2 - 1).$$

Определим $\Delta = \det(\varphi_k(n_j))_{k,j=1}^L$. Тогда

$$|\Delta| \leq L! \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \prod_{j=1}^L |\varphi_{\sigma(j)}|_{\theta n_j} \cdot \exp\{-h(\theta)n_j + c \ln(n_j + c^2)\},$$

где $\mathfrak{S}_L$ – группа подстановок множества $\{1, 2, \dots, L\}$, а $c > 2$ – постоянная, зависящая только от θ .

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)$ – целые функции,

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \vdots \\ \varphi_L(z) \end{pmatrix},$$

$1 = \nu_0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ – целые числа, $n_j := (-1)^{\nu_j} \lfloor \nu_j/2 \rfloor$. Пусть при всех целых j и ν , удовлетворяющих условиям $0 \leq j < L$ и $\nu_j \leq \nu < \nu_{j+1}$, для $n = n(\nu) := (-1)^\nu \lfloor \nu/2 \rfloor$ выполнено

$$\text{rk}(\Phi(n_1), \dots, \Phi(n_j), \Phi(n)) \leq j.$$

Для $\theta > 1$ определим

$$\widehat{h}(\theta) := (\theta^2 + 1) \ln(\theta^2 + 1) - (\theta^2 - 1) \ln(\theta^2 - 1) - 2 \ln(2\theta).$$

Определим $\Delta = \det(\varphi_k(n_j))_{k,j=1}^L$. Тогда

$$|\Delta| \leq L! \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \prod_{j=1}^L |\varphi_{\sigma(j)}|_{\theta(|n_j|+1)} \cdot \exp\left\{-\widehat{h}(\theta)|n_j| + \frac{c}{2} \ln(|n_j| + c^2)\right\},$$

где $c > 2$ – постоянная, зависящая только от θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти дословно повторяет доказательство леммы 3 из [1], только вместо леммы 2 из [1] используется лемма 5 из [1].

Для $k \in \mathbb{N}_0$ определим многочлены

$$\Delta_k(z) = \binom{z + \lfloor k/2 \rfloor}{k}, \quad (1)$$

где

$$\binom{z}{0} = 1, \quad \binom{z}{n} = \frac{z(z-1) \cdots (z-n+1)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Хорошо известно, что для $n \in \mathbb{N}_0$ и $z \in \mathbb{Z}$ многочлены $\binom{z}{n}$ принимают целые значения. Мы будем в дальнейшем использовать этот факт, не оговаривая особо.

ЛЕММА 3. Пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$|\Delta_k(x)| \leq \Delta_k(|x|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \geq 0$, то $|\Delta_k(x)| = \Delta_k(|x|)$. Если же $x < 0$, то

$$\Delta_k(x) = \binom{x + \lfloor k/2 \rfloor}{k} = (-1)^k \binom{k-1-x-\lfloor k/2 \rfloor}{k},$$

откуда

$$|\Delta_k(x)| = \binom{|x| + k - 1 - \lfloor k/2 \rfloor}{k} \leq \binom{|x| + \lfloor k/2 \rfloor}{k} = \Delta_k(|x|),$$

поскольку $k-1-\lfloor k/2 \rfloor \leq \lfloor k/2 \rfloor$ и при фиксированном $k \in \mathbb{N}_0$ функция $\binom{n}{k}$ как функция от $n \in \mathbb{N}_0$ не убывает.

Рассмотрим функцию

$$u(k, R) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{1}{4} + \frac{R^2}{k^2} \right) + 2R \arctg \frac{k}{2R}, \quad k, R > 0. \quad (2)$$

ЛЕММА 4. При $R \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено

$$|\Delta_k|_R = \exp \{ u(k+1, R) + O(\ln(R+2) + \ln(k+2)) \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $k=0$ тривиален. При $k>0$ имеем

$$\Delta_k(z) = \begin{cases} \frac{z(z+m)(z^2-1^2)(z^2-2^2) \cdots (z^2-(m-1)^2)}{(2m)!}, & \text{если } k=2m, \\ \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \cdots (z^2-m^2)}{(2m+1)!}, & \text{если } k=2m+1. \end{cases}$$

Поэтому

$$|\Delta_k|_R = \frac{\prod_{j=1}^m (R^2 + j^2)}{k!} \exp \{ O(\ln(R+k)) \}, \quad \text{где } m = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \in \mathbb{N}_0.$$

Применяя формулу Стирлинга в форме

$$\ln k! = (k+1) \ln(k+1) - k + O(\ln(k+2))$$

и учитывая, что ввиду монотонности функции $\ln(R^2 + x^2)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \ln(R^2 + j^2) &= \int_0^m \ln(R^2 + x^2) dx + O(\ln(R^2 + k^2)) \\ &= \int_0^{(k+1)/2} \ln(R^2 + x^2) dx + O(\ln(R + k)) \\ &= \frac{k+1}{2} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{4} + R^2\right) - k + 2R \arctg \frac{k+1}{2R} + O(\ln(R + k)), \end{aligned}$$

получаем требуемое.

ЛЕММА 5. Пусть $g(x, y): X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$, где X, Y – подмножества $\mathbb{R}$. Пусть для любых $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ таких, что $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, выполнено

$$g(x_1, y_2)g(x_2, y_1) \leq g(x_1, y_1)g(x_2, y_2). \quad (3)$$

Тогда при любом $L \in \mathbb{N}$, любых $x_1, \dots, x_L \in X$, $y_1, \dots, y_L \in Y$ таких, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_L$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_L$, и для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$ выполнено

$$\prod_{j=1}^L g(x_j, y_{\sigma(j)}) \leq \prod_{j=1}^L g(x_j, y_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – любая подстановка из $\mathfrak{S}_L$. Предположим, что существует $j \in \{1, \dots, L-1\}$ такое, что $\sigma(j) > \sigma(j+1)$. Тогда из условий леммы следует, что

$$g(x_j, y_{\sigma(j)})g(x_{j+1}, y_{\sigma(j+1)}) \leq g(x_j, y_{\sigma(j+1)})g(x_{j+1}, y_{\sigma(j)}).$$

Пусть $\pi := \sigma \circ (j, j+1) \in \mathfrak{S}_L$, т.е.

$$\pi(k) = \begin{cases} \sigma(k) & \text{при } k \neq j, j+1, \\ \sigma(j+1) & \text{при } k = j, \\ \sigma(j) & \text{при } k = j+1. \end{cases}$$

Тогда, во-первых, число инверсий π на единицу меньше числа инверсий σ , а во-вторых,

$$\prod_{j=1}^L g(x_j, y_{\sigma(j)}) \leq \prod_{j=1}^L g(x_j, y_{\pi(j)}).$$

За конечное число шагов можно прийти до подстановки с нулевым числом инверсий, т.е. до тождественной.

Применяя лемму 5 к функции $e^{g(x,y)}$, получаем следующую аддитивную версию этого утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $g(x, y): X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, где X, Y – подмножества $\mathbb{R}$. Пусть для любых $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ таких, что $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, выполнено

$$g(x_1, y_2) + g(x_2, y_1) \leq g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2). \quad (4)$$

Тогда при любом $L \in \mathbb{N}$, любых $x_1, \dots, x_L \in X$, $y_1, \dots, y_L \in Y$ таких, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_L$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_L$, и для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$ выполнено

$$\sum_{j=1}^L g(x_j, y_{\sigma(j)}) \leq \sum_{j=1}^L g(x_j, y_j).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_L$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_L$ – вещественные числа. Тогда для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$

$$\sum_{j=1}^L x_j y_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=1}^L x_j y_j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем следствие 1 к $g(x, y) = xy$. Поскольку $x_1 y_2 + x_2 y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2$ эквивалентно $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0$, а последнее неравенство верно в силу $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, получаем требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_L$ – целые числа, а $0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_L$ – вещественные числа. Тогда для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$

$$\prod_{j=1}^L \binom{x_j + y_{\sigma(j)}}{x_j} \leq \prod_{j=1}^L \binom{x_j + y_j}{x_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 5 к $g(x, y) = \binom{x+y}{x}$, $X = \mathbb{N}_0$, $Y = [0, +\infty)$. Для проверки условия (3) необходимо установить неубывание функции $g_0(x) := g(x, y_2)/g(x, y_1)$. Но

$$\frac{g_0(x+1)}{g_0(x)} = \frac{x + y_2 + 1}{x + y_1 + 1} \geq 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_L$ и $1 \leq R_1 \leq \dots \leq R_L$ – вещественные числа. Тогда для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$

$$\sum_{j=1}^L u(k_j, R_{\sigma(j)}) \leq \sum_{j=1}^L u(k_j, R_j),$$

где функция $u(k, R)$ определена в (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем следствие 1 к $u(x, y)$. Для проверки (4) необходимо установить неубывание функции $u_0(y) := u(x_2, y) - u(x_1, y)$ для фиксированных $1 \leq x_1 \leq x_2$. Имеем

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2y},$$

откуда следует, что $u'_0(y) \geq 0$ при $y \in [1, +\infty)$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_L$ и $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_L$ – целые числа. Тогда для любой подстановки $\sigma \in \mathfrak{S}_L$

$$\prod_{j=1}^L \Delta_{k_{\sigma(j)}}(n_j) \leq \prod_{j=1}^L \Delta_{k_j}(n_j),$$

где многочлены $\Delta_k(z)$ определены в (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяем лемму 5 к $g(x, y) = \Delta_y(x)$, $X = Y = \mathbb{N}_0$. Заметим, что $g(x, y) = 0$ при $x < y/2$ и $g(x, y) > 0$ в противном случае (если $x, y \in \mathbb{N}_0$). Поэтому в случае $x_1 < y_2/2$ условие (3) выполнено (в левой части стоит 0). В противном случае достаточно убедиться в неубывании функции $g_0(x) = g(x, y_2)/g(x, y_1)$ при $x \geq y_2/2$. Но

$$\begin{aligned} \frac{g_0(x+1)}{g_0(x)} &= \frac{x+1 + \lfloor y_2/2 \rfloor}{x + \lfloor y_2/2 \rfloor - y_2 + 1} \cdot \frac{x + \lfloor y_1/2 \rfloor - y_1 + 1}{x+1 + \lfloor y_1/2 \rfloor} \\ &= \frac{x+1 + \lfloor y_2/2 \rfloor}{x+1 + \lfloor y_1/2 \rfloor} \cdot \frac{x+1 - \lceil y_1/2 \rceil}{x+1 - \lceil y_2/2 \rceil} \geq 1, \end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое, не меньшее x . Следствие доказано.

ЛЕММА 6. Пусть $\xi \neq 0$ – целое алгебраическое число, $\deg \xi = n$. Тогда $|\xi| \geq |\bar{\xi}|^{1-n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n) \in \mathbb{Z}[x]$$

– минимальный многочлен числа $\xi = \xi_1$, то $a_0 \neq 0$ (ввиду неприводимости $p(x)$). Следовательно,

$$1 \leq |a_0| = |\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n| \leq |\xi| \cdot |\bar{\xi}|^{n-1}.$$

ЛЕММА 7. Пусть $F(z)$ – целая функция, причем $F(n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $|F(z)| = O(e^{\gamma|z|})$ при некотором $\gamma < 1$, то $F(z) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 7 остается верной, если условие $\gamma < 1$ заменить на $\gamma < \pi$. Это известная теорема Карлсона (см., например, [1; лемма 4]). Лемма 7 приводится здесь в виду простоты ее доказательства и для полноты изложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Допустим, что $F(z) \not\equiv 0$. Представим функцию $F(z)$ в виде $F(z) = Az^\lambda F_1(z)$, где $F_1(z)$ – целая функция, удовлетворяющая условию $F_1(0) = 1$. При этом $F_1(n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $|F_1(z)| = O(e^{\gamma|z|})$. Пусть R – достаточно большое целое. Определим функцию

$$G(z) = F_1(z) \prod_{n=1}^{R-1} \frac{R^2 - nz}{R(z - n)}.$$

Тогда $G(z)$ – также целая функция и по принципу максимума $|G(0)| \leq |G|_R$. Однако $|G|_R = |F_1|_R = O(e^{\gamma R})$, так как

$$\left| \frac{R^2 - nz}{R(z - n)} \right| = \left| \frac{z\bar{z} - nz}{R(z - n)} \right| = 1 \quad \text{при} \quad |z| = R,$$

а $|G(0)| = R^{R-1}/(R-1)! = \exp\{R + O(\ln R)\}$. При $R \geq R_0$ последние оценки противоречивы, откуда следует утверждение леммы.

2. Основные результаты. Пусть $\alpha, \beta \geq 0$, $\mathbb{K}$ – поле алгебраических чисел степени $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = h$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{K}$. Обозначим $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$, $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$,

$$\gamma = \exp\{-1.5(h-1)\delta - 0.5(h-1)\varepsilon - 2\alpha - 2h \ln 2\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}$. Пусть существует последовательность натуральных чисел d_n такая, что $d_n f(n) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ для всех $n = 1, 2, \dots$, причем $d_n = O(e^{\alpha n})$ и $|\overline{d_n f(n)}| = O(e^{\beta n})$. Если $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, то $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – большое целое. Рассмотрим функции

$$\left\{ \binom{z}{k} f(z)^m : 0 \leq k < N, m = 0, 1 \right\} = \{\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)\}, \quad L = 2N.$$

Пусть $\mathcal{M} := \|\varphi_k(l)\|_{\substack{k=1, \dots, L, \\ l \in \mathbb{N}}}$ – матрица размера $L \times \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Выполнена оценка $\text{rk } \mathcal{M} < L$ (при $N > N_0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное. Пусть $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_L$ – минимальный относительно лексикографического порядка набор целых чисел, для которого $\Delta := \det \|\varphi_k(n_j)\|_{k,j=1}^L \neq 0$ (т.е. n_1 – номер первого ненулевого столбца, n_2 – номер первого столбца, линейно независимого с n_1 -м, и т.д., n_L – номер первого столбца, линейно независимого со столбцами $n_1, \dots, n_{L-1}$). Для оценки Δ сверху применим лемму 1 с

$$\theta = \frac{1}{1.5\gamma} = \frac{1}{1.5} \cdot \exp\{1.5(h-1)\delta + 0.5(h-1)\varepsilon + 2\alpha + 2h \ln 2\} \geq \frac{1}{1.5} \cdot 4 = \frac{8}{3}. \quad (5)$$

Для функции $\varphi_{\sigma(j)}(z) = \binom{z}{k} f(z)^m$ для некоторых k и m имеем¹

$$|\varphi_{\sigma(j)}|_{\theta n_j} \leq \binom{\theta n_j + k - 1}{k} e^{m\gamma\theta n_j + c_1}.$$

Лемма 1 с учетом следствий 2 и 3 к лемме 5 дает

$$|\Delta| \leq L! \prod_{j=1}^L \binom{\theta n_j + k(j) - 1}{k(j)} \cdot \exp\{(m(j)\gamma\theta - h(\theta))n_j + c \ln(n_j + c^2) + c_1\}, \quad (6)$$

где $k(j) = \lfloor (j-1)/2 \rfloor$, $m(j) = \lfloor (j-1)/N \rfloor$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \xi &:= d_{n_1} \cdots d_{n_L} \Delta = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \text{sgn } \sigma \prod_{j=1}^L d_{n_j} \varphi_{\sigma(j)}(n_j) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}, \\ \deg \xi &\leq h, \quad |\xi| \leq L! \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_L} \prod_{j=1}^L |\overline{d_{n_j} \varphi_{\sigma(j)}(n_j)}|. \end{aligned}$$

Если $\varphi_{\sigma(j)}(z) = \binom{z}{k} f(z)^m$, то

$$|\overline{d_{n_j} \varphi_{\sigma(j)}(n_j)}| = d_{n_j}^{1-m} \binom{n_j}{k} |\overline{d_{n_j} f(n_j)}|^m \leq 2^{n_j} \exp\{((1-m)\alpha + m\beta)n_j + c_2\}.$$

Заметим, что

$$(1-m)\alpha + m\beta = (1-m')\varepsilon + m'\delta,$$

¹Здесь и далее константы $c_1, c_2, \dots$ будут зависеть от α, β, h , констант в $O(\cdot)$ из условий и не будут зависеть от N .

где $m' = m$, если $\alpha \leq \beta$, и $m' = 1 - m$ иначе. С учетом этого и следствия 2 к лемме 5 получаем

$$|\xi| \leq L! \prod_{j=1}^L \exp\{(\ln 2 + \varepsilon + (\delta - \varepsilon)m(j))n_j + c_2\},$$

где, как и раньше, $m(j) = \lfloor (j-1)/N \rfloor$.

Применяя лемму 6, получаем

$$\begin{aligned} |\Delta| &\geq (d_{n_1} \cdots d_{n_L})^{-1} |\xi|^{1-h} \\ &\geq (L!)^{1-h} \prod_{j=1}^L \exp\{-(\alpha + (h-1)(\ln 2 + \varepsilon + m(j)(\delta - \varepsilon)))n_j - c_3\}. \end{aligned}$$

Сравнивая с оценкой сверху (6), заключаем

$$0 \leq c_4 N \ln N + \sum_{j=1}^L \left(\ln \binom{\theta n_j + k(j) - 1}{k(j)} + D_j n_j + c \ln(n_j + c^2) \right),$$

где

$$\begin{aligned} D_j &= m(j)\gamma\theta - h(\theta) + \alpha + (h-1)(\ln 2 + \varepsilon + m(j)(\delta - \varepsilon)) \\ &= -h(\theta) + \alpha + (h-1)\ln 2 + (h-1)\varepsilon + (\gamma\theta + (\delta - \varepsilon)(h-1))m(j). \end{aligned} \quad (7)$$

При $R \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ по формуле Стирлинга имеем

$$\begin{aligned} \ln \binom{R+k-1}{k} &= \ln \frac{\Gamma(R+k)}{\Gamma(R)\Gamma(k+1)} \\ &= \left(R+k-\frac{1}{2}\right) \ln(R+k) - R - k \\ &\quad - \left(R-\frac{1}{2}\right) \ln R + R - \left(k+\frac{1}{2}\right) \ln k + k + O(1) \\ &= R \ln \left(1 + \frac{k}{R}\right) + k \ln \left(1 + \frac{R}{k}\right) + \frac{1}{2}(\ln R - \ln(R+k) - \ln k) + O(1) \\ &\leq R \ln \left(1 + \frac{k}{R}\right) + k \ln \left(1 + \frac{R}{k}\right) + O(1), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_5 N \ln N + \sum_{j=1}^2 (D_j n_j + c \ln(n_j + c^2)) \\ &\quad + \sum_{j=3}^L \left(\theta n_j \ln \left(1 + \frac{k(j)}{\theta n_j}\right) + k(j) \ln \left(1 + \frac{\theta n_j}{k(j)}\right) + D_j n_j + c \ln(n_j + c^2) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$f_j(x) = \begin{cases} D_j x + c \ln(x + c^2) & \text{при } j = 1, 2, \\ \theta x \ln \left(1 + \frac{k(j)}{\theta x}\right) + k(j) \ln \left(1 + \frac{\theta x}{k(j)}\right) \\ \quad + D_j x + c \ln(x + c^2) & \text{при } j = 3, \dots, L. \end{cases}$$

При $j = 1, \dots, L$ и $x \geq j$

$$f'_j(x) = \theta \ln \left(1 + \frac{k(j)}{\theta x} \right) + D_j + \frac{c}{x + c^2} < \theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta} \right) + D_L + \frac{1}{c},$$

так как $j > 2k(j)$ и $D_j \leq D_L$. Ниже мы убедимся, что

$$\theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta} \right) + D_L < 0, \quad (8)$$

откуда $f'_j(x) < 0$, если считать, не ограничивая общности, c достаточно большим (поскольку D_L не зависит от N). Окончательно получаем

$$0 \leq c_5 N \ln N + \sum_{j=1}^L f_j(j).$$

Учитывая $k(j) = \lfloor (j-1)/2 \rfloor = j/2 + O(1)$, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=3}^L \left(\theta j \ln \left(1 + \frac{k(j)}{\theta j} \right) + k(j) \ln \left(1 + \frac{\theta j}{k(j)} \right) \right) \\ &= \sum_{j=3}^L \left(\left(\theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 + 2\theta) \right) j + O(1) \right) \\ &= \left(2\theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta} \right) + \ln(1 + 2\theta) \right) N^2 + O(N), \end{aligned}$$

так как $L = 2N$.

Вспомяная определение (7) для D_j и учитывая $m(j) = \lfloor (j-1)/N \rfloor$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L D_j j &= \sum_{j=1}^L (-h(\theta) + \alpha + (h-1)(\varepsilon + \ln 2))j + \sum_{j=N+1}^{2N} (\gamma\theta + (h-1)(\delta - \varepsilon))j \\ &= 2(-h(\theta) + \alpha + (h-1)(\varepsilon + \ln 2))N^2 + \frac{3}{2}(\gamma\theta + (h-1)(\delta - \varepsilon))N^2 + O(N). \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки вместе, имеем

$$0 \leq c_6 N \ln N + DN^2,$$

где

$$\begin{aligned} D &= 2\theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta} \right) + \ln(1 + 2\theta) + 2(-h(\theta) + \alpha \\ &\quad + (h-1)(\varepsilon + \ln 2)) + 1.5(\gamma\theta + (h-1)(\delta - \varepsilon)). \end{aligned}$$

Если мы проверим, что

$$D < 0, \quad (9)$$

то при $N > N_0$ получаем противоречие (т.е. предположение $\text{rk } \mathcal{M} = L$ неверно). Таким образом, остается проверить (8) и (9).

Проверка (8). Используя

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \ln \theta - (\theta^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) > \ln \theta + (\theta^2 - 1) \cdot \frac{1}{\theta^2} \geq \ln \theta + 1 - \frac{9}{64} \\ &= -\ln 1.5 + 1.5(h-1)\delta + 0.5(h-1)\varepsilon + 2\alpha + 2h \ln 2 + \frac{55}{64} \end{aligned}$$

(мы учли неравенство (5)) и $\theta \ln(1 + 1/(2\theta)) < 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) + D_L &< \frac{1}{2} + \ln 1.5 - 1.5(h-1)\delta - 0.5(h-1)\varepsilon - 2\alpha - 2h \ln 2 \\ &\quad - \frac{55}{64} + \alpha + (h-1) \ln 2 + \frac{1}{1.5} + (h-1)\delta \\ &\leq \frac{1}{2} + \ln 1.5 - (h+1) \ln 2 - \frac{55}{64} + \frac{1}{1.5} \\ &\leq \frac{1}{2} + \ln 1.5 - 2 \ln 2 - \frac{55}{64} + \frac{2}{3} = -0.6735 \dots < 0. \end{aligned}$$

Проверка (9). Определим

$$g(\theta) := h(\theta) - \ln \theta = -(\theta^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{\theta^{2n}}.$$

Из последнего представления следует возрастание $g(\theta)$ при $\theta > 1$. Аналогично, из

$$(2\theta + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) = -(2\theta + 1) \ln \left(1 - \frac{1}{2\theta + 1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2\theta + 1)^{n-1}}$$

следует, что функция

$$(2\theta + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right)$$

убывает при $\theta > 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} D &= 2\theta \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) + \ln \theta + \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) - 2(\ln \theta + g(\theta)) + 2\alpha \\ &\quad + 2(h-1)(\varepsilon + \ln 2) + 1 + 1.5(h-1)(\delta - \varepsilon) \\ &= (2\theta + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) - 2g(\theta) + \ln 2 + 2\alpha + 0.5(h-1)\varepsilon \\ &\quad + 1.5(h-1)\delta + 2h \ln 2 - 2 \ln 2 + 1 - \ln \theta \\ &= (2\theta + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{2\theta}\right) - 2g(\theta) - \ln 2 + 1 + \ln 1.5 \\ &\leq \left(2 \cdot \frac{8}{3} + 1\right) \ln \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 8/3}\right) - 2g\left(\frac{8}{3}\right) + 1 - \ln \frac{4}{3} = -0.0515 \dots < 0. \end{aligned}$$

Предложение 1 полностью доказано.

В соответствии с предложением 1 существует нетривиальный набор комплексных чисел C_{mn} таких, что функция

$$F(z) = \sum_{m=0}^1 \left(\sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \binom{z}{n} \right) f(z)^m$$

удовлетворяет условию $F(\mathbb{N}) = \{0\}$. По лемме 7 имеем $F(z) = P_0(z) + P_1(z)f(z) \equiv 0$, где $P_m(z) = \sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \binom{z}{n}$ для $m = 0, 1$. В силу нетривиальности набора C_{mn} и линейной независимости над $\mathbb{C}$ многочленов $\binom{z}{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, хотя бы один из многочленов $P_0(z)$ и $P_1(z)$ ненулевой. Значит, $f(z)$ – целая рациональная функция, т.е. многочлен. Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{K}$, $L(f(n)) = O(e^{\alpha n})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = \exp\{-2h\alpha - 2h \ln 2\}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

В формулировке следствия через $L(\xi)$ обозначена длина алгебраического числа ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для алгебраического числа ξ с каноническим многочленом $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ выберем сопряженное ξ_0 так, что $|\overline{\xi}| = |\xi_0|$. Если $|\xi_0| \leq 1$, то, очевидно, $|a_n \xi_0| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| = L(\xi)$. В противном случае

$$|a_n \xi_0| = \left| -a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{\xi_0} - \dots - \frac{a_0}{\xi_0^{n-1}} \right| \leq |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0| \leq L(\xi).$$

Поэтому в качестве знаменателя d_n числа $f(n)$ в условии теоремы 1 можно взять старший коэффициент канонического многочлена числа $\xi = f(n)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\overline{f(n)} = O(e^{\alpha n})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = \exp\{-1.5(h-1)\alpha - 2h \ln 2\}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно взять $d_n = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Целая трансцендентная функция $f(z) = \xi^z$, где $\xi = 1 + \sqrt[h]{N^h + 1} - N$, $N = \lfloor e^{\alpha}/2 \rfloor$, удовлетворяет условиям $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$ – поле степени h , и $\overline{f(n)} = O(e^{\alpha n})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$ с

$$\gamma = \ln(1 + \sqrt[h]{N^h + 1} - N) \sim \frac{1}{hN^{h-1}} \sim \frac{2^{h-1}}{h} e^{-\alpha(h-1)} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, h > 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}$, знаменатель $f(n)$ имеет порядок $O(e^{\alpha n})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = (1/4)e^{-2\alpha}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $h = 1$, тогда

$$|\overline{d_n f(n)}| = |d_n f(n)| = O(e^{\beta n}),$$

где $\beta = \alpha + \gamma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Знаменатель $f(n)$, где $f(z) = (1 + 1/\lfloor e^{\alpha} \rfloor)^z$, имеет порядок $O(e^{\alpha n})$, и $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$ с $\gamma = \ln(1 + 1/\lfloor e^{\alpha} \rfloor) \sim e^{-\alpha}$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следствие 8 остается верным, если включение $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Q}$ заменить на $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле, т.е. в случае $\mathbb{K} = \mathbb{I}$ можно считать $h = 1$.

Перейдем к формулировке второй теоремы. Пусть $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \mathbb{K}, h$ и $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ имеют прежний смысл. Определим

$$\widehat{\gamma} = \exp\{-0.75(h-1)\delta - 0.25(h-1)\varepsilon - \alpha - 0.5h \ln 6.75 - 0.1477\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$. Пусть существуют натуральные числа d_n такие, что $d_n f(n) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, причем $d_n = O(e^{\alpha|n|})$ и $u[d_n f(n)] = O(e^{\beta|n|})$. Если $f(z) = O(e^{\hat{\gamma}|z|})$, то $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы ограничимся только схемой. Пусть N – достаточно большое целое. Рассмотрим семейство функций

$$\{\Delta_k(z)f(z)^m : 0 \leq k < N, m = 0, 1\} = \{\varphi_1(z), \dots, \varphi_L(z)\}, \quad L = 2N,$$

где многочлены $\Delta_k(z)$ определены в (1). Пусть

$$\mathcal{M} = \|\varphi_k((-1)^\nu \lfloor \nu/2 \rfloor)\|_{k=1, \dots, L, \nu \in \mathbb{N}} = (\Phi(0), \Phi(1), \Phi(-1), \Phi(2), \Phi(-2), \dots),$$

где $\Phi(z)$ определено в лемме 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеет место оценка $\text{rk } \mathcal{M} < L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив обратное, найдем $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_L$ – минимальный относительно лексикографического порядка набор целых чисел, для которого $\Delta := \det \|\varphi_k((-1)^{\nu_j} \lfloor \nu_j/2 \rfloor)\|_{k,j=1}^L \neq 0$. Для оценки Δ сверху применим лемму 2 с

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{4}{3\hat{\gamma}} = \frac{4}{3} \exp\{0.75(h-1)\delta + 0.25(h-1)\varepsilon + \alpha + 0.5h \ln 6.75 + 0.1477\} \\ &\geq \theta_0 := \frac{4}{3} \sqrt{6.75} e^{0.1477}. \end{aligned}$$

С учетом леммы 4 и следствий 2, 4 из леммы 5 получаем

$$\ln |\Delta| \leq c_1 N \ln N + \sum_{j=1}^L (u(k(j) + 1, \theta(|n_j| + 1)) + (m(j)\hat{\gamma}\theta - \hat{h}(\theta))|n_j| + c \ln(|n_j| + c^2)),$$

где $k(j) = \lfloor (j-1)/2 \rfloor$, $m(j) = \lfloor (j-1)/N \rfloor$.

Для оценки $|\Delta|$ снизу используем лемму 6 с $\xi := d_{n_1} \dots d_{n_L} \Delta$, учитывая лемму 3 и следствия 2, 5 к лемме 5. При $n \geq k$, $k \in \mathbb{N}_0$ по формуле Стирлинга имеем

$$\Delta_k(n) \leq \exp\{v(k+1, n+1) + O(\ln(k+2))\},$$

где

$$v(k, n) = \left(n + \frac{k}{2}\right) \ln \left(n + \frac{k}{2}\right) - \left(n - \frac{k}{2}\right) \ln \left(n - \frac{k}{2}\right) - k \ln k.$$

Суммируя указанные выше формулы, приходим к неравенству

$$0 \leq C_2 N \ln N + \sum_{j=1}^L f_j(|n_j|),$$

где

$$\begin{aligned} f_j(x) &= u(k(j) + 1, \theta(x+1)) + (h-1)v(k(j) + 1, x+1) + D_j x + c \ln(x + c^2), \\ D_j &= \alpha + (h-1)\varepsilon - \hat{h}(\theta) + m(j) \left(\frac{4}{3} + (h-1)(\delta - \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Из неравенства

$$2\theta \operatorname{arctg} \frac{1}{2\theta} + (h-1) \ln 3 + D_L < 0, \quad (10)$$

которое мы проверим позднее, следует, что $f'_j(x) \leq 0$ при $x \geq \lfloor j/2 \rfloor$. Поэтому $f_j(|n_j|) \leq f_j(\lfloor j/2 \rfloor)$, что в конечном итоге дает $0 \leq c_3 N \ln N + DN^2$, где

$$D = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} + \theta^2 \right) + 2\theta \operatorname{arctg} \frac{1}{2\theta} + 0.75(h-1)\delta + 0.25(h-1)\varepsilon + \alpha + 0.5(h-1) \ln 6.75 + 1 - \hat{h}(\theta).$$

Чтобы получить противоречие, остается проверить неравенства (10) и $D < 0$.

Неравенство (10) легко следует из оценки

$$\begin{aligned} \hat{h}(\theta) &= 2 \ln \theta - 2 \ln 2 - (\theta^2 + 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\theta^2 + 1} \right) - (\theta^2 - 1) \ln \left(1 - \frac{1}{\theta^2} \right) \\ &> 2 \ln \theta - 2 \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Проверим, что $D < 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) + 2x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x} - \hat{h}(x) + \ln x, \quad x > 1.$$

Несложно проверить, что

$$\psi(x) = 2 \ln 2 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} \frac{1}{x^{4n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)2^{2n+1}} \frac{1}{x^{2n}},$$

откуда следует, что $\psi(x)$ убывает. Значит, $\psi(\theta) \leq \psi(\theta_0)$. Поэтому

$$\begin{aligned} D &= \psi(\theta) - \ln \theta + 0.75(h-1)\delta + 0.25(h-1)\varepsilon + \alpha + 0.5(h-1) \ln 6.75 + 1 \\ &= \psi(\theta) - \ln \frac{4}{3} - 0.1477 - 0.5 \ln 6.75 + 1 \\ &\leq \psi(\theta_0) - \ln \frac{4}{3} - 0.1477 - 0.5 \ln 6.75 + 1 = -0.0000031295 \dots < 0. \end{aligned}$$

Предложение 2 полностью доказано.

В соответствии с предложением 2 существует нетривиальный набор комплексных чисел C_{mn} таких, что функция

$$F(z) = \sum_{m=0}^1 \left(\sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \Delta_n(z) \right) f(z)^m$$

удовлетворяет условию $F(\mathbb{Z}) = \{0\}$. По лемме 7 имеем $F(z) = P_0(z) + P_1(z)f(z) \equiv 0$, где $P_m(z) = \sum_{n=0}^{N-1} C_{mn} \Delta_n(z)$ для $m = 0, 1$. В силу нетривиальности набора C_{mn} и линейной независимости над $\mathbb{C}$ многочленов $\Delta_n(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$, хотя бы один из многочленов $P_0(z)$ и $P_1(z)$ ненулевой. Значит, $f(z)$ – целая рациональная функция, т.е. многочлен. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$, $L(f(n)) = O(e^{\alpha|n|})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = \exp\{-h\alpha - 0.5h \ln 6.75 - 0.1477\}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $\overline{f(n)} = O(e^{\alpha|n|})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = \exp\{-0.75(h-1)\alpha - 0.5h \ln 6.75 - 0.1477\}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $f(z)$ – целая функция, $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q}$ (или даже $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{I}$ для мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$), знаменатель $f(n)$ имеет порядок $O(e^{\alpha|n|})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, где $\gamma = 0.332e^{-\alpha}$. Тогда $f(z) \in \mathbb{C}[z]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Целая трансцендентная функция $f(z) = \xi^z$, где $\xi = \sqrt[h]{1 + 1/N^h}$, $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяет следующим условиям: $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$ – поле степени h , знаменатель $f(n)$ имеет порядок $O(e^{\alpha|n|})$ при $n \rightarrow \infty$, где $\alpha = h^{-1} \ln(N^h + 1)$, и $\overline{f(n)} = O(e^{\gamma|n|})$, $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$ с $\gamma = \ln \xi \sim e^{-\alpha h}/h$.

В заключение автор хотел бы выразить огромную благодарность своему научному руководителю В. В. Зудилину за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Welter, “Sur un théorème de Gel’fond–Selberg et une conjecture de Bundschuh–Shiokawa”, *Acta Arith.*, **116**:4 (2005), 363–385.
- [2] А. О. Гельфонд, “О целочисленности аналитических функций”, *Докл. АН СССР*, **81** (1951), 341–344.

И. П. Рочев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

11.07.2006