Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, С. К. Исматходжаев,
О задаче уклонения от встречи на полубесконечном от-
резке в одном классе управляемых распределенных си-
стем, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 294–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:08:22

О задаче уклонения от встречи на полубесконечном отрезке в одном классе управляемых распределенных систем

Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, С. К. Исматходжаев

В работе изучается задача уклонения от встречи в системах, описываемых уравнениями параболического типа. Рассмотрены четыре варианта ограничений на управляющие параметры.

Библиография: 11 названий.

1. Решению задач преследования и уклонения от встречи в конечномерных пространствах посвящено огромное количество исследований. Что же касается распределенных управляемых систем, то они, на наш взгляд, изучены еще недостаточно. Настоящая работа примыкает к работам [1]–[10]. Некоторые ее результаты были анонсированы в докладах [8], [10].

Рассматривается управляемая система, описываемая параболическим уравнением

$$z_t = Az - u + v, \quad z|_{t=0} = z_0(x), \quad z|_s = 0, \quad (1)$$

где $z = z(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, \infty)$, – неизвестная функция, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, Ω – ограниченная область с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$; дифференциальный оператор A имеет вид

$$Az = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) z_{x_j}),$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(x)$, $x \in \Omega$, – измеримая ограниченная функция, кроме того, существует положительная константа γ такая, что для произвольных $x \in \bar{\Omega}$ и $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma \sum_{i=1}^n \xi_i^2;$$

$u = u(x, t)$ и $v = v(x, t)$ – управляющие функции (*управления*), функцией $u(x, t)$ распоряжается первый игрок (*преследователь*), функцией $v(x, t)$ – второй игрок (*преследуемый* или *убегаящий игрок*), $u(x, t), v(x, t) \in L_2(Q)$, $Q = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 <$

$t < \infty$ }; $z_0(x) \in L_2(\Omega)$, $S = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, 0 < t < \infty\}$ – боковая поверхность полубесконечного цилиндра Q .

Далее, пусть T – произвольное положительное число,

$$Q_T = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < T\}, \quad S_T = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}.$$

Напомним [11], что $W_2^1(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого порядка; $\dot{W}_2^1(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором плотным является множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций; $W_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные z_{x_i} , $i = 1, \dots, n$; $\dot{W}_2^{1,0}(Q_T)$ – подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, в котором плотным является множество бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вблизи S_T .

2. Известно [11], что при выполнении перечисленных выше условий задача

$$z_t = Az - u + v, \quad z|_{t=0} = z_0(x), \quad z|_{S_T} = 0 \quad (2)$$

имеет единственное обобщенное решение $z = \bar{z}(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$, в классе $\dot{W}_2^{1,0}(Q_T)$ при любых $z_0(x) \in L_2(\Omega)$, $u = \bar{u}(x, t)$ и $v = \bar{v}(x, t)$, где $\bar{u}(x, t)$ и $\bar{v}(x, t)$ – сужения функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ на Q_T . Кроме того, это решение имеет вид [11; § 3, гл. 3]

$$\bar{z}(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_m(t) \psi_m(x), \quad (3)$$

где функции $\bar{z}_m(t)$, $0 \leq t \leq T$, $m = 1, 2, \dots$, составляют решение задачи Коши для следующей бесконечной системы дифференциальных уравнений и начальных условий:

$$\dot{z}_m = \lambda_m z_m - u_m(t) + v_m(t), \quad 0 < t \leq T, \quad z_m(0) = z_{0m}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ – собственные значения оператора A , снабженного нулевыми краевыми условиями $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \dots$, $\lambda_m \rightarrow -\infty$ при $m \rightarrow \infty$, $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x), \dots$ являются ортонормированными собственными функциями A , $\{\psi_m(x)\}$ – полная в $L_2(\Omega)$ система, $u_m(t)$, $v_m(t)$ и z_{0m} – коэффициенты Фурье в разложениях $\bar{u}(x, t)$, $\bar{v}(x, t)$ и $z_0(x)$ соответственно по системе $\{\psi_m(x)\}$.

При этом ряд в (3) сходится в $L_2(Q_T)$ равномерно, его сумма $\bar{z}(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, при каждом t принадлежит $\dot{W}_2^1(\Omega)$ и как функция переменного t является непрерывной в норме $\dot{W}_2^1(\Omega)$ [11].

Введем в рассмотрение функцию $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, определив ее следующим образом. Ее сужение на Q_T будем считать равным $\bar{z}(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$. Как отмечено выше, каждая функция $\bar{z}(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$, определена однозначно, значит, и функция $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, также определена однозначно (разумеется, однозначно в $L_2(Q)$).

В дальнейшем функцию $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, будем называть обобщенным решением задачи (1). Таким образом, задаче (1) поставлена в соответствие единственная

функция $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, любое сужение $\bar{z}(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$ которой является обобщенным решением задачи (2) (ниже для краткости слово “обобщенное” и черточка над буквами z , u и v будут опускаться).

3. В дальнейшем управления $u(x, t)$ и $v(x, t)$ будут удовлетворять одной из следующих систем неравенств:

$$\|u(\cdot, t)\| = \left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m^2(t) \right]^{1/2} \leq \rho, \quad \|v(\cdot, t)\| = \left[\sum_{m=1}^{\infty} v_m^2(t) \right]^{1/2} \leq \sigma, \quad 0 \leq t < \infty; \quad (5)$$

$$\|u(\cdot, \cdot)\| = \left[\int_0^{\infty} \|u(\cdot, t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \rho, \quad \|v(\cdot, \cdot)\| = \left[\int_0^{\infty} \|v(\cdot, t)\|^2 dt \right]^{1/2} \leq \sigma; \quad (6)$$

$$\|u(\cdot, \cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(\cdot, t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (7)$$

где ρ и σ – неотрицательные константы.

Функцию $z_0(x)$ будем называть *начальным положением* системы (1) и обозначать через $z_0(\cdot)$. Кроме того, задается и функция $z_1(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, которую будем называть *конечным положением* и обозначать через $z_1(\cdot)$.

Систему (1), в которой $u(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют неравенствам (5) (соответственно (6), (7)), будем называть *игрой* (1), (5) (соответственно *игрой* (1), (6) и *игрой* (1), (7)).

Теперь сформулируем определение возможности уклонения от встречи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. В игре (1), (5) (соответственно (1), (6) и (1), (7)) *возможно уклонение от встречи из начального положения* $z_0(\cdot)$ *с конечным положением* $z_1(\cdot)$, если существует функция $v(x, t, u)$, $(x, t, u) \in Q \times \mathbb{R}^1$ такая, что для произвольной функции $u_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, удовлетворяющей условию

$$\|u_0(\cdot, t)\| \leq \rho, \quad 0 \leq t < \infty$$

(соответственно $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$ в играх (1), (6) и (1), (7)) и такой, что

- 1) выполнено неравенство $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$, $0 \leq t < \infty$ (соответственно неравенство $\|v_0(\cdot, \cdot)\| \leq \sigma$ в игре (1), (6); $\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma$, $0 \leq t < \infty$, в игре (1), (7)), где $v_0(x, t) = v(x, t, u_0(x, t))$;
- 2) решение $z_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, задачи (1), где $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$, ни при каком $t \in (0, \infty)$ не совпадает с $z_1(x)$, т.е. $z_0(x, t) \not\equiv z_1(x)$ при любом фиксированном $t \in (0, \infty)$.

Задача уклонения от встречи и ее решение предполагают:

- 1) нахождение пар $(z_0(\cdot), z_1(\cdot))$ таких, что из начального положения $z_0(\cdot)$ можно уклониться от встречи с конечным положением $z_1(\cdot)$ на отрезке $(0, \infty)$;
- 2) конструирование явного вида функции $v(x, t, u)$.

В данной работе, в основном, изучается задача уклонения от встречи. В ней:

- 1) получены достаточные условия, гарантирующие возможность уклонения от встречи из любого начального положения с любым конечным положением в играх (1), (5) и (1), (6) (см. ниже теорему 1);
- 2) в игре (1), (7) при выполнении некоторого неравенства выделено бесконечное множество X (см. (8)) такое, что из произвольного начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно уклонение от встречи с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$ (теорема 2);
- 3) при произвольных $\rho > 0$ и $\sigma > 0$ в игре (1), (7) выделено бесконечное множество Y (см. (9)) такое, что из произвольного начального положения $z_0(\cdot) \in Y$ невозможно уклониться от встречи с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$ (теорема 3; определение невозможности уклонения от встречи приводится перед текстом теоремы 3).

ТЕОРЕМА 1. Если $\sigma > \rho$, то в играх (1), (5) и (1), (6) возможно уклонение от встречи из произвольного начального положения с произвольным конечным положением, при этом в игре (1), (5) функцию $v(x, t, u)$ можно выбрать не зависящей от u .

При формулировке теоремы 2 считается $\sigma\sqrt{2} \geq \rho\sqrt{|\lambda_1|}$. Учитывая это неравенство, введем в рассмотрение функцию

$$f(\tau) = \sigma|\lambda_1|^{-1}(\tau - 1) - \rho(2|\lambda_1|)^{-1/2}(\tau^2 - 1)^{1/2}, \quad 1 \leq \tau < \infty.$$

Путем элементарных вычислений можно убедиться, что

$$c = \inf\{f(\tau) \mid 1 \leq \tau < \infty\} < 0, \quad c \neq -\infty.$$

Пусть

$$X = \{z_0(\cdot) \mid |z_{01}| > |c|\}. \quad (8)$$

В (8) остальные коэффициенты z_{0m} считаются произвольными.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено неравенство $\sigma\sqrt{2} \geq \rho\sqrt{|\lambda_1|}$. Тогда в игре (1), (7) из каждого начального положения $z_0(\cdot) \in X$ (см. (8)) возможно уклонение от встречи с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$; при этом функцию $v(x, t, u)$ можно выбрать не зависящей от u .

Теперь перед формулировкой теоремы 3 приведем определение невозможности уклонения от встречи из начального положения $z_0(\cdot)$ с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$, а также укажем явный вид множества Y , о котором шла речь выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В игре (1), (7) невозможно уклониться от встречи из начального положения $z_0(\cdot)$ с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$, если существуют функция $u(x, t, v)$, $(x, t, v) \in Q \times \mathbb{R}^1$, и число $T = T(z_0(\cdot)) > 0$ такие, что для произвольного управления $v_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, удовлетворяющего неравенству

$$\|v_0(\cdot, t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t < \infty,$$

выполнены условия

- 1) управление $u_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, где $u_0(x, t) = u(x, t, v_0(x, t))$, удовлетворяет условию $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$;
- 2) решение $z_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, задачи (1), где $u = u_0(x, t)$, $v = v_0(x, t)$, при некотором $t = t' \in [0, T]$ совпадает с $z_1(\cdot) = 0$, т.е. $z_0(x, t') \equiv 0$.

Положим

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad Y_k = \left\{ z_0(\cdot) \mid 0 < |z_{0k}| \leq \frac{\rho^2}{4\sigma}, \quad z_{0m} = 0, \quad m \neq k \right\}. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. При произвольных $\rho > 0$ и $\sigma > 0$ в игре (1), (7) из каждого начального положения $z_0(\cdot) \in Y$ невозможно уклониться от встречи с конечным положением $z_1(\cdot) = 0$; при этом

$$T(z_0(\cdot)) = \frac{|z_{0k}|}{\sigma}.$$

4. В этом пункте будет доказана теорема 1 (теоремы 2 и 3 будут доказаны в п. 5 и п. 6 соответственно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассматривается игра (1), (5) (игра (1), (6) будет изучаться ниже).

Пусть $u(x, t)$ и $v(x, t)$ – произвольные управления, удовлетворяющие неравенствам (5), $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, – решение задачи (1), где $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $z_0(\cdot)$ – произвольное начальное положение, $z_1(\cdot)$ – произвольное конечное положение.

Имеем (см. (4))

$$z_m(t) = e^{\lambda_m t} \left\{ z_{0m} + \int_0^t e^{-\lambda_m s} [v_m(s) - u_m(s)] ds \right\}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Наша цель – найти константу $\theta \in (0, 1]$ и функции $v_m(t)$, $0 \leq t \leq \theta$, $m = 1, 2, \dots$, так, что для произвольных $u_m(t)$, $0 \leq t \leq \theta$, $m = 1, 2, \dots$, вектор-функция $(z_1(t), z_2(t))$, $0 \leq t \leq \theta$, не будет принимать значение (z_{11}, z_{12}) , где z_{11} , z_{12} – первый и второй коэффициенты Фурье в разложение функции $z_1(x)$ по системе $\{\psi_m(x)\}$. Ясно, что тогда $z(x, t) \not\equiv z_1(x)$ при каждом $t \in (0, \theta]$.

Для этого введем в рассмотрение функции (см. (10))

$$\xi_i(t) = z_{0i} - e^{-\lambda_i t} z_{1i} + \int_0^t e^{-\lambda_i s} [v_i(s) - u_i(s)] ds, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (11)$$

Очевидно, что если $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \neq 0$ на $(0, \theta]$, то и $z(x, t) \not\equiv z_1(t)$ для любого $t \in (0, \theta]$.

Разложив функцию $e^{-\lambda_1 t}$ в ряд, получим (см. (11))

$$\xi_i(t) = (z_{0i} - z_{1i}) + (-\alpha_i z_{1i})t + t^2 f_i(t) z_{1i} + \int_0^t [v_i(s) - u_i(s)] ds + t^2 g_i(t), \quad (12)$$

где

$$\alpha_i = -\lambda_i, \quad f_i(t) = -\left(\frac{\alpha_i^2}{2!} + \frac{\alpha_i^3 t}{3!} + \dots \right),$$

$$t^2 g_i(t) = \int_0^t s \left(\alpha_i + \frac{\alpha_i^2 s}{2!} + \dots \right) [v_i(s) - u_i(s)] ds.$$

Ясно, что существует константа $c_1 > 0$, для которой при всех $t \in [0, 1]$, справедливы неравенства $|f_i(t)| \leq c_1$, $|g_i(t)| \leq c_1$, $i = 1, 2$. Пусть

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}, & B_1 &= \begin{pmatrix} z_{01} - z_{11} \\ z_{02} - z_{12} \end{pmatrix}, & B_2 &= \begin{pmatrix} -\alpha_1 z_{11} \\ -\alpha_2 z_{12} \end{pmatrix}, \\ f(t) &= \begin{pmatrix} f_1(t) z_{11} \\ f_2(t) z_{12} \end{pmatrix}, & g(t) &= \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко убедиться в существовании двумерного единичного вектора

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющего неравенствам $(\psi, B_i) \geq 0$, $i = 1, 2$.

Далее, считая $v_j(t) = 0$ для всех $j \geq 3$, $t \geq 0$, положим

$$v_i(t) = \sigma \psi_i, \quad i = 1, 2, \quad \bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. (12), (13))

$$\xi(t) = B_1 + tB_2 + t^2 f(t) + t^2 g(t) + \int_0^t [\bar{v}(s) - \bar{u}(s)] ds. \quad (14)$$

Умножив (14) скалярно на ψ , получим

$$(\psi, \xi(t)) \geq t(\sigma - \rho) + t^2[(\psi, f(t)) + (\psi, g(t))]. \quad (15)$$

Но

$$(\psi, f(t)) \geq -|f(t)| \geq -c_1 \bar{z}_1, \quad \text{где } \bar{z}_1 = \sqrt{z_{11}^2 + z_{12}^2}, \quad (\psi, g(t)) \geq -c_1.$$

Значит (см. (15)),

$$|\xi(t)| \geq t[(\sigma - \rho) - tc_1(1 + \bar{z}_1)], \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (16)$$

Из (16) видно, что если $t \in (0, \theta]$, где

$$\theta = \frac{\sigma - \rho}{2c_1(1 + \bar{z}_1)}, \quad (17)$$

то (см. (16))

$$|\xi(t)| \geq \frac{t}{2}(\sigma - \rho). \quad (18)$$

Увеличив константу c_1 в (17), можно считать $\theta \leq 1$. Таким образом, при указанном выше способе управления параметром v на отрезке $(0, \theta]$ игра (1), (5) не завершится, ибо $\xi(t) \neq 0$ на $(0, \theta]$ (см. (18)).

В момент θ времени t реализуется положение $z_\theta(x) = z(x, \theta)$. Пусть $z_{\theta m}$, $m = 1, 2, \dots$, — коэффициенты Фурье в разложении функции $z(x, \theta)$ по $\{\psi_m(x)\}$.

Тогда имеем

$$z_i(t) = e^{\lambda_i(t-\theta)} \left\{ z_{\theta i} + \int_{\theta}^t e^{\lambda_i(\theta-s)} [v_i(s) - u_i(s)] ds \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Далее, пусть

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &= \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1(t) \\ \bar{\xi}_2(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}_i(t) = z_{\theta i} - e^{-\lambda_i(t-\theta)} z_{1i} + \int_0^t e^{\lambda_i(\theta-s)} [v_i(s) - u_i(s)] ds, \\ \bar{B}_1 &= \begin{pmatrix} z_{\theta 1} - z_{11} \\ z_{\theta 2} - z_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 z_{11} \\ -\alpha_2 z_{12} \end{pmatrix}, \\ \bar{f}_i(t) &= - \left[\frac{\alpha_i^2}{2} + \frac{\alpha_i^3(t-\theta)}{3!} + \dots \right], \\ \bar{g}_i(t) &= \int_{\theta}^t (s-\theta) \left[\alpha_i + \frac{\alpha_i^2(s-\theta)}{2!} + \dots \right] [v_i(s) - u_i(s)] ds. \end{aligned}$$

Ясно, что и в рассматриваемом случае $|\bar{f}_i(t)| \leq c_1$, $|\bar{g}_i(t)| \leq c_1$ для всех $i = 1, 2$, $t \in [\theta, \theta + 1]$.

Выберем единичный вектор

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

так, чтобы $(\bar{\psi}, \bar{B}_i) \geq 0$, $i = 1, 2$. И здесь имеем (считается $\bar{v}(t) = \sigma \bar{\psi}$, $\theta \leq t \leq 2\theta$)

$$|\bar{\xi}(t)| \geq (t-\theta) \frac{\sigma - \rho}{2}, \quad \theta \leq t \leq 2\theta, \quad \theta = \frac{\sigma - \rho}{2c_1(1 + \bar{z}_1)}.$$

Значит, если выбрать $\bar{v}(t) = \sigma \bar{\psi}$, $\theta \leq t \leq 2\theta$, то игра (1), (5) не завершится и на отрезке $[\theta, 2\theta]$.

Дальше поступаем аналогично: по положению $z_{2\theta}(x) = z(x, 2\theta)$ находим $z_{2\theta, i}$, $i = 1, 2$,

$$\bar{\bar{B}}_1 = \begin{pmatrix} z_{2\theta, 1} - z_{11} \\ z_{2\theta, 2} - z_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{\bar{B}}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 z_{11} \\ -\alpha_2 z_{12} \end{pmatrix},$$

вектор $\bar{\bar{\psi}}$ и т.д.

Возможность уклонения от встречи в игре (1), (5) из начального положения $z_0(\cdot)$ с конечным положением $z_1(\cdot)$ установлена.

Теперь рассмотрим игру (1), (6). Положим $u = v + w$, где $w = w(t)$, $0 \leq t < \infty$, $w_j(t) = 0$, $j \geq 3$, $4t \geq 0$. Ниже компоненты $w_i(t)$, $i = 1, 2$, выбираются так, чтобы

$$\int_0^\infty [w_1^2(t) + w_2^2(t)] dt \leq (\sigma - \rho)^2,$$

причем они будут кусочно постоянными, а в каждой точке $t \in (0, \infty)$ одна из функций $w_i(t) = 0$.

Для реализации этой цели отрезок $(0, \infty)$ представим в виде суммы $(0, 2] \cup (2, 4] \cup \dots$, а на каждом отрезке $(2(k-1), 2k]$ одна из функций $w_i(t) \equiv 0$, а другая $w_i(t) \equiv w_i^{(0)}$, $|w_i^{(0)}| = (\sigma - \rho)2^{-(k+1)/2}$.

На отрезке $(0, 2]$ имеем (см. (11))

$$\xi_i(t) = z_{0i} - e^{-\lambda_i t} z_{1i} + \int_0^t e^{-\lambda_i s} w_i(s) ds = z_{0i} - e^{-\lambda_i t} z_{1i} + e_{1i}(t) w_i^{(0)},$$

где $e_{1i} = -\lambda_i^{-1}(e^{-\lambda_i t} - 1)$.

Возможны два случая:

- а) одна из функций $z_{0i} - e^{-\lambda_i t} z_{1i}$, $0 < t \leq 2$, $i = 1, 2$, свой знак не меняет;
- б) противоположный случай.

Пусть для определенности, $z_{01} - e^{-\lambda_1 t} z_{11} \geq 0$ на $(0, 2]$. Тогда положим

$$w_1^{(0)} = 2^{-1}(\sigma - \rho), \quad w_2^{(0)} = 0.$$

Ясно, что при таком выборе $w_i(t)$, $0 \leq t \leq 2$, функция $\xi_1(t) > 0$ на $(0, 2]$, т.е. $\xi(t) \neq 0$ на $(0, 2]$.

Пусть теперь реализуется случай б). Положим $w_2^{(0)} = 0$, а $w_1^{(0)}$ выберем следующим образом.

Ясно, что $z_{02} - e^{-\lambda_2 t} z_{12}$, $0 < t \leq 2$, как монотонная функция, имеет только один нуль; пусть t_0 – ее нуль. Так как, очевидно, $t_0 > 0$, то $e_{11}(t_0) > 0$. Учитывая этот факт, будем считать

$$w_1^{(0)} = \begin{cases} \frac{\sigma - \rho}{2}, & \text{если } z_{01} - e^{-\lambda_1 t} z_{11} > 0, \\ -\frac{\sigma - \rho}{2}, & \text{если } z_{01} - e^{-\lambda_1 t} z_{11} < 0. \end{cases}$$

При таком выборе $w_i^{(0)}$, $i = 1, 2$, число $\xi_1(t_0) \neq 0$, а функция $\xi_2(t) \neq 0$ при всех $t \in (0, 2] \setminus \{t_0\}$. Значит, $\xi(t) \neq 0$ при всех $t \in (0, 2]$.

На отрезке $(2, 4]$ рассуждаем так же, как и выше. Для построенной выше функции $w(t)$, $0 \leq t < \infty$, имеем

$$\|w(\cdot)\|^2 = \int_0^\infty [w_1^2(t) + w_2^2(t)] dt = \sum_{k=1}^\infty 2 \frac{(\sigma - \rho)^2}{2^{k+1}} = (\sigma - \rho)^2.$$

Следовательно, на каждом из отрезков $(0, 2]$, $(2, 4]$, $\dots$, $(2(k-1), 2k]$, $\dots$ в игре (1), (6) из начального положения $z_0(\cdot)$ можно уклониться от встречи с конечным положением $z_1(\cdot)$. Теорема 1 доказана полностью.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть выполнено неравенство $\sigma\sqrt{2} \geq \rho\sqrt{|\lambda_1|}$, множество X определено формулой (8), $z_0(\cdot)$ – произвольный элемент множества X , $u_0(x, t)$, $(x, t) \in Q$, – произвольная функция, удовлетворяющая неравенству $\|u_0(\cdot, \cdot)\| \leq \rho$, $v(x, t)$, $(x, t) \in Q$, – пока произвольная функция, удовлетворяющая условию $\|v(\cdot, t)\| \leq \sigma$. Для коэффициента Фурье $z_1(t)$, $0 \leq t < \infty$, решения $z(x, t)$, $(x, t) \in Q$, задачи (1), где $u = u_0(x, t)$, $v = v(x, t)$, при его разложении по системе $\{\psi_k(x)\}$ имеем (см. (10))

$$z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \left\{ z_{01} + \int_0^t e^{-\lambda_1 s} [v_1(s) - u_1(s)] ds \right\}. \quad (20)$$

Положим $v_m(t) = 0$ для всех $m \neq 1$, $t \geq 0$, $v_1(t) \equiv \sigma \operatorname{sgn} z_{01}$. Пусть для определенности $z_{01} > 0$. Тогда функция (см. (20))

$$\eta(t) = z_{01} + \sigma|\lambda_1|^{-1}(e^{-\lambda_1 t} - 1) - \int_0^t e^{-\lambda_1 s} u_1(s) ds, \quad 0 \leq t < \infty,$$

на отрезке $[0, \infty)$ не обратится в 0. Действительно, так как

$$\int_0^t e^{-\lambda_1 s} u_1(s) ds \leq \rho(2|\lambda_1|)^{-1/2}(e^{-2\lambda_1 t} - 1)^{1/2}$$

в силу неравенства Коши–Буняковского, то при всех $t \in [0, \infty)$

$$\eta(t) > |c| + \sigma|\lambda_1|^{-1}(e^{-\lambda_1 t} - 1) - \rho(2|\lambda_1|)^{-1/2}(e^{-2\lambda_1 t} - 1)^{1/2} = |c| + f(\tau) \geq 0,$$

где $\tau = e^{-\lambda_1 t}$, $1 \leq \tau < \infty$, $f(\tau) = \sigma|\lambda_1|^{-1}(\tau - 1) - \rho(2|\lambda_1|)^{-1/2}(\tau^2 - 1) \geq c$, $c = \inf\{f(\tau) \mid 1 \leq \tau < \infty\}$, $-\infty < c < 0$.

Значит (см. (20)), $z_1(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, \infty)$. Отсюда вытекает, что и $z(x, t) \neq 0$ для любого $t \in (0, \infty)$. Теорема 2 доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть теперь $z_0(\cdot)$ – произвольная точка множества Y (см. (9)). Тогда $z_0(\cdot) \in Y_m$ для некоторого $m = k$. В соответствии с (9) имеем неравенства $0 < |z_{0k}| \leq \rho^2/(4\sigma)$, $z_{0m} = 0$ при всех $m \neq k$.

Пусть для определенности $0 < z_{0k} \leq \rho^2/(4\sigma)$. Учитывая эти неравенства и то, что $z_{0m} = 0$ при всех $m \neq k$, положим

$$\begin{aligned} u_k(t) &= v_k(t) + \sigma e^{\lambda_k t} \quad \text{на } [0, T], & u_k(t) &= 0 \quad \text{на } (T, \infty), \\ u_m(t) &= v_m(t) \quad \text{для всех } m \neq k, t \in [0, T], & u_m(t) &= 0 \quad \text{на } (T, \infty). \end{aligned}$$

где $T = z_{0k}/\sigma$.

Ясно, что при предложенном способе выбора $u(x, t)$ все $z_m(t) = 0$ для $m \neq k$, $t \in [0, \infty)$.

Для компоненты $z_k(t)$, $0 \leq t \leq T$, имеем

$$z_k(t) = e^{\lambda_k t}(z_{k0} - t\sigma), \quad z_k(T) = 0.$$

Значит, все $z_m(T) = 0$, $m = 1, 2, \dots$, т.е. $z(x, T) \equiv 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \cdot)\| &\leq \|v(\cdot, \cdot)\|_T + \sqrt{\int_0^T \sigma^2 e^{2\lambda_k t} dt} \\ &\leq \sigma\sqrt{T} + \sigma\sqrt{T} = 2\sigma\sqrt{T} = 2\sigma\sqrt{\frac{\|z_{k0}\|}{\sigma}} \leq 2\sigma\sqrt{\frac{\rho^2}{4\sigma^2}} = \rho. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Л. Черноусько, “Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **56**:5 (1992), 810–826.
- [2] В. А. Ильин, “Граничное управление процессом колебаний на двух концах”, *Докл. РАН*, **369**:5 (1999), 592–596.
- [3] А. Г. Бутковский, *Методы управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1975.
- [4] С. А. Авдонин, С. А. Иванов, *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент*, УМКВО, Киев, 1989.
- [5] J.-L. Lions, “Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems”, *SIAM Rev.*, **30**:1 (1988), 1–68.
- [6] М. Тухтасинов, “О некоторых задачах теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **59**:6 (1995), 979–984.
- [7] Г. И. Ибрагимов, “К задаче группового преследования с интегральными ограничениями на управления игроков”, *Матем. заметки*, **70**:2 (2001), 201–212.
- [8] Н. Ю. Сатимов, “О задаче уклонения от встречи в распределенных управляемых системах”, *Труды Международной конференции “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”*, Стерлитамак, 2003, 180–184.
- [9] Н. Ю. Сатимов, Б. Б. Рихсиев, *Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления*, “ФАН”, Ташкент, 2000.
- [10] Н. Ю. Сатимов, “Об одной задаче убегания в распределенных системах.”, *Труды Международной конференции “Современные проблемы математической физики и информационных технологий”*, т. 2, Ташкент, 2003, 240–244.
- [11] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

Н. Ю. Сатимов

Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент

E-mail: mumin51@mail.ru

Поступило

11.11.2004

Исправленный вариант

28.03.2005

М. Тухтасинов

Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент

С. К. Исмаходжаев

Институт энергетики и автоматики АН РУз