Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Тихонов, О равномерной сходимости тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 304–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:19:46

О равномерной сходимости тригонометрических рядов

С. Ю. Тихонов

В работе получены достаточные условия для равномерной сходимости тригонометрических рядов с обобщенно монотонными коэффициентами.

Библиография: 5 названий.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (1)$$

Ясно, что если коэффициенты ряда (1) знакопостоянны, то вопрос о равномерной сходимости решается просто: условие сходимости ряда (1) в нуле необходимо и достаточно для равномерной сходимости этого ряда на $[0, 2\pi]$. Если последовательность коэффициентов не обязательно знакопостоянна, то приходится накладывать некоторые дополнительные условия.

Недавно Теляковский [1] нашел достаточные условия для равномерной сходимости ряда (1) с коэффициентами, удовлетворяющими Δ_L -условию.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$, удовлетворяет Δ_L -условию, если $a_k = a_{n_m}$ для $n_{m-1} < k \leq n_m$, $m \in \mathbb{N}$, где последовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, $n_1 = 1$, $n_m \in \mathbb{N}$, может быть представлена в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей. Заметим [1], что неубывающая последовательность $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ представима в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{n_k} \leq \frac{C}{n_m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{k=1}^m n_k \leq C n_m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Здесь и далее, через C мы будем обозначать положительные постоянные, не обязательно равные в разных случаях.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть коэффициенты ряда (1) удовлетворяют Δ_L -условию. Тогда

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00268), и программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-1657.2003.1).

- (А) если ряд (1) сходится в точке $x = 0$ и $ka_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, то он сходится равномерно;
- (В) если последовательность частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена в точке $x = 0$ и $k|a_k| \leq C$ для $k \in \mathbb{N}$, то последовательность частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена.

Аналогичная теорема доказана в [1] и для синус-ряда.

В данной работе мы продолжаем исследование достаточных условий для равномерной сходимости тригонометрических рядов. Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty$, $\beta_k > 0$. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$, $a_k \in \mathbb{C}$, называется *обобщенно монотонной с мажорантой β* , если найдется последовательность $1 = n_1 < n_2 < \dots$, представляемая в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей и такая, что для любого $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|a_m| + \sum_{k=m}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| \leq C\beta_m, \quad m \in [n_j, n_{j+1}). \quad (4)$$

Определения подобного типа рассматривались ранее при изучении интегрируемости рядов. Например, рассматривались случаи, когда $\beta_m = |a_m|$ (см. [2]) и $\{a_k \in \mathbb{C} : \sum_{k=m}^\infty |a_k - a_{k+1}| \leq C\beta_m\}$ (см. [3]). Приведем еще несколько примеров последовательностей, которые также удовлетворяют неравенству (4).

ПРИМЕР 1. Если последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ монотонна, то можно определить мажоранту следующим образом: $C = 2$ и $\beta_k = a_k$.

ПРИМЕР 2. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ *квазимонотонная*, если $\{k^{-\tau}a_k\}$ не возрастает для некоторого $\tau > 0$. Более общее определение таково [4]: существует положительная неубывающая последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая Δ_2 -условию, т.е. $\lambda_{2k} \leq C\lambda_k$ и такая, что $\{a_k/\lambda_k\}$ не возрастает. Покажем, что тогда справедливо неравенство (4) с $C = C(\lambda)$ и $\beta_k = a_k$. Действительно, выбирая $n_j = 2^j$, получим

$$\begin{aligned} |a_m| + \sum_{k=m}^{n_{j+1}-1} |a_k - a_{k+1}| &\leq a_m + \frac{a_m}{\lambda_m} \sum_{k=m}^{2^{j+1}-1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) + \lambda_{2^{j+1}} \sum_{k=m}^{2^{j+1}-1} \left(\frac{a_m}{\lambda_m} - \frac{a_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \right) \\ &\leq 3a_m \frac{\lambda_{2^{j+1}}}{\lambda_m} \leq C(\lambda)a_m. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Если $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет Δ_L -условию, то $C = 1$ и $\beta_m = |a_m| + |a_{m+1}|$. Действительно, левая часть в неравенстве (4) равна $|a_m|$ при $m \neq n_j$ и $|a_m| + |a_m - a_{m+1}|$ при $m = n_j$.

Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность коэффициентов ряда (1) является обобщенно монотонной с мажорантой β . Тогда

- (А) если

$$k\beta_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0$$

и если ряд (1) сходится в точке $x = 0$, то он сходится равномерно;

(В) если

$$k\beta_k \leq C \quad \text{для } k \in \mathbb{N}$$

и если последовательность частичных сумм ряда (1) равномерно ограничена в точке $x = 0$ и $k|a_k| \leq C$ для $k \in \mathbb{N}$, то последовательность частичных сумм этого ряда равномерно ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (А) Будем следовать схеме доказательства теоремы 2 из работы [1]. Пусть $\xi(k)$, $\nu(k)$ – монотонно убывающие нуль-последовательности такие, что

$$k\beta_k \leq \xi(k) \quad \text{и} \quad \left| \sum_{j=k}^{\infty} a_j \right| \leq \nu(k).$$

В силу (4) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |\Delta a_k| \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_{n_j} n_j}{n_j} \leq C \xi(n_1) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty,$$

т.е. $\{a_n\}$ есть последовательность ограниченной вариации и, значит, ряд (1) сходится на $(0, \pi]$. Обозначим его сумму через $f(x)$. Далее оценим $f(x) - S_n(f, x)$, где

$$S_n(f, x) = \sum_{j=1}^n a_j \cos jx.$$

Применяя преобразование Абеля, запишем

$$f(x) - S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta a_k D_k^*(x) - a_n D_{n-1}^*(x) =: I_1 + I_2, \quad D_n^*(x) = \sum_{j=1}^n \cos jx.$$

Ясно, что $|a_n D_{n-1}^*(x)| \leq n|a_n| \leq Cn\beta_n \leq C\xi(n)$.

При оценке I_1 для данного $x \in (0, \pi]$ определим $l \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in (\pi/(l+1), \pi/l]$. Пусть также $p \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $n_{p-1} < n \leq n_p$.

Тогда, если $l \leq n$, то в силу (2) и (4), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C}{x} \left(\sum_{k=p}^{\infty} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |\Delta a_k| + \sum_{j=n}^{n_p-1} |\Delta a_k| \right) \\ &\leq \frac{C}{x} \left(\xi(n_p) \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{n_k} + \beta_n \right) \leq \frac{C}{x} \left(\frac{\xi(n)}{n_p} + \frac{\xi(n)}{n} \right) \leq C\xi(n). \end{aligned} \quad (5)$$

Если $l > n$, то будем рассматривать I_1 как $I_1 = \sum_{k=n}^{l-1} + \sum_{k=l}^{\infty}$. Определим $t \in \mathbb{N}$, так что $n_{t-1} < l \leq n_t$. Аналогично (5) получим

$$\left| \sum_{k=l}^{\infty} \Delta a_k D_k^*(x) \right| \leq \frac{C}{x} \left(\sum_{k=t}^{\infty} \beta_{n_k} + \beta_l \right) \leq \frac{C}{x} \left(\frac{\xi(n_t)}{n_t} + \frac{\xi(l)}{l} \right) \leq C\xi(n).$$

Далее, запишем

$$\left| \sum_{k=n}^{l-1} \Delta a_k D_k^*(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n}^{l-1} k \Delta a_k \right| + \sum_{k=n}^{l-1} |\Delta a_k| |D_k^*(x) - k| =: K + L.$$

Так как

$$\sum_{k=n}^{l-1} k \Delta a_k = \sum_{k=n}^{l-1} a_k + (n-1)a_n - (l-1)a_l, \quad (6)$$

то $K \leq \nu(n) + Cn\beta_n + Cl\beta_l \leq \nu(n) + C\xi(n)$.

Для оценки L мы будем использовать следующие неравенства. Пусть $n_k \leq d \leq D \leq n_{k+1} - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=d}^D j^2 |\Delta a_j| &\leq 2 \sum_{j=d}^D |\Delta a_j| \left(\sum_{m=d}^j m + d^2 \right) \leq 2 \left(\sum_{m=d}^D m \sum_{j=m}^D |\Delta a_j| + d^2 \sum_{j=d}^D |\Delta a_j| \right) \\ &\leq 2 \left(\sum_{m=d}^D m \beta_m + d^2 \beta_d \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\leq C\xi(d)(D+d). \quad (8)$$

В силу неравенства $|D_k^*(x) - k| \leq k^2 x$ имеем

$$L \leq x \sum_{k=n}^{l-1} k^2 |\Delta a_k|.$$

Если $p = t$, т.е. $n_{p-1} < n \leq l-1 < n_p$, то в силу (8) имеем $L \leq Cx\xi(n)(l+n) \leq C\xi(n)$. Если $p < t$, т.е. $n_{p-1} < n \leq n_p \leq n_{t-1} < l \leq n_t$, то¹

$$L \leq x \sum_{k=n}^{n_p-1} k^2 |\Delta a_k| + x \sum_{k=n_{t-1}}^{l-1} k^2 |\Delta a_k| + x \sum_{k=p}^{t-2} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} j^2 |\Delta a_j| =: L_1 + L_2 + L_3.$$

Оценим L_1 и L_2 , используя (8):

$$L_1 + L_2 \leq Cx[\xi(n)(n_p + n) + \xi(n_{t-1})(n_{t-1} + l)] \leq C\xi(n),$$

а L_3 — используя (8) и (3):

$$L_3 \leq Cx \sum_{k=p}^{t-2} \xi(n_k)(n_{k+1} + n_k) \leq Cx\xi(n_p) \sum_{k=1}^{t-1} n_k \leq Cx\xi(n)n_{t-1} \leq C\xi(n).$$

Таким образом,

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq C(\xi(n) + \nu(n)), \quad (9)$$

и, следовательно, равномерная сходимость ряда (1) доказана. Скорость сходимости описывается оценкой (9).

(В) Докажем равномерную ограниченность частных сумм ряда (1). Имеем

$$\sum_{k=1}^n a_k \cos kx = \sum_{k=1}^n \Delta a_k D_k^*(x) - a_n D_{n-1}^*(x).$$

Так как $|a_n D_{n-1}^*(x)| \leq Cn\beta_n \leq C$, то достаточно доказать равномерную ограниченность $\sum_{k=1}^n \Delta a_k D_k^*(x)$. Пусть n, l, p, t определены, как и выше.

¹Здесь $\sum_a^b = 0$, если $b < a$.

Если $l \geq n$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k D_k^*(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} k \Delta a_k \right| + x \sum_{k=1}^{n-1} k^2 |\Delta a_k| =: \tilde{K} + \tilde{L}.$$

Из ограниченности частичных сумм ряда $\sum_k a_k$ и тождества (6) следует неравенство $\tilde{K} \leq C$. Далее оценим $\tilde{L}$ с помощью (7):

$$\begin{aligned} \tilde{L} &\leq x \left[\sum_{k=1}^{p-2} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} j^2 |\Delta a_j| + \sum_{k=n_{p-1}}^n k^2 |\Delta a_k| \right] \\ &\leq 2x \left[\sum_{k=1}^{p-2} \left(\sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} j \beta_j + n_k^2 \beta_{n_k} \right) + \sum_{m=n_{p-1}}^n m \beta_m + n_{p-1}^2 \beta_{n_{p-1}} \right] \leq Cx(n_{p-1} + n) \leq C. \end{aligned}$$

Если $l < n$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k D_k^*(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^l \Delta a_k D_k^*(x) \right| + \left| \sum_{k=l+1}^{n-1} \Delta a_k D_k^*(x) \right|.$$

Первая сумма оценивается, как и в случае $l \geq n$. Оценим вторую сумму:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=l+1}^{n-1} \Delta a_k D_k^*(x) \right| &\leq \frac{C}{x} \sum_{k=l+1}^{n-1} |\Delta a_k| \leq \frac{C}{x} \left(\sum_{k=t}^p \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} |\Delta a_j| + \sum_{j=l+1}^{n_t} |\Delta a_j| \right) \\ &\leq \frac{C}{x} \left(\sum_{k=t}^p \frac{1}{n_k} + \frac{\beta_{l+1}(l+1)}{l} \right) \leq \frac{C}{xl} \leq C. \end{aligned}$$

Таким образом, $|S_n(f, x)| \leq C$ равномерно по x . Теорема доказана.

Заметим, что для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad (10)$$

используя преобразование Абеля, оценки

$$|\tilde{D}_n(x)| = \left| \sum_{j=1}^n \sin jx \right| \leq \frac{C}{x}, \quad |\tilde{D}_n(x)| \leq k^2 x$$

и следуя ходу доказательства теоремы 2, легко получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность коэффициентов ряда (10) является обобщенно монотонной с мажорантой β . Тогда

(А) если

$$k\beta_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow 0,$$

то ряд (10) сходится равномерно;

(В) если

$$k\beta_k \leq C \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

то последовательность частичных сумм ряда (10) равномерно ограничена.

В связи с теоремой 1 работы [5] мы приведем следующие следствия из наших теорем, связанные со сходимостью рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right|, \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \cos kx \right|, \quad (12)$$

где $1 = n_1 < n_2 < \dots$ есть строго возрастающая последовательность натуральных чисел (не обязательно удовлетворяющая условиям (2), (3)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k > 0$, и $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$, $1 = n_1 < n_2 < \dots$. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}$, называется *обобщенно монотонной с мажорантой β* по разбиению $\{n_j\}$, если она удовлетворяет неравенству (4). В этом случае будем обозначать $\{a_k\} \in GM(\{\beta_k\}, \{n_j\})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\{a_k\}$ из класса $GM(\{\beta_k\}, \{n_j\})$, причем $k\beta_k \leq C$ для $k \in \mathbb{N}$. Если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log m_j}{n_j} < \infty, \quad \text{где } m_j = \min(n_j, n_{j+1} - n_j + 1), \quad (13)$$

то ряд (11) сходится для любых x и его сумма принадлежит $L_1[0, \pi]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\{a_k\}$ из класса $GM(\{\beta_k\}, \{n_j\})$, причем $k\beta_k \leq C$ для $k \in \mathbb{N}$. Если справедливо (13) и последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равномерно ограничена, то ряд (12) сходится для любых $x \in (0, \pi]$ и его сумма принадлежит $L_1[0, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Используя преобразование Абеля и неравенство (4), запишем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right| &\leq \frac{C}{x} \left(|a_{n_j}| + |a_{n_{j+1}-1}| + \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-2} |a_k - a_{k+1}| \right) \\ &\leq \frac{C}{xn_j} (n_j \beta_{n_j} + (n_{j+1} - 1) \beta_{n_{j+1}-1}) \leq \frac{C}{xn_j}, \quad x \in (0, \pi]. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда сходимость ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty$$

влечет сходимость ряда (11). Оценивая

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right|,$$

мы будем рассматривать $\int_{1/m_j}^{\pi}$ и $\int_0^{1/m_j}$.

В силу неравенства (14) получим

$$\int_{1/m_j}^{\pi} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right| dx \leq \frac{C}{n_j} \int_{1/m_j}^{\pi} \frac{dx}{x} = O\left(\frac{\log m_j}{n_j}\right). \quad (15)$$

Если $m_j = n_j$, то $n_{j+1}/n_j \geq \lambda > 1$ и по теореме 3 (В) получим

$$\int_0^{1/m_j} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right| dx \leq C \int_0^{1/m_j} dx \leq \frac{C}{n_j}. \quad (16)$$

Если $m_j = n_{j+1} - n_j + 1$, то

$$\left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right| \leq C \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{k\beta_k}{k} \leq C \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k} \leq C \frac{m_j}{n_j},$$

т.е. (16) справедливо и для этого случая. Объединяя (15) и (16), получим

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k \sin kx \right| dx = O\left(\frac{\log m_j}{n_j}\right),$$

что в силу условия (13) влечет интегрируемость ряда (11). Следствие 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 проводится аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Теляковский, “О равномерной сходимости тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 613–620.
- [2] А. С. Белов, “Замечания о сходимости (и ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда”, *Матем. заметки*, **71**:6 (2002), 807–817.
- [3] L. Leindler, “Integrability of sine and cosine having coefficients of a new class”, *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, **1**:1 (2004), Article 4.
- [4] S. B. Stechkin, “Trigonometric series with monotone type coefficients”, *Approximation Theory. Asymptotical Expansions. Suppl. 1*, Proc. Steklov Inst. Math., MAIK-Nauka, Moscow, 2001, 214–224.
- [5] S. A. Telyakovskii, “Some properties of Fourier series of functions with bounded variation”, *East J. Approx.*, **10**:1–2 (2004), 215–218.

С. Ю. Тихонов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

28.04.2005

Исправленный вариант

09.07.2006