Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, О паранормальных пространствах, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 311–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:59:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О паранормальных пространствах

А. П. Комбаров

Класс паранормальных пространств введен Э. ван Дауэном в работе [1] с целью одновременного обобщения нормальных и счетнопаракомпактных пространств. Ван Дауэн доказал [1], что определенные ящичные произведения и произведения топологических пространств не являются паранормальными пространствами. Теоремы, доказанные ван Дауэном в [1], являются обобщениями аналогичных теорем для свойства нормальности, доказанных им ранее [2], [3]. В статье [1] сформулированы следующие вопросы:

- 1) если пространство Y содержит замкнутое подмножество, не являющееся регулярным G_δ -множеством, а пространство X содержит счетное незамкнутое подмножество, то содержит ли произведение $X \times Y$ подпространство, не являющееся паранормальным?
- 2) если D является замкнутым дискретным подмножеством паранормального пространства X , то верно ли, что $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$?

В связи со вторым вопросом для паранормальных пространств ван Дауэн дает более слабую оценку $|D| < 2^{d(X)}$ [1]. Настоящая заметка содержит положительные ответы на эти вопросы. Обозначения и терминология, не разъясняемые ниже, такие же, как в [4], [5].

Регулярное T_1 -пространство X называется *паранормальным* [1], если для любой дискретной последовательности $\{F_n : n < \omega\}$ замкнутых подмножеств X найдутся открытые множества $\{U_{n,k} : n, k < \omega\}$ такие, что

$$F_n \subseteq U_{n,k} \quad \text{для всех } n, k < \omega \quad \text{и} \quad \bigcap \{\overline{U_{n,k}} : n, k < \omega\} = \emptyset.$$

Всякое нормальное пространство, очевидно, паранормально. В работе [1] утверждается, что (регулярные) счетнопаракомпактные пространства также паранормальны [1; диаграмма на с. 63], что неверно, поскольку справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Класс паранормальных пространств совпадает с классом нормальных пространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – паранормальное пространство, F_1 и F_2 – замкнутые непересекающиеся подмножества X . Поскольку система $\{F_1, F_2\}$ дискретна, найдутся открытые множества $\{U_{n,k} : n = 1, 2, k < \omega\}$ такие, что

$$F_n \subseteq U_{n,k} \quad \text{для всех } n = 1, 2, k < \omega \quad \text{и} \quad \bigcap \{\overline{U_{n,k}} : n = 1, 2, k < \omega\} = \emptyset.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00761).

Так как

$$\bigcap \{\overline{U_{n,k}} : n = 1, 2, k < \omega\} = \left(\bigcap \{\overline{U_{1,k}} : k < \omega\} \right) \cap \left(\bigcap \{\overline{U_{2,k}} : k < \omega\} \right) = \emptyset,$$

$$F_n \subseteq \bigcap \{U_{n,k} : k < \omega\} \subseteq \bigcap \{\overline{U_{n,k}} : k < \omega\} \quad \text{при } n = 1, 2,$$

то

$$F_1 \cap \bigcap \{\overline{U_{2,k}} : k < \omega\} = \emptyset, \quad F_2 \cap \bigcap \{\overline{U_{1,k}} : k < \omega\} = \emptyset.$$

Пусть

$$V_{n,k} = X \setminus \overline{U_{n,k}} \quad \text{при всех } k < \omega, n = 1, 2.$$

Очевидно, $\overline{V_{n,k}} \cap F_n = \emptyset$ при $k < \omega, n = 1, 2$. Поскольку

$$\begin{aligned} X &= X \setminus \emptyset = X \setminus \left(F_2 \cap \bigcap \{\overline{U_{1,k}} : k < \omega\} \right) \\ &= (X \setminus F_2) \cup \bigcup \{X \setminus \overline{U_{1,k}} : k < \omega\} \\ &= (X \setminus F_2) \cup \bigcup \{V_{1,k} : k < \omega\}, \end{aligned}$$

то из последнего равенства следует, что $F_2 \subseteq \bigcup \{V_{1,k} : k < \omega\}$. Аналогично доказывается, что $F_1 \subseteq \bigcup \{V_{2,k} : k < \omega\}$. Поскольку $\overline{V_{n,k}} \cap F_n = \emptyset$ при всех $k < \omega$ и $n = 1, 2$, можно применить нормализующую лемму [5; с. 14] для того, чтобы найти открытые непересекающиеся множества, содержащие F_1 и F_2 . Таким образом, пространство X нормально. Теорема 1 доказана.

По известной теореме Катетова [6], [4; 2.7.15(a)] если произведение $X \times Y$ наследственно нормально, то либо все счетные подмножества пространства X замкнуты, либо пространство Y совершенно нормально. В совершенно нормальном пространстве каждое замкнутое подмножество является функционально замкнутым и поэтому регулярным G_δ -множеством. Напомним, что подмножество G топологического пространства называется *регулярным G_δ -множеством*, если оно является пересечением счетного числа замкнутых множеств, внутренности которых содержат G . Таким образом, если произведение $X \times Y$ не содержит подпространств, не являющихся паранормальными, то по теореме 1 произведение $X \times Y$ наследственно нормально. Применив теорему Катетова, получим, что либо все счетные подмножества пространства X замкнуты, либо в пространстве Y любое замкнутое подмножество является регулярным G_δ -множеством. Отсюда вытекает положительный ответ на первый вопрос ван Дауэна. Положительный ответ на второй вопрос является непосредственным следствием теоремы 1 и теоремы Джоунса [7]: если D является замкнутым дискретным подмножеством нормального пространства X , то $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$.

Первый вопрос ван Дауэна возник из попытки [1; с. 64] объединить в одну схему вышеупомянутую теорему Катетова и теорему Зенора [8]: если произведение $X \times Y$ наследственно счетнопаракомпактно, то либо все счетные подмножества пространства X замкнуты, либо пространство Y совершенно нормально. Такое объединение возможно, если рассмотреть класс δ -нормальных пространств, введенный Дж. Маком [9]. Хаусдорфово пространство называется *δ -нормальным*, если любые два непересекающихся замкнутых подмножества этого пространства, одно из которых является регулярным G_δ -множеством, содержатся в непересекающихся окрестностях. Все нормальные и все счетнопаракомпактные пространства являются δ -нормальными [9]. Следующая теорема 2, являющаяся одновременным обобщением теоремы Катетова и теоремы Зенора, доказана в работе [10].

ТЕОРЕМА 2. Если произведение $X \times Y$ наследственно δ -нормально, то либо все счетные подмножества пространства X замкнуты, либо пространство Y совершенно нормально.

В заключение сформулируем задачу, аналогичную второму вопросу ван Дауэна. Верна ли оценка $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$ для замкнутого дискретного подмножества D δ -нормального пространства X ?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. K. van Douwen, *Surveys in General Topology*, eds. G. M. Reed, Academic Press, New York, 1980, 55–129. [2] E. K. van Douwen, *Fund. Math.*, **88**:2 (1975), 127–132. [3] E. K. van Douwen, *Appl. Gen. Topol.*, **7**:1 (1977), 71–76. [4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология*, Изд-во МГУ, М., 1988. [6] М. Katětov, *Fund. Math.*, **35** (1948), 271–274. [7] F. B. Jones, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **43** (1937), 671–677. [8] P. Zenor, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **30** (1971), 199–201. [9] J. Mack, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148** (1970), 265–272. [10] A. P. Kombarov, *Topology Appl.*, **91** (1999), 221–226.

А. П. Комбаров

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: a@kombarov.mccme.ru

Поступило
28.06.2006