Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Степин, С. В. Тихонов, Замечания об изожесткости, централизаторах и спектральной эквивалентности в эргодической теории, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 314–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:57:41

Замечания об изожесткости, централизаторах и спектральной эквивалентности в эргодической теории

А. М. Степин, С. В. Тихонов

Предмет этой заметки – свойства обратимых преобразований $T: M \rightarrow M$, сохраняющих конечную меру μ на M ; такие преобразования называют также *автоморфизмами* пространства с мерой (M, Σ, μ) . О некоторых из асимптотических или алгебраических свойств этих преобразований иногда полезно говорить как о типичных или нетипичных. Для придания одного из возможных точных значений выражению “типичное свойство” используется слабая топология в группе $\mathcal{A}$ всех автоморфизмов пространства (M, Σ, μ) . Эта топология задается системой окрестностей вида

$$\mathcal{O}(T; A, \varepsilon) = \{S \in \mathcal{A} \mid \mu(TA \Delta SA) + \mu(T^{-1}A \Delta S^{-1}A) < \varepsilon\},$$

где $A \in \Sigma$, $\varepsilon > 0$ и Δ – операция симметрической разности. Топологическая группа $\mathcal{A}$ полна относительно слабой топологии, и это позволяет говорить о массивных подмножествах в $\mathcal{A}$, т.е. счетных пересечениях всюду плотных открытых множеств. То или иное свойство преобразований сохраняющих меру *типично*, если оно выполнено для массивного множества элементов из $\mathcal{A}$.

1. Пусть R – некоторое бинарное отношение автоморфизмов, согласованное с изоморфизмом преобразований; последний это синоним сопряженности в $\mathcal{A}$. Через $f_R(T)$ обозначим наибольшую мощность семейств $\{T_\alpha\} \subset \mathcal{A}$, элементы которых попарно неизоморфны и для всех α имеем $T_\alpha \sim_R T$. Таким образом, $f_R(T)$ есть кардинальнозначный инвариант преобразования T . В качестве R здесь будут рассмотрены следующие соотношения, первое из которых не является отношением эквивалентности:

1. Sq: имеем $T_1^2 = T_2$;
2. SE: T_1 и T_2 спектрально эквивалентны и имеют нулевую энтропию;
3. IC: централизаторы преобразований T_1 и T_2 изоморфны;
4. IR: для любой последовательности $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$, имеем $T_1^{k_i} \rightarrow I \Leftrightarrow T_2^{k_i} \rightarrow I$ при $i \rightarrow \infty$.

Последнее отношение естественно назвать *изожесткостью*.

К интересным задачам в эргодической теории приводят вопросы о том, какие значения может принимать инвариант $f_R(T)$, каковы его максимальные значения и какие значения типичны. Хотя ответы на первый вопрос могут быть весьма интересны, мы не будем останавливаться на нем в этой заметке.

С помощью инварианта f_R можно переформулировать некоторые известные результаты эргодической теории. Например, теорема Кинга о корнях утверждает, что в типичном случае $f_{\text{Sq}} \geq 1$, а результат, полученный в [1], [2] максимально уточняет это неравенство: для типичного T , имеем $f_{\text{Sq}} = \mathbb{C}$ (здесь $\mathbb{C}$ – мощность континуума). В пп. 3 и 4 будут рассмотрены вопрос Гудзона о возможных (и типичных) значениях f_{SE} и вопрос о числе неизоморфных изожестких преобразований, обсуждавшийся на конференции в Торуні в 2001 г.

2. Здесь сформулированы факты, которые будут использованы в пп. 3 и 4. Одним из унифицирующих способов построения преобразований с “необычными” свойствами в эргодической теории является машина контрпримеров Рудольфа. Искомые преобразования она представляет в виде композиций бесконечных декартовых произведений некоторого преобразования и перестановок сомножителей. Еще одна машина контрпримеров, основанная на свойстве дизъюнктности сверточных степеней максимального спектрального

типа, была предложена дель Юнко и Леманчиком [3]; в ней используются декартовы произведения степеней типичного преобразования и не используются упомянутые выше перестановки.

Централизатор автоморфизма T обозначим через

$$C(T) = \{S \in \mathcal{A} \mid ST = TS\}.$$

Известно, что в типичном случае $C(T)$ есть слабое замыкание степеней преобразования T .

Для множества $J \subset \mathbb{Z}$ через $\bigotimes_{j \in J} T^j$ обозначим декартово произведение преобразований $\{T^j\}_{j \in J}$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [3]). *Существует массивное множество преобразований $\mathcal{G}$ такое, что для $T \in \mathcal{G}$ и множества $J \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ имеем*

$$C\left(\bigotimes_{j \in J} T^j\right) = C(T) \otimes C(T) \otimes \cdots.$$

Кроме того, для различных J произведения $\bigotimes_{j \in J} T^j$ неизоморфны.

Вот еще два утверждения, которые будут нам нужны (см. [1], [4]).

ТЕОРЕМА 2. *Существует массивное множество $\mathcal{Q}$ преобразований, имеющих континуум попарно неизоморфных корней.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Объединение множеств корней из типичных преобразований содержит массивное множество.*

3. О максимальных значениях инвариантов f_R . Как известно, сохраняющее меру преобразование T эквивалентно своему обратному T^{-1} и имеет одинаковую с ним энтропию. Таким образом, классические инварианты эргодической теории не позволяют различить T и T^{-1} . Вместе с тем, пример Анзаи [5] говорит о том, что они не всегда изоморфны. Через двадцать лет Оселедец [6] посторил автоморфизм T с простым непрерывным спектром, не изоморфный своему обратному; иначе говоря, для этого преобразования T , имеем $f_{SE}(T) \geq 2$. Десятью годами позже дель Юнко показал, что эта оценка верна в типичном случае.

Рассмотрим семейство преобразований

$$\mathcal{P} = \left\{ \bigotimes_{j \in J} S^j \right\}_{J \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}},$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ либо $n \in J$, либо $-n \in J$.

Потребуем, чтобы преобразование S принадлежало $\mathcal{G}$ и имело нулевую энтропию. Тогда все степени S и их декартовы произведения также имеют нулевую энтропию. Все такие произведения не изоморфны между собой по теореме 1. С другой стороны, нетрудно проверить, что максимальные спектральные типы всех этих преобразований совпадают. Таким образом, для типичного S имеем $f_{SE}(\bigotimes_{j \in \mathbb{N}} S^j) = \mathbb{C}$. Примеры преобразований с таким значением характеристики f_{SE} были построены Агеевым. В отличие от его примера, в нашей конструкции спектр может быть сделан простым.

Поскольку, централизаторы всех элементов из $\mathcal{P}$ суть декартовы произведения централизаторов S и, стало быть, совпадают, то

$$f_{IC}\left(\bigotimes_{j \in \mathbb{N}} S^j\right) = \mathbb{C}.$$

Далее, если для некоторой последовательности $\{k_i\} \subset \mathbb{Z}$ и преобразования $T \in \mathcal{P}$ имеем $T^{k_i} \rightarrow I$, то сходимость есть и по каждой (декартовой) координате; в частности, $S^{k_i} \rightarrow I$. Поскольку в $\mathcal{A}$ непрерывна операция умножения, имеем $(S^n)^{k_i} \rightarrow I$ и

для всех $J \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, последовательность $(\bigotimes_{j \in J} S^j)^{k_i}$ сходится к тождественному преобразованию при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, S и $(\bigotimes_{j \in J} S^j)^{k_i}$ – изометрические преобразования и, поскольку изометричность есть отношение эквивалентности, то семейство преобразований $\{\bigotimes_{j \in J} S^j\}_{J \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ состоит из попарно изометрических преобразований. Кроме того, они неизоморфны по теореме 1. Отсюда следует, что $f_{\text{IR}}(S) = \mathbb{C}$.

4. О типичных значениях инвариантов f_R . Отыскание таких значений может оказаться непростым делом. В рассматриваемых здесь случаях проще всего дело обстоит с характеристикой f_{IR} , поскольку для $T \in \mathcal{G}$ (см. теорему 1) имеем $f_{\text{IR}}(T) = \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА. *Централизаторы всех корней из типичного преобразования совпадают. Как следствие, для типичного T имеем $f_{\text{IC}}(T) = \mathbb{C}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть T коммутирует лишь со слабым замыканием своих степеней, а V и W – два корня из T . Если S коммутирует с V , то коммутирует и с T . Тогда S представляется как слабый предел некоторой последовательности степеней T . В этом случае W коммутирует с S , поскольку коммутирует с элементами сходящейся к S последовательности. Таким образом, $C(V) \subset C(W)$ и, следовательно, $C(V) = C(W)$.

По теореме 2 типичное преобразование имеет несчетное (фактически континуальное) семейство попарно неизоморфных корней. Для каждого из них инвариант f_{IC} принимает значение $\mathbb{C}$. Наконец, по предложению из п. 2 множество таких корней массивно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Степин, А. М. Еременко, *Докл. РАН*, **394**:6 (2004), 739–742. [2] О. Н. Агеев, *УМН*, **58**:1 (2003), 177–178. [3] M. Lemanczyk, A. del Junco, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:3 (1992), 725–736. [4] С. В. Тихонов, *Докл. РАН*, **391**:1 (2003), 26–28. [5] H. Anzai, *Osaka J. Math.*, **3**:1 (1951), 83–99. [6] В. И. Оселедец, *Функц. анализ и его прилож.*, **5**:3 (1971), 75–79.

А. М. Степин, С. В. Тихонов
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.06.2006