Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Туляков, Об одном свойстве условно сходящихся рядов, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3559>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:16:52

Об одном свойстве условно сходящихся рядов

Д. Н. Туляков

1. Введение. Хорошо известны существенные различия свойств абсолютно и условно сходящихся рядов (см. [1]–[3]). Для абсолютно сходящихся рядов следующее утверждение почти очевидно: если ряд $\sum a_i$ абсолютно сходящийся и $|a_i| < 1$, то при всех натуральных n ряды $\sum a_i^{2n-1}$ (абсолютно) сходятся и их суммы при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Из-за абсолютного характера сходимости это свойство сохранится при любых перестановках членов ряда. Возможно также ослабить условие на убывание a_i : если для некоторого k ряд $\sum a_i^{2k}$ сходится, то суммы $\sum a_i^{2n-1}$ стремятся к нулю.

Более интересно выполнение аналогичного свойства без каких-либо условий типа абсолютной сходимости, если модули чисел a_i убывают монотонно. Из результатов о рядах из экспонент

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp(-\lambda_k z)$$

(рядов Дирихле) следует (см. [4]), что требование

$$|a_{i+1}| \leq |a_i| \quad \text{для любого } i \in \mathbb{N}$$

и факт существования всех сумм $\sum a_i^{2n-1}$ влекут стремление этих сумм к нулю. В условно сходящихся рядах важен порядок слагаемых, поэтому неясно, насколько существенно требование монотонности. В связи с этим и другими вопросами сходимости рядов Дирихле Е. В. Щепиным был поставлен следующий

Вопрос. Пусть последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i \in (-1, 1)$, такова, что для всех $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{2n-1}$ условно-сходящийся. Обязательно ли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{2n-1} = 0?$$

В рассматриваемой заметке показано, что ответ на этот вопрос отрицательный, более того, последовательность сумм нечетных степеней может иметь любое поведение.

2. Основная лемма и конструкция контрпримера. Сформулируем лемму, которая показывает, что суммы различных нечетных степеней вещественных наборов в достаточной степени независимы.

ЛЕММА 1. Для любого натурального k и любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное $N = N(k, \varepsilon)$ и конечная последовательность $\{b_i\}_{i=1}^N$ вещественных чисел, для которых выполнены следующие два условия:

$$\sum_{i=1}^N b_i^{2k-1} = 1, \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00697), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1551.2003.1), фонда ИНТАС NECCA (грант № 03-51-6637), программы № 1 ОМН РАН и Фонда содействия отечественной науке.

для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$ и любого $M \in \{1, \dots, N\}$

$$\left| \sum_{i=1}^M b_i^{2n-1} \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия (2) при $n = 1$ следует, что для всех $i \in \{1, \dots, N\}$ $|b_i| < 2\varepsilon$.

Покажем, как при помощи этой леммы строится пример бесконечной последовательности с нужными свойствами. Будем придавать k последовательно натуральные значения, примем $\varepsilon = 3^{-k}$ и обозначим через N_k и $\{b_i^{(k)}\}$ полученные из леммы 1 значения. Теперь определим нужные нам числа a_i следующим образом:

$$a_{i+S_k} = b_i^{(k)}, \quad \text{где } S_k = \sum_{j=1}^{k-1} N_j, \quad i \in \{1, \dots, N_k\} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Легко видеть, что последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ определяется таким способом однозначно и непротиворечиво. Убедимся в сходимости рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и оценим их суммы. Пусть $p < q$ – произвольные достаточно большие натуральные числа; обозначим через k и m такие числа, что $S_k < p \leq S_{k+1}$, $S_m \leq q < S_{m+1}$. Будем считать, что $k > n$. Разбивая сумму, по свойству (2) находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=p}^q a_i^{2n-1} \right| &= \left| \sum_{i=1+S_k}^q a_i^{2n-1} - \sum_{i=1+S_k}^{p-1} a_i^{2n-1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1+S_m}^q (b_{i-S_m}^{(m)})^{2n-1} \right| + \sum_{r=k}^{m-1} \left| \sum_{i=1+S_r}^{S_{r+1}} (b_{i-S_r}^{(r)})^{2n-1} \right| + \left| \sum_{i=1+S_k}^{p-1} (b_{i-S_k}^{(k)})^{2n-1} \right| \\ &\leq 3^{-k} + \sum_{r=k}^m 3^{-r} < \frac{5 \cdot 3^{-k}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}$ ряд $\sum a_i^{2n-1}$ сходится по признаку Коши. Для его суммы в силу (1), (2) и выбора ε верна оценка

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{2n-1} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N_k} (b_i^{(k)})^{2n-1} \right) - \sum_{i=1}^{N_n} (b_i^{(n)})^{2n-1} \right| < \sum_{k(\neq n)} 3^{-k} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\sum_i a_i^{2n-1} > 1/2$, т.е. не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

3. Доказательство основной леммы. Прежде всего отметим, что для наших целей достаточно доказать вариант леммы, полученный заменой $=$ на $\geq$ в условии (1). Если такие b_i найдены, то для достижения равенства в (1) достаточно их умножить на некоторую величину из интервала $(0, 1)$, что не нарушает условие (2). Поэтому будет доказан вариант леммы с условием ≥ 1 в формуле (1).

Для дальнейшего нам понадобится следующий факт из элементарной математики (вполне возможно, что у него есть более простое доказательство, чем приведено ниже).

ЛЕММА 2. Пусть k – натуральное число. Тогда найдутся вещественные $x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}$ такие, что

$$\sum_i x_i^{2k-1} = 1 \quad \text{и} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}, \quad n < k \quad \sum_i x_i^{2n-1} = 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $F(\vec{x}) = \vec{y}$, задаваемое формулами $y_j = \sum_i x_i^{2j-1}$. Его производная в точке $(0, 1, \dots, k-1)$ невырождена, поэтому оно обратимо в окрестности этой точки. Следовательно, система уравнений

$$\begin{cases} x_1^{2n-1} + x_2^{2n-1} + \dots + x_k^{2n-1} = 1^{2n-1} + \dots + (k-1)^{2n-1}, & n \in \mathbb{N}, \quad n < k, \\ x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1} + \dots + x_k^{2k-1} = 1^{2k-1} + \dots + (k-1)^{2k-1} + A \end{cases}$$

в окрестности значения $A = 0$ имеет вещественное решение. Возьмем некоторое $A > 0$, для которого система имеет вещественное решение, дополним набор $(x_1, \dots, x_k)$ по формулам $x_{k+n} = -n$, $n < k$, затем полученный набор длины $2k-1$ поэлементно разделим на $\sqrt[2k-1]{A}$. Полученный набор удовлетворяет условиям (3).

Вернемся к доказательству основной леммы. Построим числа b_i с нужными свойствами, группируя их по $2k-1$ штук, по следующим формулам:

$$b_{(2k-1)s+i} = C(M_1 + s)^{-1/(2k)} x_i \quad \text{для } i \in \{1, \dots, 2k-1\}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq s < M_2,$$

где x_i — числа из леммы 2, а константы C , M_1 , M_2 будут определены ниже. В данном случае $N = (2k-1)M_2$. Оценим суммы $\sum b_i^{2n-1}$ отдельно для трех различных случаев: $n < k$, $n = k$, $n > k$. Обозначим через H величину $H = \max_i |x_i|$.

Случай 1 ($n < k$). Возьмем произвольное $M \in \{1, \dots, N\}$, и пусть $M = (2k-1)m + r$, где $m = [(M-1)/(2k-1)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^M b_i^{2n-1} \right| &< \sum_{s=0}^{m-1} \left| \sum_{i=1}^{2k-1} b_{(2k-1)s+i}^{2n-1} \right| + \left| \sum_{i=1}^r b_{(2k-1)m+i}^{2n-1} \right| \\ &= \sum_{s=0}^{m-1} C^{2n-1} (M_1 + s)^{-(2n-1)/(2k)} \left| \sum_{i=1}^{2k-1} x_i^{2n-1} \right| \\ &\quad + C^{2n-1} (M_1 + m)^{-(2n-1)/(2k)} \left| \sum_{i=1}^r x_i^{2n-1} \right| \\ &< 0 + (2k-1)(CH)^{2n-1} M_1^{-(2n-1)/(2k)}. \end{aligned}$$

Случай 2 ($n = k$). В этом случае нас интересует сумма b_i^{2k-1} для всех i . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N b_i^{2k-1} \right| &= \left| \sum_{s=0}^{M_2-1} \sum_{i=1}^{2k-1} b_{(2k-1)s+i}^{2k-1} \right| \\ &= \left| \sum_{s=0}^{M_2-1} C^{2k-1} (M_1 + s)^{-(2k-1)/(2k)} \sum_{i=1}^{2k-1} x_i^{2k-1} \right| \\ &= C^{2k-1} \sum_{m=M_1}^{M_1+M_2-1} m^{-(2k-1)/(2k)} \\ &= 2kC^{2k-1} \left(\sqrt[2k]{M_1 + M_2} - \sqrt[2k]{M_1} + o(M_1^{-(2k-1)/(2k)}) \right). \end{aligned}$$

Случай 3 ($n > k$). Возьмем произвольное $M \in \{1, \dots, N\}$, и пусть $M = (2k-1)m + r$, где $m = [(M-1)/(2k-1)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^M b_i^{2n-1} \right| &< \sum_{s=0}^{m-1} \left| \sum_{i=1}^{2k-1} b_{(2k-1)s+i}^{2n-1} \right| + \left| \sum_{i=1}^r b_{(2k-1)m+i}^{2n-1} \right| \\ &< (2k-1)(CH)^{2n-1} \sum_{m=M_1}^{M_1+M_2-1} m^{-(2n-1)/(2k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< (2k-1)(CH)^{2n-1} \int_{M_1-1}^{\infty} m^{-(2n-1)/(2k)} dm \\
&= \frac{2k(2k-1)}{2n-2k-1} (CH)^{2n-1} (M_1-1)^{-(2n-2k-1)/(2k)}.
\end{aligned}$$

Считая $\varepsilon < 1$, возьмем $C = 1/H$, $M_1 = 1 + (2k(2k-1))^{2k} \varepsilon^{-2k}$. Тогда для случаев **1** и **3** получим оценку сумм: $< \varepsilon$ при всех подходящих n . Поскольку в случае **2** оценка снизу неограниченно растет при $M_2 \rightarrow \infty$, то можно выбрать M_2 так, что левая часть будет больше единицы, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*, Мир, М., 1967. [2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1987. [3] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, Изд-во иностранной литературы, 1951. [4] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

Д. Н. Туляков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

Поступило

18.07.2006