Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Кононенко, Аффинные типы L -многогранников 5-мерных решеток, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 412–430

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:59:21

УДК 514.174.6+519.112.7

АФФИННЫЕ ТИПЫ L -МНОГОГРАННИКОВ 5-МЕРНЫХ РЕШЕТОК

П. Г. Кононенко

Построен алгоритм вывода всех аффинно неэквивалентных видов L -многогранников n -мерных решеток при $n \leq 5$. Вычислительная часть алгоритма, предназначенная для вычисления на ПК, основана на связи геометрии решеток и теории гиперметрических пространств. Впервые получен полный список аффинных типов (139 типов) L -многогранников 5-мерных решеток.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. L -многогранником, или многогранником Делоне, n -мерной точечной решетки называется выпуклый n -мерный многогранник, все вершины которого расположены на поверхности сферы, причем замкнутый шар, ограниченный этой сферой, не содержит других точек решетки. Множество всех L -многогранников данной решетки образует нормальное разбиение (разбиение “грань в грань”) пространства E^n , комбинаторно и метрически двойственное разбиению на области Дирихле–Вороного для точек этой решетки. Такая двойственность позволяет, зная строение одного из этих разбиений, немедленно получить и строение второго. Результаты относительно строений названных разбиений и их многогранников используются в задачах о параллелоэдрах, о наиболее экономных решетчатых покрытиях и в ряде других задач геометрии решеток.

Одной из задач относительно L -разбиений n -мерных решеток является отыскание при данном n всех аффинных типов L -многогранников. Для случаев $n = 2$ и $n = 3$ эти типы давно и широко известны (см., например, [1]), при $n = 4$ они были получены в 1987 году С. С. Рышковым и Р. Эрдалом [2]; на другом пути вывод 4-мерных L -многогранников сделан в статьях [3], [4]. Для больших размерностей вопрос о перечислении типов L -многогранников оставался открытым, хотя при $n = 5$ частичное решение задачи дано в заметке [5] и намечен путь к полному решению в работе [4].

В этой статье завершено решение задачи об аффинных типах L -многогранников 5-мерных решеток, а именно доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Существует всего 139 видов аффинно неэквивалентных L -многогранников 5-мерных решеток, строение 138 из которых дано в таблице 1. Не названным в таблице L -многогранником является симплекс двойного объема.*

Доказательство теоремы 1, помимо идей из статьи [4], существенно опирается на методы теории гиперметрик, связь которой с теорией L -многогранников была обнаружена в [6], [7]. На последнем этапе доказательство теоремы 1 явилось следствием нахождения всех попарно неэквивалентных граней гиперметрического конуса $HY P_{n+1}$ при $n = 5$, за исключением граней, порождающих решетку меньшей размерности чем $n = 5$. Тем самым, доказана

ТАБЛИЦА 1
Аффинные типы 5-мерных L -многогранников

1	2	3	4	5	строение	гиперграни
1	6	6	15	1	S^5	$6S^4$
2	7	12	14	2		$12S^4$
3	7	10	14	1	$p(V_{2,2}^4)$	$1V_{2,2}^4, 9S^4$
4	7	7	14	1	$p(p(P^2))$	$3p(p(P^2)), 4S^4$
5	8	13	13	2		$3p(p(P^2)), 1V_{2,2}^4, 9S^4$
6	8	14	13	2		$4p(p(P^2)), 10S^4$
7	8	10	13	1		$4p(p(P^2)), 2V_{2,2}^4, 4S^4$
8	8	15	13	1		$3p(p(P^2)), 12S^4$
9	8	7	13	1	$p(C^1 \times S^2)$	$2p(C^1 \times S^2), 3p(p(P^2)), 2S^4$
10	8	9	13	1	$p(S_4)$	$1S_4, 4p(p(P^2)), 4S^4$
11	8	10	13	1	$p(C^3)$	$2p(C^3), 8S^4$
12	8	8	13	1		$8p(p(P^2))$
13	9	14	12	2		$2p(C^3), 3V_{2,2}^4, 9S^4$
14	9	13	12	2		$2S_4, 5p(p(P^2)), 6S^4$
15	9	13	12	2		$2p(C^1 \times S^2), 5p(p(P^2)), 1V_{2,2}^4, 5S^4$
16	9	12	12	1		$12p(p(P^2))$
17	9	15	12	2		$9p(p(P^2)), 6S^4$
18	9	10	12	1		$3S_4, 3p(p(P^2)), 1V_{2,2}^4, 3S^4$
19	9	10	12	1	$p(S_6)$	$1S_6, 1p(C^3), 4p(p(P^2)), 4S^4$
20	9	13	12	1		$1S_4, 8p(p(P^2)), 4S^4$
21	9	7	12	1	$p(C^1 \times S^3)$	$1C^1 \times S^3, 4p(C^1 \times S^2), 2S^4$
22	9	8	12	1	$p(S_5)$	$1S_5, 2p(C^1 \times S^2), 4p(p(P^2)), 1S^4$
23	9	9	12	1		$2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 3p(p(P^2)), 2S^4$
24	9	14	12	1		$2p(C^3), 4p(p(P^2)), 8S^4$
25	9	17	12	1	$p(C^4)$	$1C^4, 16S^4$
26	10	17	11	2		$1C^4, 6V_{2,2}^4, 10S^4$
27	10	15	11	2		$2p(C^3), 2S_4, 5p(p(P^2)), 6S^4$
28	10	13	11	2		$1S_6, 1p(C^3), 2S_4, 3p(p(P^2)), 1V_{2,2}^4, 5S^4$
29	10	12	11	2		$1S_5, 2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 4p(p(P^2)), 3S^4$
30	10	11	11	1		$4p(C^1 \times S^2), 2S_4, 5p(p(P^2))$
31	10	11	11	1		$1C^1 \times S^3, 4p(C^1 \times S^2), 4p(p(P^2)), 2V_{2,2}^4$
32	10	15	11	2		$6p(C^1 \times S^2), 3p(p(P^2)), 6S^4$
33	10	8	12	1	$p(p(P^3))$	$2p(P^3), 6p(p(P^2))$
34	10	10	11	1		$2S_6, 2S_4, 4p(p(P^2)), 2S^4$
35	10	12	11	1		$5S_4, 5p(p(P^2)), 2S^4$
36	10	17	11	1		$1C^4, 8p(p(P^2)), 8S^4$
37	10	10	11	1		$2S_6, 4p(C^1 \times S^2), 4S^4$
38	10	12	11	1		$1S_6, 1p(C^3), 2p(C^1 \times S^2), 6p(p(P^2)), 2S^4$
39	10	7	11	1	$p(T_6)$	$1T_6, 6p(C^1 \times S^2)$
40	10	7	11	1	$C^1 \times S^4$	$5C^1 \times S^3, 2S^4$
41	10	8	11	1		$1C^1 \times S^3, 2S_5, 2p(C^1 \times S^2), 3p(p(P^2))$
42	10	9	11	1		$2S_5, 2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 1p(p(P^2)), 2S^4$

1	2	3	4	5	строение	гиперграни
43	10	10	11	1	$p(S_8)$	$1S_8, 1p(C^1 \times S^2), 2p(C^3), 3p(p(P^2)), 3S^4$
44	10	12	11	2		$2S_6, 8p(p(P^2)), 2S^4$
45	10	16	11	1		$4p(C^3), 4p(p(P^2)), 8S^4$
46*	10	32	11	1	C^5	$32S^4$
47	11	17	10	2		$1C^4, 4S_4, 4p(p(P^2)), 1V_{2,2}^4, 7S^4$
48	11	14	10	2		$2S_6, 2p(C^3), 2S_4, 4p(p(P^2)), 4S^4$
49	11	12	10	1		$4S_6, 4p(p(P^2)), 2V_{2,2}^4, 2S^4$
50	11	12	10	2		$1S_8, 1S_6, 1p(C^1 \times S^2), 2S_4, 1p(C^3),$ $3p(p(P^2)), 3S^4$
51	11	11	10	1		$2S_6, 1S_5, 2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 3p(p(P^2)), 1S^4$
52	11	14	10	2		$2S_5, 1S_6, 2p(C^1 \times S^2), 1p(C^3), 4p(p(P^2)), 4S^4$
53	11	10	10	1		$1C^1 \times S^3, 2S_5, 4p(C^1 \times S^2), 2S_4, 1p(p(P^2))$
54	11	10	10	1		$2S_6, 8p(C^1 \times S^2)$
55	11	13	11	1	$p(bp(P^3))$	$1bp(P^3), 12p(p(P^2))$
56	11	8	11	1	$p(C^1 \times p(P^2))$	$1C^1 \times p(P^2), 1p(P^3), 4p(C^1 \times S^2), 2p(p(P^2))$
57	11	11	11	1		$2p(P^3), 3S_4, 6p(p(P^2))$
58	11	10	10	1		$1S_8, 1S_5, 2S_6, 1p(C^1 \times S^2), 3p(p(P^2)), 2S^4$
59	11	8	10	1		$1T_6, 1C^1 \times S^3, 3S_5, 2p(C^1 \times S^2), 1S^4$
60	11	11	10	2		$5S_5, 5p(p(P^2)), 1S^4$
61	11	17	10	1		$1C^4, 2p(C^1 \times S^2), 2p(C^3), 6p(p(P^2)), 6S^4$
62	11	11	10	1		$1S_8, 1C^1 \times S^3, 3p(C^1 \times S^2), 2p(C^3),$ $3p(p(P^2)), 1S^4$
63	11	11	10	1	$p(S_{11})$	$1S_{11}, 5p(C^3), 5S^4$
64	11	16	10	2		$1S_6, 5p(C^3), 4p(p(P^2)), 6S^4$
65	12	13	10	1		$1bp(P^3), 6S_4, 6p(p(P^2))$
66	12	12	10	1		$2p(P^3), 2S_6, 4p(C^1 \times S^2), 4p(p(P^2))$
67*	12	20	10	1		$20V_{2,2}^4$
68	12	17	9	2		$2S_6, 1C^4, 2p(C^3), 2S_4, 4p(p(P^2)), 6S^4$
69	12	15	9	2		$1S_8, 2S_6, 1p(C^1 \times S^2), 4p(C^3), 2p(p(P^2)), 5S^4$
70	12	12	9	1		$6S_6, 6p(p(P^2))$
71	12	11	9	1		$2S_8, 2S_6, 2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 1p(p(P^2)), 2S^4$
72	12	10	9	1		$1S_8, 1C^1 \times S^3, 2S_5, 2S_6, 3p(C^1 \times S^2), 1S^4$
73	12	11	10	1	$C^1 \times V_{2,2}^4$	$9C^1 \times S^3, 2V_{2,2}^4$
74*	12	24	10	1	$bp(bp(P^3))$	$24p(p(P^2))$
75	12	13	10	1		$1bp(P^3), 8p(C^1 \times S^2), 4p(p(P^2))$
76	12	8	10	1	$C^1 \times p(p(P^2))$	$2C^1 \times p(P^2), 4C^1 \times S^3, 2p(p(P^2))$
77	12	8	10	1		$2C^1 \times p(P^2), 2S_5, 4p(C^1 \times S^2)$
78	12	10	10	1		$1C^1 \times p(P^2), 1p(P^3), 2S_5, 2S_4, 2p(C^1 \times S^2),$ $2p(p(P^2))$
79	12	17	9	2		$4S_5, 1C^4, 8p(p(P^2)), 4S^4$
80	12	12	9	2		$1S_{11}, 3S_6, 2p(C^3), 3p(p(P^2)), 3S^4$
81	12	7	9	1		$4T_6, 3C^1 \times S^3$
82	12	10	9	1		$1T_6, 3S_8, 3p(C^1 \times S^2), 3S^4$
83	12	13	9	2		$2S_8, 2S_5, 2p(C^3), 5p(p(P^2)), 2S^4$

1	2	3	4	5	строение	гиперграницы
84	12	9	9	1		$3C^1 \times S^3, 6S_5$
85	12	19	9	2		$1C^4, 8p(C^3), 10S^4$
86	12	10	9	1		$4S_8, 6p(p(P^2))$
87	12	17	9	1		$1C^1 \times S^3, 2C^4, 4p(C^1 \times S^2), 6p(p(P^2)), 4S^4$
88	13	13	9	1		$1bp(P^3), 2S_5, 2S_6, 2p(C^1 \times S^2), 2S_4, 4p(p(P^2))$
89	13	11	9	1	$p(C^1 \times C^1 \times S^2)$	$1C^1 \times p(P^2), 1p(P^3), 1S_8, 2S_6, 1S_5,$ $3p(C^1 \times S^2), 2p(p(P^2))$
90	13	8	10	1		$1C^1 \times C^1 \times S^2, 3p(P^3), 4p(C^1 \times S^2)$
91	13	19	8	2		$3S_6, 2C^4, 3p(C^3), 3p(p(P^2)), 8S^4$
92	13	11	8	1		$1S_{11}, 2S_8, 3S_6, 2p(C^1 \times S^2), 3S^4$
93	13	9	9	1		$2C^1 \times p(P^2), 1T_6, 4S_5, 2p(C^1 \times S^2)$
94	13	11	10	1	$p(C^1 \times C^3)$	$1C^1 \times C^3, 8p(C^1 \times S^2), 2p(C^3)$
95	13	10	8	1		$4S_8, 2C^1 \times S^3, 2S_5, 2S^4$
96	13	14	8	2		$1S_{11}, 2S_8, 5p(C^3), 3p(p(P^2)), 3S^4$
97	13	17	8	2		$2S_8, 1S_5, 1C^4, 4p(C^3), 4p(p(P^2)), 5S^4$
98	14	13	9	1		$1bp(P^3), 4p(P^3), 8p(C^1 \times S^2)$
99	14	13	8	1	$C^1 \times p(C^1 \times S^2)$	$1bp(P^3), 2S_8, 4S_6, 2p(C^1 \times S^2), 4p(p(P^2))$
100	14	8	9	1		$1C^1 \times C^1 \times S^2, 3C^1 \times p(P^2), 2C^1 \times S^3,$ $2p(C^1 \times S^2)$
101	14	9	9	1		$1C^1 \times C^1 \times S^2, 1C^1 \times p(P^2), 2p(P^3), 4S_5,$ $1p(p(P^2))$
102	14	10	9	1		$C^1 \times S_4$ $4C^1 \times p(P^2), 4C^1 \times S^3, 2S_4$
103*	14	18	9	1		$18S_4$
104	14	10	8	1	$bp(C^1 \times C^3)$ $C^1 \times p(C^3)$	$2C^1 \times p(P^2), 4S_8, 4p(C^1 \times S^2)$
105	14	11	9	1		$1C^1 \times C^3, 4S_5, 2S_6, 4p(C^1 \times S^2)$
106*	14	20	9	1		$16p(C^1 \times S^2), 4p(C^3)$
107	14	11	9	1		$1C^1 \times C^3, 8C^1 \times S^3, 2p(C^3)$
108	14	20	7	2		$2S_8, 3C^4, 4p(C^3), 3p(p(P^2)), 8S^4$
109	14	11	7	1		$2S_{11}, 4S_8, 1C^1 \times S^3, 4S^4$
110	14	17	7	2		$2S_{11}, 1C^4, 8p(C^3), 6S^4$
111	15	13	8	1		$1C^1 \times p(P^2), 2bp(P^3), 1p(P^3), 4S_5,$ $4p(C^1 \times S^2), 1p(p(P^2))$
112	15	8	8	1		$1C^1 \times C^1 \times S^2, 3C^1 \times p(P^2), 4T_6$
113	15	11	8	1		$1C^1 \times C^1 \times S^2, 3p(P^3), 4S_8, 3p(p(P^2))$
114	15	11	8	1	$C^1 \times S_6$ $C^1 \times C^1 \times S^3$	$1C^1 \times C^3, 1T_6, 3S_8, 3S_5, 3p(C^1 \times S^2)$
115	15	12	6	1		$6S_{11}, 6S^4$
116	15	22	6	2		$1S_{11}, 5C^4, 5p(C^3), 11S^4$
117	16	14	7	1		$3bp(P^3), 4S_8, 4p(C^1 \times S^2), 3p(p(P^2))$
118	16	11	8	1		$1C^1 \times C^3, 4C^1 \times p(P^2), 4C^1 \times S^3, 2S_6$
119	16	8	8	1	$C^1 \times S_5$	$4C^1 \times C^1 \times S^2, 4C^1 \times S^3$
120	16	9	8	1		$2C^1 \times C^1 \times S^2, 4C^1 \times p(P^2), 2S_5, 1C^1 \times S^3$
121*	16	16	8	1		$8S_5, 8S_6$
122	16	11	7	1		$1C^1 \times C^3, 2S_{11}, 4S_8, 4p(C^1 \times S^2)$
123*	16	18	8	1		$16C^1 \times S^3, 2C^4$

1	2	3	4	5	строение	гиперграни
124	16	26	5	2		$10C^4, 16S^4$
125	17	9	9	1	$p(P^4)$	$1P^4, 8p(P^3)$
126*	18	16	8	1	$bp(P^4)$	$16p(P^3)$
127	18	9	8	1	$C^1 \times p(P^3)$	$1P^4, 6C^1 \times p(P^2), 2p(P^3)$
128	18	8	7	1	$C^1 \times T_6$	$6C^1 \times C^1 \times S^2, 2T_6$
129	18	11	7	1	$C^1 \times S_8$	$1C^1 \times C^1 \times S^2, 2C^1 \times C^3, 3C^1 \times p(P^2), 2S_8, 3C^1 \times S^3$
130	18	11	7	1		$3C^1 \times C^3, 8T_6$
131*	18	14	7	1		$2T_6, 12S_8$
132*	20	14	7	1	$C^1 \times bp(P^3)$	$12C^1 \times p(P^2), 2bp(P^3)$
133	20	9	7	1	$C^1 \times C^1 \times p(P^2)$	$1P^4, 4C^1 \times C^1 \times S^2, 4C^1 \times p(P^2)$
134	20	12	6	1	$C^1 \times S_{11}$	$5C^1 \times C^3, 2S_{11}, 5C^1 \times S^3$
135*	20	12	6	1		$12S_{11}$
136	24	9	6	1	$C^1 \times C^1 \times C^1 \times S^2$	$3P^4, 6C^1 \times C^1 \times S^2$
137*	24	12	6	1	$C^1 \times C^1 \times C^3$	$8C^1 \times C^1 \times S^2, 4C^1 \times C^3$
138*	32	10	5	1	P^5	$10P^4$

ТЕОРЕМА 2. *Количества классов эквивалентности (относительно перестановок множества $X = \{0, \dots, n\}$) граней конуса $HYP_6 = C_6$, порождающих решетку невырожденной размерности $n = 5$, распределенные по убыванию размерности граней, образуют строку (4, 26, 131, 490, 1179, 1893, 1995, 1410, 647, 170, 0, 0, 0, 0).*

2. Гиперметрический конус, cut-конус и L -многогранники решеток. Приведенные здесь определения и результаты относительно гиперметрического конуса и cut-конуса, если для них не указаны другие литературные источники, взяты из работ М. Деза [8] и М. Деза, В. П. Гришухина и М. Лоран [7], [9], [10].

Для натурального числа n рассмотрим конечное множество $X = \{0, 1, \dots, n\}$. *Дистанционной функцией* называется отображение $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее для всех $i, j \in X$ соотношениям $d(i, j) = d(j, i)$, $d(i, i) = 0$. Пара (X, d) называется *дистанционным пространством*.

Положив $d_{ij} = d(i, j)$ для всех $i, j \in X$, мы отождествим любое из пространств (X, d) с точкой $d = (d_{01}, d_{02}, \dots, d_{n-1,n})$ в пространстве $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ (здесь и далее, $N = n(n+1)/2$).

Дистанционное пространство (X, d) называется *гиперметрическим* (соответственно *векторно-гиперметрическим*), если дистанционная функция d удовлетворяет *гиперметрическим* (соответственно *векторно-гиперметрическим*) неравенствам

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j d_{ij} \leq 0 \quad (1)$$

для всех $x = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ при условии $\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1$ (соответственно $\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 0$).

Множество гиперметрических пространств (соответственно векторно-гиперметрических) образует в пространстве $\mathbb{R}^N$ выпуклый замкнутый конус HYP_{n+1} (соответственно NEG_{n+1}). Конус HYP_{n+1} (в отличие от конуса NEG_{n+1}) является полиэдральным [10].

Пусть $S \subset X = \{0, 1, \dots, n\}$, $S \neq \emptyset, X$. Дистанционное пространство (X, d) называется *cut-метрикой* (*метрикой Хэмминга*), если дистанционная функция $d = d^S$ определяется соотношением

$$d_{ij}^S = \begin{cases} 1, & \text{если } |S \cap \{i, j\}| = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Cut-конусом C_{n+1} в пространстве $\mathbb{R}^N$ называется коническая оболочка множества всех cut-метрик $d^S \in \mathbb{R}^N$:

$$C_{n+1} = \left\{ d = \sum_{S \subset X} \lambda_S d^S \in \mathbb{R}^N \mid \lambda_S \geq 0 \right\}. \quad (3)$$

Поскольку для каждой порождающей конус C_{n+1} cut-метрики d^S левая часть гиперметрического неравенства (1) при $x \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1$, принимает значение $x(S)(1 - x(S)) \leq 0$, где $x(S) = \sum_{i \in S} x^i$, то $C_{n+1} \subseteq HYP_{n+1}$.

Таким образом, для конусов C_{n+1} , HYP_{n+1} при всех n имеют место включения $C_{n+1} \subseteq HYP_{n+1}$. При $n \leq 5$ имеют место равенства $C_{n+1} = HYP_{n+1}$ ($n \leq 4$ [7], $n = 5$ [11]). Для $n = 6$ включение строгое: $C_{n+1} \subset HYP_{n+1}$.

Любая гиперметрика $d \in HYP_{n+1}$ имеет реализацию в k -мерном евклидовом пространстве E^k ($k \leq n$), порождая L -многогранник P_d точечной решетки L_d . А именно, существует отображение $\phi: X = \{0, \dots, n\} \rightarrow E^k$, $\phi(i) = A_i \in E^k$ ($i = 0, \dots, n$), где $k = \dim\{A_0, \dots, A_n\}$, причем

- 1) $d_{ij} = \overline{A_i A_j}^2$ ($0 \leq i < j \leq n$);
- 2) система векторов $\bar{v}_i = \overline{A_0 A_i}$ ($i = 0, \dots, n$), определенная с точностью до движения в E^k , имеет квадратную матрицу попарных скалярных произведений $a_{ij} = \bar{v}_i \bar{v}_j$ ($1 \leq i, j \leq n$), связанную с гиперметрикой $d \in HYP_{n+1}$ однозначными соотношениями

$$a_{ii} = d_{0i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad a_{ij} = \frac{1}{2}(d_{0i} + d_{0j} - d_{ij}), \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (4)$$

или обратными соотношениями

$$d_{0i} = a_{ii}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad d_{ij} = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n; \quad (5)$$

- 3) векторы $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ порождают в E^k k -мерную точечную решетку

$$L_d = \left\{ T \in E^k \mid \overline{A_0 T} = \sum_{1 \leq i \leq n} x^i \bar{v}_i, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^n \right\}; \quad (6)$$

- 4) существует k -мерная сфера $S_d \subset E^k$, содержащая на поверхности точки $A_0, \dots, A_n$ и не содержащая точек решетки внутри, т.е. выпуклая оболочка точек $L_d \cap S_d$ образует L -многогранник решетки L_d ;
- 5) если обозначить $\bar{c}$ – радиус-вектор центра сферы S_d , то для всякого набора:
 - а) $x = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ с $\sum_{i=0}^n x^i = 1$,
 - б) $y \in \mathbb{Z}^{n+1}$ с $\sum_{i=0}^n y^i = 0$,

обратная величина в левой части:

- а) гиперметрического,
 - б) векторно-гиперметрического
- неравенства (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & - \sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j d_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x^i x^j a_{ij} - \sum_{1 \leq i \leq n} x^i a_{ii} \\ & = \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} x^i \bar{v}_i - \bar{c} \right\|^2 - \|\bar{c}\|^2; \\ \text{б)} \quad & - \sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j d_{ij} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} y^i y^j a_{ij} = \left\| \sum_{1 \leq i \leq n} y^i \bar{v}_i \right\|^2; \end{aligned}$$

и имеет геометрический смысл в E^k :

- а) степени точки относительно сферы S_d ,
- б) квадрата длины вектора.

С другой стороны, любой L -многогранник P решетки L вместе с отображением ϕ из $X = \{0, \dots, n\}$ во множество вершин многогранника P порождает гиперметрику $d \in HYP_{n+1}$, определенную соотношениями $d_{ij} = \|\phi(i) - \phi(j)\|^2$ ($0 \leq i < j \leq n$).

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между

- а) гиперметриками (X, d) , $|X| = n + 1$,
- б) парами (P, ϕ) , где ϕ — отображение из $X = \{0, \dots, n\}$ во множество вершин L -многогранника P решетки L , причем множество $\phi(X)$ определяет решетку L .

На множестве вектор-строк из $\mathbb{Z}^{n+1}$ введем обозначение $\mathbf{u}_i = (u_i^0, \dots, u_n^0)$, $u_i^i = 1$ и $u_i^j = 0$ при $i \neq j$. Следуя работе [7], введем пару дуальных друг другу понятий *аннулятора гиперметрики*

$$\text{Ann}(d) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n\} \mid \sum_{i=0}^n x^i = 1, \sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j d_{ij} = 0 \right\} \quad (7)$$

и гиперплоскости $H_{\mathbf{x}}$ в гиперметрическом пространстве $\mathbb{R}^N$, определенной для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n\}$ с $\sum_{i=0}^n x^i = 1$ соотношением

$$H_{\mathbf{x}} = \left\{ d = (d_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid \sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j d_{ij} = 0 \right\}. \quad (8)$$

Очевидно, что $\mathbf{x} \in \text{Ann}(d) \iff d \in H_{\mathbf{x}}$ (для соответствующих $\mathbf{x}$ и d).

Теперь каждой точке T решетки L_d , определенной гиперметрикой d , поставим в соответствие множество

$$Z(T) = \left\{ \mathbf{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1, \bar{t} = \sum_{0 \leq i \leq n} x^i \bar{v}_i \right\}, \quad (9)$$

где $\bar{v}_0 = \mathbf{0}$, а $\bar{t}$ — радиус-вектор точки T . Принимая во внимание выражение (7), заключаем, что для множества вершин $\text{ext } P_d$ L -многогранника P_d справедливо

$$\text{Ann}(d) \cup \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n\} = \bigcup_{T \in \text{ext } P_d} Z(T). \quad (10)$$

С другой стороны, рассматривая конус $HY P_{n+1}$, обозначим через

$$F_{\mathbf{x}} = HY P_{n+1} \cap H_{\mathbf{x}} = \left\{ d \in HY P_{n+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq n} x^i x^j d_{ij} = 0 \right\}$$

грань конуса $HY P_{n+1}$, содержащуюся в гиперплоскости $H_{\mathbf{x}}$, а для каждой гиперметрики d , лежащей на поверхности конуса $HY P_{n+1}$, через $F(d)$ обозначим грань наименьшей размерности, содержащую d , т.е.

$$F(d) = \bigcap_{d \in H_{\mathbf{x}}} F_{\mathbf{x}} = \bigcap_{\mathbf{x} \in \text{Ann}(d)} F_{\mathbf{x}}. \quad (11)$$

Полиэдральность конуса гиперметрик $HY P_{n+1}$ (доказанная в [9]), заданного бесконечной системой неравенств (1), означает существование эквивалентной ей конечной подсистемы неравенств, соответствующей тем точкам $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ с $\sum_{i=0}^n x^i = 1$, для которых множество $H_{\mathbf{x}} \cap HY P_{n+1}$ является гипергранью конуса $HY P_{n+1}$. Назовем эти точки *минимальными заслоняющими*.

Множество минимальных заслоняющих точек для $n \leq 5$ найдено П. Ассуа [6], а ранее, но в иной интерпретации, Е. П. Барановским [12]. Барановский [13] указал также минимальные заслоняющие точки для случая $n = 6$.

Перечислим минимальные заслоняющие точки для $n \leq 5$ (с точностью до перестановки элементов вектор-строки):

$$n = 2: \quad (-1, 1, 1);$$

$$n = 3: \quad (-1, 1, 1, 0);$$

$$n = 4: \quad (-1, 1, 1, 0, 0), (-1, -1, 1, 1, 1);$$

$$n = 5: \quad (-1, 1, 1, 0, 0, 0), (-1, -1, 1, 1, 1, 0), (-2, -1, 1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, 2, 1, 1).$$

3. Невырожденные гиперметрики. Пользуясь обозначениями и результатами предыдущего пункта и рассматривая соотношение (10), заметим, что при нахождении строения L -многогранника P_d , соответствующего гиперметрике $d \in HY P_{n+1}$, достаточно знать и на практике наиболее удобно рассматривать только те гиперметрики, для которых представление любой точки $T \in E^k$ во множестве $Z(T)$ единственно.

Равенство $k = \text{rank}(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{rank}\{\bar{v}_i\}_{1 \leq i \leq n} = \dim(L_d)$, справедливое для любой гиперметрики $d \in HY P_{n+1}$, позволяет сформулировать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гиперметрика $d \in HY P_{n+1}$ называется *невырожденной*, если выполнено равенство

$$k \equiv \text{rank}(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \equiv \text{rank}\{\bar{v}_i\}_{1 \leq i \leq n} \equiv \dim(L_d) = n,$$

где $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = a = \alpha(d)$, а векторы $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ определены в п. 2.

Наряду с гиперплоскостями (8) будем рассматривать в пространстве $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ гиперплоскости $H_{\mathbf{y}}$, соответствующие точкам $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ таким, что $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ и $\sum_{i=0}^n y^i = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дефектом гиперметрики $d \in HYP_{n+1}$ называется множество

$$\begin{aligned} K(d) &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n y^i = 0, \sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j d_{ij} = 0 \right\} \\ &= \{ \mathbf{0} \} \cup \left\{ \mathbf{y} = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{ \mathbf{0} \} \mid \sum_{i=0}^n y^i = 0, d \in H_{\mathbf{y}} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{y} = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n y^i = 0, \sum_{i=0}^n y^i \bar{v}_i = \mathbf{0} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Относительно приведенных выше определений результаты п. 2 позволяют сформулировать следующие леммы.

ЛЕММА 1. Невырожденность гиперметрики $d \in HYP_{n+1}$ эквивалентна каждому из следующих утверждений:

- 1) $K(d) = \mathbf{0}$;
- 2) система точек $\phi(X) = \{A_0, \dots, A_n\}$ определяет основной симплекс решетки L_d , а вектор-строки множества $\text{Ann}(d) \cup \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n\}$ представляют собой барицентрические координаты вершин многогранника P_d относительно барицентрического базиса $\{A_0, \dots, A_n\}$.

ЛЕММА 2. Существует взаимно однозначное соответствие между

- а) невырожденными гиперметриками (X, d) , $|X| = n + 1$;
- б) парами (P, ϕ) , где P — это L -многогранник некоторой n -мерной решетки L , а ϕ — инъективное отображение из $X = \{0, 1, \dots, n\}$ во множество вершин многогранника P , причем $\phi(X)$ образует основной симплекс решетки L .

4. Размерность решеток и аффинные типы L -многогранников, соответствующие граням конусов HYP_{n+1} и C_{n+1} . Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $\pi: (x^0, x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$. Полученные проектированием множества $\text{Ann}^*(d) := \pi(\text{Ann}(d))$, $K^*(d) := \pi(K(d))$ будем, как и исходные, называть соответственно аннулятором и дефектом гиперметрики d .

Очевидно, что $K^*(d)$ имеет и следующее представление:

$$K^*(d) = \left\{ \mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{1 \leq i \leq n} y^i \bar{v}_i = \mathbf{0} \right\}. \quad (13)$$

Заметим, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ с $\sum_{i=0}^n x^i = 1$ гиперплоскость $H_{\mathbf{x}}$ делит пространство $\mathbb{R}^{(n+1)/2}$ на два полупространства, замыкание одного из которых содержит конусы C_{n+1} и HYP_{n+1} (поскольку $C_{n+1} \subseteq HYP_{n+1}$). Аналогичное утверждение выполнено и для гиперплоскости $H_{\mathbf{y}}$ при любом $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{ \mathbf{0} \}$ с $\sum_{i=0}^n y^i = 0$, поскольку $C_{n+1} \subseteq HYP_{n+1} \subseteq NEG_{n+1}$.

Отсюда следует, что аннулятор $\text{Ann}(d)$ и дефект $K(d)$ сохраняются для всех точек d из относительной внутренней $\text{ri } F$ грани F (т.е. множества внутренних точек для F в аффинном подпространстве $\text{aff}(F)$), натянутом на множество точек грани F). Это позволяет ввести следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть F – грань конуса $HY P_{n+1}$ (или C_{n+1}).

а) *Аннулятором грани F* будем называть множество $\text{Ann}(F) = \text{Ann}(d)$ (и множество $\text{Ann}^*(F) = \text{Ann}^*(d)$) для любой $d \in \text{ri } F$.

б) *Дефектом грани F* будем называть множество $K(F) = K(d)$ (и множество $K^*(F) = K^*(d)$) для любой $d \in \text{ri } F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Грань F конуса C_{n+1} (или $HY P_{n+1}$) называется *невыврожденной*, если $K^*(F) = \mathbf{0}$, т.е. все гиперметрики $d \in \text{ri } F$ из относительной внутренности грани F невырождены.

Для произвольной гиперметрики $d \in HY P_{n+1}$ рассмотрим линейное отображение $\omega_d: \mathbb{Z}^n \rightarrow E^k$, определенное соотношением

$$\omega_d: \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \omega_d(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i \leq n} x^i \bar{v}_i, \quad (14)$$

где $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ – векторы, определенные для гиперметрики d в п. 2. Очевидно, что $\text{Ker}(\omega_d) = K^*(d)$ и $\text{Im}(\omega_d) = L_d$, где L_d определена для d соотношением (6).

Отображение ω_d порождает семейство естественных изоморфизмов $\hat{\omega}_d: \mathbb{Z}^n / K^*(F) \rightarrow L_d$ для всех d из относительной внутренности некоторой грани F конуса $HY P_{n+1}$ (или C_{n+1}). Принимая во внимание, что множество вершин $\text{ext } P_d$ многогранника P_d представимо в следующем виде: $\text{ext } P_d = \omega(\text{Ann}(d) \cup \{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n\})$, получаем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть F – грань конуса $HY P_{n+1}$ (или C_{n+1}). Тогда справедливо:

- а) $L_d \simeq \mathbb{Z}^n / K^*(F)$ ($\forall d \in \text{ri}(F)$) и все решетки L_d для $d \in \text{ri}(F)$ имеют одну и ту же размерность;
- б) размерность решетки L_d равна $\dim L_d = n - \dim K^*(F)$;
- в) все L -многогранники P_d для $d \in \text{ri } F$ аффинно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения б) рассмотрим расширение $\bar{\omega}_d$ отображения ω_d в $\mathbb{R}^n$ и заметим, что $\dim L_d = \dim(\text{Im } \bar{\omega}_d)$. С другой стороны, $\dim(\text{Ker } \omega_d) = \dim(\text{Ker } \bar{\omega}_d)$, поскольку в $\text{Ker } \bar{\omega}_d$ можно выбрать целочисленный базис из $\text{Ker } \omega_d$, так как $\text{Ker } \bar{\omega}_d$ есть множество решений уравнения

$$\sum_{i=1}^n y^i \bar{v}_i = \mathbf{0}$$

относительно $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, которое после выбора основного базиса решетки L_d превращается в систему целочисленных линейных однородных уравнений.

5. Представление граней конуса C_{n+1} . Для произвольного подмножества $S \subset X = \{0, \dots, n\}$ ($S \neq \emptyset, X$) рассмотрим вектор $c^S \in \mathbb{R}^N$, ортогональный cut-метрике $d^S \in \mathbb{R}^N$ и заданный соотношением $c_{ij}^S = 0$, если $|i, j| \cap S| = 1$, и $c_{ij}^S = 1$ в противном случае. Очевидные соотношения $c^S \cdot d^S = 0$, $c^{S_1} \cdot d^{S_2} > 0$, если $S_1 \neq S_2$, показывают, что гиперплоскость $c^S \cdot d = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ отделяет cut-вектор d^S от всех других cut-векторов. Следовательно, множество cut-векторов в точности соответствует множеству направлений, задающих ребра конуса C_{n+1} .

Рассмотрение сечения $C_{n+1}^* = C_{n+1} \cap H$ конуса C_{n+1} гиперплоскостью H , заданной уравнением

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} d_{ij} = 1,$$

и взаимно однозначного соответствия между гранями C_{n+1} и C_{n+1}^* позволяет применить для C_{n+1} известные факты теории выпуклых многогранников.

Множество ребер любой грани F конуса C_{n+1} совпадает с множеством ребер конуса C_{n+1} , содержащихся в F , причем F является конической оболочкой этого множества. Последнее позволяет в дальнейшем отождествлять любую грань конуса C_{n+1} с содержащимся в ней множеством cut-векторов.

6. Невырожденные грани cut-конуса C_{n+1} . Размерность решетки L_d для $d \in C_{n+1}$. Пусть $d^S \in C_{n+1}$ – cut-метрика, соответствующая множеству $S \subset X = \{0, \dots, n\}$ ($S \neq \emptyset, X$), и пусть $(y^0, \dots, y^n), (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $(y^0, \dots, y^n) \neq (0, \dots, 0)$, $\sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0$, $\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1$. Тогда

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j d_{ij}^S = \sum_{i \in S, j \notin S} y^i y^j d_{ij}^S = -s_0^2 < 0, \quad \text{где } s_0 = \sum_{i \in S} y^i, \quad (15)$$

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j d_{ij}^S = \sum_{i \in S, j \notin S} x^i x^j d_{ij}^S = s_1(1 - s_1) \leq 0, \quad \text{где } s_1 = \sum_{i \in S} x^i. \quad (16)$$

Пусть d – гиперметрика из относительной внутренней грани F конуса C_{n+1} . Рассмотрим линейное отображение $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow E^k$,

$$\omega: x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} x^i \bar{v}_i,$$

где векторы $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ определены в п. 2 для гиперметрики d . Можно представить ω как композицию $\omega = \delta \circ \gamma$ ($\omega: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\delta} E^k$), где γ – изоморфизм $\mathbb{R}^n$ в подпространство $\mathbb{R}^{n+1}$, определенный соотношениями

$$y^0 = - \sum_{1 \leq i \leq n} x^i, \quad y^i = x^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

а δ определяется соотношениями

$$\omega(y) = \sum_{0 \leq i \leq n} y^i \bar{v}_i, \quad \bar{v}_0 = \bar{0}.$$

Рассмотрим ядро отображения δ :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\delta) &= \left\{ y = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0, \sum_{0 \leq i \leq n} y^i \bar{v}_i = \bar{0} \right\} \\ &= \left\{ y = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0, \sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j d_{ij} = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначим аналогично тому, как это сделано в п. 2, через

$$H_{\mathbf{y}} = \left\{ h = (h_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j h_{ij} = 0 \right\}$$

гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$, определенную для каждого $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ с $\sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0$. Плоскость $H_{\mathbf{y}}$ проходит через относительно-внутреннюю точку $d \in \mathbb{R}^N$ грани F конуса C_{n+1} в том и только том случае, когда $H_{\mathbf{y}}$ содержит все ребра конуса C_{n+1} , определяющие грань F . Другими словами, $\text{Ker}(\delta)$ можно представить как множество решений системы

$$\sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0, \quad \sum_{0 \leq i < j \leq n} y^i y^j d_{ij}^{S_l} = 0, \quad 1 \leq l \leq r, \quad (18)$$

где $d^{s_1}, \dots, d^{s_r}$ – cut-метрики, определяющие грань F . С учетом соотношений (15) система (18) эквивалентна системе

$$\sum_{0 \leq i \leq n} y^i = 0, \quad \sum_{i \in S_l} y^i = 0, \quad 1 \leq l \leq r. \quad (19)$$

Пусть q – ранг системы (19). Размерность пространства решений есть $(n+1) - q = \dim(\text{Ker } \delta)$. Поскольку $\text{Im}(\gamma) \subset \text{Ker}(\delta)$, то $\text{Ker}(\omega) = \gamma^{-1}(\text{Ker } \delta)$ и $\dim(\text{Ker } \omega) = \dim(\text{Ker } \delta)$. Следовательно, $\dim(\text{Im } \omega) = n - \dim(\text{Ker } \omega) = q - 1$, а размерность точечной решетки удовлетворяет соотношению

$$\dim(L_d) = \dim(\omega(\mathbb{Z}^n)) = \text{rank}\{\bar{v}_i\}_{1 \leq i \leq n} = \dim(\text{Im } \omega).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Размерность точечной решетки, определяемой любой гиперметрикой d из относительной внутренности грани F конуса C_{n+1} , равна $q - 1$, где q – ранг системы (19), соответствующей грани F . В частности, грань F невырождена в том и только том случае, когда система (19) имеет ранг $n + 1$ (невырождена).*

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая грань Q , принадлежащая вырожденной грани F конуса C_{n+1} , сама является вырожденной. В частности, если одна из граней F и G конуса C_{n+1} вырождена, то $Q = F \cap G$ вырождена.*

7. Матрица $M(F)$ невырожденной грани F конуса C_{n+1} . Приведем способ отыскания матрицы $M(F)$ барицентрических координат вершин L -многогранника, соответствующего любой из невырожденных граней F cut-конуса C_{n+1} . Очевидно, что

$$M(F) = \{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n \cup \text{Ann}(F) = \{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n \cup \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^n \mid \sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1, F \subset H_{\mathbf{x}} \right\}.$$

Рассуждая, как в п. 6, с учетом соотношений (16) заключаем, что $M(F)$ является множеством целочисленных решений системы

$$\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1, \quad \left(\sum_{i \in S_l} x^i \right) \left(1 - \sum_{i \in S_l} x^i \right) = 0, \quad 1 \leq l \leq r, \quad (20)$$

где $d^{S_1}, \dots, d^{S_r}$ – cut-метрики, задающие грань F . Множество решений системы получается объединением решений 2^r систем

$$\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1, \quad \sum_{i \in S_l} x^i = \varepsilon_l, \quad 1 \leq l \leq r, \quad \varepsilon_l \in \{0, 1\}, \quad (21)$$

каждая из которых в случае невырожденности грани F имеет не более одного решения. (Выделив $n + 1$ линейно независимых строк основной матрицы системы (21), включая первую, можно свести семейство к 2^n системам, каждая из которых имеет единственное решение, проверяемое затем на принадлежность множеству $\mathbb{Z}^n$ и выполнение оставшихся равенств из системы (20).)

8. Классы эквивалентности граней конуса C_{n+1} и их матричное представление. Пусть φ – перестановка множества $X = \{0, \dots, n\}$ (биекция X в себя). Определим отображения φ^* и $\bar{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \varphi^*: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^N, & \varphi^*: h_{ij} &\mapsto \varphi^*(h)_{ij} = h_{\varphi(i)\varphi(j)}, \\ \bar{\varphi}: \mathbb{Z}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}, & \bar{\varphi}: (x^0, \dots, x^n) &\mapsto (x^{\varphi(0)}, \dots, x^{\varphi(n)}). \end{aligned} \quad (22)$$

Пусть F и G – грани конуса C_{n+1} . Будем говорить, что F π -эквивалентна G ($F \sim_\pi G$), если существует перестановка φ множества $X = \{0, \dots, n\}$, индуцирующая биекцию φ^* подмножеств cut-метрик, определяющих грани F и G . Тогда очевидно, что $\varphi^*(F) = G$, где F и G рассматриваются как множества в $\mathbb{R}^N$.

Заметим, что

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} x^i x^j h_{\varphi(i)\varphi(j)} = \sum_{0 \leq i < j \leq n} x^{\varphi^{-1}(i)} x^{\varphi^{-1}(j)} h_{ij}.$$

Поэтому $\text{Ann}(\varphi^*\{F\}) = \bar{\varphi}^{-1}\{\text{Ann}(F)\}$ и $K(\varphi^*\{F\}) = \bar{\varphi}^{-1}\{K(F)\}$. Следовательно, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Аффинные типы L -многогранников, поставленные в соответствие (леммой 9) π -эквивалентным граням конуса C_{n+1} , совпадают. (В частности, совпадают их размерность и характеристика невырожденности.) Матрицы $M(F)$ и $M(G)$ для π -эквивалентных невырожденных граней F и G конуса C_{n+1} отличаются лишь расстановкой столбцов: $M(\varphi^*\{F\}) = \bar{\varphi}^{-1}\{M(F)\}$, где $G = \varphi^*(F)$.*

Из леммы 5 вытекает, что в дальнейшем мы можем говорить о невырожденном π -классе граней конуса C_{n+1} и аффинном типе L -многогранников π -класса граней конуса C_{n+1} .

В дальнейшем для реализации алгоритма нахождения аффинных типов L -многогранников важно для каждого класса π -эквивалентных граней конуса C_{n+1} зафиксировать такой представитель, который можно восстановить, имея в распоряжении любую грань того же класса, другими словами, иметь алгоритм получения граней канонического вида.

Каждой cut-метрике d^S ($S \subset X$, $S \neq \emptyset$) сопоставим характеристический столбец $(\epsilon^0, \dots, \epsilon^n)^T$, где $\epsilon^i = 1$, если $i \in S$, и $\epsilon^i = 0$ в противном случае. Пусть F – произвольная грань конуса C_{n+1} . Поставим ей в соответствие матрицу $\tilde{F}$ (определенную неоднозначно) размера $(n + 1) \times |F_c|$, составленную из характеристических столбцов, соответствующих cut-метрикам, входящим в F . И пусть $\mathcal{F}$ – множество всевозможных

матриц $\tilde{F}$, поставленных в соответствие граням конуса C_{n+1} . Рассмотрим преобразования матриц $\tilde{F}$ на множестве $\mathcal{F}$:

- а) замена в одном из столбцов нулей на единицы, и наоборот;
- б) перестановка столбцов;
- с) перестановка строк.

Преобразования а), б) сохраняют грань F , а преобразование с) сохраняет класс эквивалентности грани F . Таким образом, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6. *Существуют взаимно однозначные соответствия между:*

- 1) *гранями конуса C_{n+1} и классами эквивалентности матриц $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ относительно преобразований а), б) (называемые далее аб-классами);*
- 2) *π -классами граней конуса C_{n+1} и классами эквивалентности матриц $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ относительно преобразований а), б), с) (называемые далее абс-классами).*

Внутри каждого аб-класса матриц, представляющего фиксированную грань F конуса C_{n+1} , выберем однозначно определенного фиксированного аб-представителя $\hat{F}$, в котором

- A_1) последняя строка состоит из нулей (преобразования а));
- A_2) столбцы идут в возрастающем порядке (читая их как двоичную запись натурального числа снизу вверх).

Легко видеть, что количество аб-классов (и их представителей $\hat{F}$) не превышает $(n+1)!$. Каждому аб-представителю $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ поставим в соответствие натуральное число $\chi(\tilde{F}) \in \mathbb{N}$, двоичная запись которого получается последовательным присоединением столбцов матрицы $\tilde{F}$ (читая их снизу вверх, слева направо).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Канонической матрицей* для π -класса $\{F_\alpha\}$ граней конуса C_{n+1} будем считать матрицу-представителя $\tilde{F}$ аб-класса (удовлетворяющую условиям A_1), A_2), которая имеет наименьшее значение $\chi(\tilde{F})$ на множестве аб-представителей.

9. Матричное представление аффинных типов L -многогранников. Два конечногранных выпуклых n -мерных многогранника P и $Q \subset E^n$ аффинно эквивалентны, если существует невырожденное аффинное преобразование Ψ пространства E^n , осуществляющее биекцию множеств точек многогранников: $P = \Psi(Q)$. Заметим, что для аффинной эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы аффинное преобразование Ψ осуществляло биекцию лишь множеств вершин многогранников: $\text{ext } P = \Psi(\text{ext } Q)$.

Очевидна следующая лемма.

ЛЕММА 7. *Два многогранника P и $Q \in E^n$ аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда среди вершин каждого можно выбрать такой барицентрический базис пространства E^n : $V = \{V_0, \dots, V_n\} \subset \text{ext } P$, $U = \{U_0, \dots, U_n\} \subset \text{ext } Q$, что барицентрические координаты вершин многогранника P в базисе V совпадают с барицентрическими координатами вершин Q в базисе U .*

Дадим описание приведения матрицы барицентрических координат L -многогранника к канонической матрице относительно аффинного типа L -многогранников. Ограничим множество рассматриваемых L -многогранников только такими, среди вершин которых можно выбрать основной симплекс решетки. Для дальнейшего это ограничение естественно, поскольку мы будем рассматривать только L -многогранники, полученные на основе невырожденных гиперметрик.

Пусть P – один из L -многогранников некоторой решетки L , и пусть $\mathcal{M} = \{M_V : V \in \mathcal{V}\}$ – множество всевозможных матриц M_V размера $|\text{ext } P| \times (n+1)$, вектор-строки которых являются барицентрическими координатами вершин P в барицентрическом базисе V решетки L . Указанное выше множество $\mathcal{V}$ барицентрических базисов решетки L ограничим основными симплексами решетки с вершинами, выбранными среди вершин P и имеющими наибольшее возможное количество гиперграней, лежащих на поверхности многогранника P . (Каждая такая грань однозначно соответствует столбцу матрицы $M_V \in \mathcal{M}$, не содержащему отрицательных значений.)

Остановимся на способе получения матриц множества $\mathcal{M}$. Пусть M – матрица размера $|\text{ext } P| \times (n+1)$ барицентрических координат вершин P относительно некоторого основного барицентрического базиса $B = \{B_0, \dots, B_n\}$ решетки L , т.е.

$$L = \left\{ V \in E^n : \overline{OV} = \sum_{0 \leq i \leq n} x^i \bar{b}_i, \sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1, (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \right\}, \\ \bar{b}_i = \overline{OB_i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Пусть V – это некоторое подмножество вершин многогранника P с $|V| = n+1$, а Y_V – матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, составленная из тех строк матрицы M , что отвечают множеству вершин V . Множество вершин V определяет основной симплекс решетки L в том и только том случае, когда $\det(Y_V) = 1$. В этом случае матрица M_V барицентрических координат вершин многогранника P имеет вид $M_V = M \cdot Y_V^{-1}$.

Очевидно, что множество $\mathcal{M}_V = \{M_V\}$ описанных выше координатных матриц в фиксированном базисе V не зависит от выбора первоначального барицентрического базиса B решетки L , а сами матрицы $M_V \in \mathcal{M}_V$ отличаются друг от друга лишь расстановкой строк и столбцов.

Далее введем следующую вспомогательную конструкцию. Для произвольной матрицы A размера $q \times (n+1)$ обозначим через $\Lambda(A) = (a_1, \dots, a_{q(n+1)})$ строку, полученную последовательным присоединением столбцов матрицы M . Для произвольных матриц A, B того же размера введем отношение *лексической* упорядоченности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица A *лексически меньше* матрицы B ($A \prec B$), если найдется число $l \in \mathbb{Z}, 1 \leq l \leq q(n+1)$, что для $\Lambda(A) = (a_1, \dots, a_{q(n+1)})$ и $\Lambda(B) = (b_1, \dots, b_{q(n+1)})$ выполнено

- 1) $a_i = b_i$ ($1 \leq i < l$);
- 2) $a_l < b_l$.

(Будем считать, что $A \preceq B \iff [A \prec B \text{ либо } A = B]$.)

Поскольку $|\mathcal{M}_V| \leq (n+1)!q!$, то среди матриц из множества $\mathcal{M}_V$ (при фиксированном $V \in \mathcal{V}$) всегда существует наименьшая относительно лексической упорядоченности матрица $\overline{M}_V \in \mathcal{M}$ (т.е. $\overline{M}_V \preceq M_V \forall M_V \in \mathcal{M}_V$). Пусть $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{M}_V : V \in \mathcal{V}\}$ – множество матриц $\overline{M}_V$, поставленных индексами V в однозначное соответствие симплексам $V \in \mathcal{V}$. Конечность способов выбора симплекса $V \in \mathcal{V}$ обеспечивает конечность множества $\overline{\mathcal{M}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть P – это L -многогранник решетки L , содержащий среди своих вершин хотя бы один основной симплекс решетки L . Матрицу $\overline{M}_V \in \overline{\mathcal{M}}$, лексически наименьшую на множестве $\mathcal{M}$, будем называть *канонической относительно аффинного типа L -многогранника P* .

10. Алгоритм нахождения аффинных типов L -многогранников размерности $n \leq 5$, содержащих основной симплекс решетки. Результаты. В этом пункте мы будем считать, что для множества $X = \{0, \dots, n\}$ значение $n \leq 5$, и иметь ввиду, что для таких n справедливо равенство $C_{n+1} = HYP_{n+1}$.

Как следует из леммы 5, вопрос о нахождении аффинных типов L -многогранников, содержащих среди своих вершин основной симплекс решетки, сводится к нахождению всех π -типов невырожденных граней конуса C_{n+1} .

Всюду ниже, говоря о гранях конуса C_{n+1} , мы будем иметь в виду множества cut-метрик, содержащихся в этих гранях. Для гиперграней конуса $C_{n+1} = HYP_{n+1}$ ($n \leq 5$) эти множества получаем из того факта, что каждая гипергрань лежит в некоторой гиперплоскости $H_{\mathbf{x}}$, где точка $\mathbf{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{i=0}^n x^i = 1$, принадлежит множеству минимальных заслоняющих точек (см. п. 2).

Используя соотношение (16), получаем, что

$$F = \left\{ d^S \mid S \subset X, \sum_{i \in S} x^i \in \{0, 1\} \right\}. \quad (23)$$

Так как сечение C_{n+1}^* конуса C_{n+1} является выпуклым конечногранным многогранником, то любая его грань размерности $k - 1$ может быть получена пересечением некоторой грани размерности k и некоторой не содержащей ее гиперграней. Эти утверждения переносятся на соответствующие подмножества вершин многогранника C_{n+1}^* и cut-метрик, определяющих ребра конуса C_{n+1} .

Пусть $\mathcal{E}^k = \{F_i\}_{i=1}^{q_k}$ — множество граней конуса C_{n+1} размерности k , а $\mathcal{E}^{N-1} = \{R_j\}_{j=1}^{q_{N-1}}$ — множество его гиперграней. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{k-1} \subseteq \{Q_{ij}\} &:= \{F_i \cap R_j \mid F_i \not\subseteq R_j, 1 \leq i \leq q_k, 1 \leq j \leq q_{N-1}\} \\ &\text{для } 2 \leq k < N = \binom{n+1}{2}, \end{aligned}$$

причем $\dim Q_{ij} \leq (k - 1)$. Для того чтобы выделить из множества $\{Q_{ij}\}$ грани размерности $k - 1$, достаточно заметить, что размерность грани Q_{ij} равна рангу матрицы размера $|Q_{ij}| \times n(n+1)/2$, строки которой соответствуют векторной записи cut-метрик $d^S = (d_{01}^S, \dots, d_{n-1}^S)$, содержащихся в Q_{ij} . Таким образом, имея семейство гиперграней $\mathcal{E}^{N-1}$ и повторяя $N - 2 = \binom{n+1}{2} - 2$ раза описанную выше процедуру, мы можем найти все грани конуса C_{n+1} .

Применение такого алгоритма отыскания граней, запрограммированного для ПК, приемлемо по объему (и времени) вычислений лишь для $n \leq 4$. Для $n = 5$ потребовались дополнительные соображения, сокращающие вычисления. Суть их заключается в том, чтобы для каждой размерности k ($1 \leq k \leq \binom{n+1}{2} - 1$) находить лишь грани множества $\overline{\mathcal{G}}^k = \{\widehat{F}_i\}_{i=1}^{q_k}$, соответствующего семейству классов π -эквивалентности невырожденных граней конуса C_{n+1} , причем каждый π -класс представлен в множестве $\overline{\mathcal{G}}^k$ невырожденной гранью $\widehat{F}_i$, соответствующей канонической матрице π -типа. Легко видеть, что множество $\mathcal{G}_k := \{\varphi^*(\widehat{F}) \mid \widehat{F} \in \overline{\mathcal{G}}^k, \varphi \in S_{n+1}\}$ есть множество всех невырожденных граней размерности k . (Напомним, что φ^* — отображения, определенные в п. 8 и соответствующие всевозможным перестановкам φ множества $X = \{0, \dots, n\}$.) Поэтому

$$\overline{\mathcal{G}}^{k-1} \subseteq \overline{\mathcal{Q}} := \{\widehat{\varphi^*(\widehat{F}_i) \cap \psi^*(\widehat{R}_j)} \mid 1 \leq i \leq q_k, 1 \leq j \leq q_{N-1}, \varphi, \psi \in S_{n+1}\},$$

где $\{\widehat{F}_i\}_{i=1}^{q_k} = \overline{\mathcal{G}}^k$, $\{\widehat{R}_i\}_{i=1}^{q_{N-1}} = \overline{\mathcal{G}}^{N-1}$. (Здесь $\widehat{Q}$ означает грань конуса C_{n+1} , π -эквивалентную грани Q и соответствующую канонической матрице π -типа.)

Очевидные сами по себе утверждения следующей леммы значительно сокращают представление множества $\overline{\mathcal{Q}}$.

ЛЕММА 8. Для любых граней F и G конуса C_{n+1} и перестановок φ и ψ множества X справедливо:

- 1) $\varphi^*(F \cap G) = \varphi^*(F) \cap \psi^*(G)$;
- 2) $\varphi^*(F) \cap \psi^*(G) \stackrel{\pi}{\sim} (\psi^{-1} \circ \varphi)^*(F) \cap G$;
- 3) если $(\varphi^{-1})^*(F) = (\psi^{-1})^*(F)$, то $F \cap \varphi^*(G) \stackrel{\pi}{\sim} F \cap \psi^*(G)$.

Утверждение 2) леммы 8 позволяет представить

$$\overline{\mathcal{G}}^{k-1} \subseteq \overline{\mathcal{Q}} = \{\widehat{F}_i \cap \widehat{\varphi^*(\widehat{R}_j)} \mid 1 \leq i \leq q_k, 1 \leq j \leq q_{N-1}, \varphi \in S_{n+1}\},$$

а утверждение 3) для каждой пары $\widehat{F}_i \widehat{R}_j$ дает возможность ограничиться лишь таким множеством перестановок $\varphi \in S_{n+1}$, которое определяет попарно различные грани $\varphi^*(\widehat{R}_j)$ ($1 \leq j \leq q_{N-1}$) и различные $(\varphi^{-1})^*(\widehat{F}_i)$ ($1 < i \leq q_k$).

Приведем алгоритм нахождения аффинных типов L -многогранников, содержащих основной симплекс решетки, при фиксированном $n \leq 5$.

I. Составить полный список $F_1^{N-1}, \dots, F_{q_{N-1}}^{N-1}$ представителей невырожденных π -типов гиперграней конуса C_{n+1} . Для этого каждому типу (относительно перестановки элементов вектор-строки) минимальных заслоняющих точек $(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $\sum_{0 \leq i \leq n} x^i = 1$, решетки L поставить в соответствие гипергрань F конуса C_{n+1} , определенную соотношением (23). Осуществить проверку невырожденности грани F и найти каноническую матрицу π -класса граней, эквивалентных грани F (см. п. 6, 8).

II. Для каждой гипергранни F_j^{N-1} ($1 \leq j \leq q_{N-1}$) составить список пар

$$(\varphi_{jl}, \varphi_{jl}^*(F_j^{N-1}))$$

($0 \leq l \leq r_j$), где набор перестановок $\{\varphi_{jl}\}$ содержит по одному представителю каждого из правых классов смежности относительно стационарной подгруппы грани F_j^{N-1} ($\{\varphi : \varphi^*(F_j^{N-1}) = F_j^{N-1}\}$), а набор $\varphi_{jl}^*(F_j^{N-1})$ ($0 \leq l \leq r_j$) соответственно представляет собой класс граней конуса C_{n+1} , π -эквивалентных грани F_j^{N-1} . (Будем считать, что перестановка φ_{j0}^* тождественная и $\varphi_{j0}^*(F_j^{N-1}) = F_j^{N-1}$.)

III. Найти представителей всех типов невырожденных граней размерностей от $N-1 = \binom{n+1}{2} - 1$ до 1, совершая последовательно $\binom{n+1}{2} - 2$ раз следующую операцию.

Имея список $F_1^m, F_2^m, \dots, F_{q_m}^m$ представителей π -типов невырожденных граней размерности m ($2 \leq m \leq \binom{n+1}{2} - 1$), найти аналогичный список для размерности $m-1$. Для этого для каждой пары граней (F_i^m, F_j^{N-1}) ($1 \leq i \leq q_m, 1 \leq j \leq q_{N-1}$):

- 1) из конечной последовательности перестановок $\varphi_{j0}, \varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jr_m}$, составленной для грани F_j^{N-1} в п. II, выбрать максимальную подпоследовательность $\varphi_{jl_0}, \varphi_{jl_1}, \dots, \varphi_{jl_k}$ ($k \leq m$) таких, что $(\varphi_{jl_s}^{-1})^*(F_i^m) \neq (\varphi_{jl_t}^{-1})^*(F_i^m)$ при $0 \leq s < t \leq k$;
- 2) составить пересечения $Q_{ij}^p = F_i^m \cap \varphi_{jl_p}^*(F_j^{N-1})$ ($0 \leq p \leq k$); затем каждую из граней Q_{ij}^p :
а) проверить на невырожденность (см. п. 3);

- б) проверить условие $\dim(Q_{ij}^p) = m - 1$;
- в) при выполнении условий первых двух пунктов найти каноническую матрицу π -класса граней, эквивалентных грани Q_{ij}^p (см. п. 5);
- г) добавить грань $\widehat{Q_{ij}^p}$, соответствующую канонической матрице, в список $\overline{\mathcal{G}}^{m-1}$ типов невырожденных граней размерности $m - 1$.

IV. Используя список представителей всех невырожденных π -типов граней конуса $C_{n+1} = HYP_{n+1}$ ($n \leq 5$), найти список аффинных типов n -мерных L -многогранников, выполняя для каждой грани из списка действия:

- 1) получить матрицы M барицентрических координат вершин L -многогранника (см. п. 4);
- 2) привести матрицы M к каноническому виду относительно аффинного типа L -многогранников (см. п. 9).

Конец алгоритма.

Чтобы привести здесь результаты проведения алгоритма, напомним свойство L -многогранников, называемое слоистостью [14]. Пусть P — n -мерный L -многогранник решетки L^n , F — одна из его гиперграней, $\text{aff } F$ — гиперплоскость, на которой расположена грань F , $L_0^{n-1} = L^n \cap \text{aff } F$ — $(n - 1)$ -мерная подрешетка решетки L^n (слой). Решетку L^n рассматриваем как объединение слоев $L_k^{n-1} = L_0^{n-1} + k\bar{v}$, где k (номер слоя) пробегает множество $\mathbb{Z}$ целых чисел, а $\bar{v}$ — один из векторов решетки, соединяющий два соседних слоя. Предполагая, что многогранник P расположен по ту сторону гиперплоскости $\text{aff } F$, где $k > 0$, *слоистостью многогранника P относительно грани F* называется максимальный номер слоя, в котором еще имеются вершины многогранника. Максимальное значение слоистостей относительно гиперграней многогранника называется *слоистостью многогранника*.

Используемое в таблице понятие *ранга n -мерного решетчатого L -многогранника P* означает размерность $\dim F(d)$ наименьшей грани $F(d)$ конуса HYP_{m+1} , содержащей гиперметрику $d \in HYP_{m+1}$, где d — произвольная гиперметрика на множестве $X = \{0, \dots, m\}$ ($m \geq n + 1$), порождающая данный L -многогранник P (с точностью до движения). Поскольку невырожденные аффинные преобразования, сохраняющие аффинный тип L -многогранника P , сохраняют грань $F(d)$, имеет смысл понятие *ранга аффинного типа L -многогранника* (подробнее см. [7]).

Результаты проведения алгоритма для $n \leq 4$ согласуются с хорошо известными данными, а для $n = 5$ приведены в таблице 1, где столбцы, занумерованные числами от 1 до 4, содержат следующую информацию: 1 — номер аффинного типа (звездочками над номерами помечены центрально-симметричные L -многогранники); 2 — количество вершин; 3 — количество гиперграней; 4 — ранг L -многогранника; 5 — слоистость L -многогранника.

При указании гиперграней L -многогранников в таблице 1 были использованы обозначения: S^n , P^n , C^n — соответственно n -мерный симплекс, параллелепипед, кроссполиэдр (ортаэдр), а также $C^1 \times Q$, $p(Q)$, $bp(Q)$ — соответственно призма, пирамида и бипирамида над $(n - 1)$ -мерным многогранником Q . Для оставшихся типов 4-мерных L -многогранников обозначения S_4 , S_5 , S_6 , S_8 , T_6 , S_{11} заимствованы из работы [3]. Им соответствуют обозначения: F_2^7 , F_2^6 , F_3^6 , F_4^5 , F_5^5 , F_4^4 в работе [2] и обозначения T_7 , T_8 , $bp[R(S^2)]$, T_9 , T_9^* , T_{10} в работе [4]. Описание этих многогранников читатель может найти в любой из названных работ [2]–[4]. Вычисления велись на ПК IBM Pentium 200 и потребовали около 12 часов машинного времени.

11. Доказательство теоремы 1. Известно, что для $n \leq 4$ все n -мерные L -многогранники решеток однослойные, а для $n = 5$ не более чем двуслойные (см. [4]). Следовательно, любой L -многогранник размерности $n \leq 4$, а также любой 5-мерный L -многогранник, содержащий хотя бы одну однослойную гипергрань, содержит среди своих вершин основной симплекс решетки. Таким образом, при $n \leq 4$ метод дает полный список аффинных типов L -многогранников, а при $n = 5$ приведенная таблица содержит по крайней мере все аффинные типы однослойных 5-мерных L -многогранников.

Рассмотрение результатов в таблице 1 показывает также, что там содержатся и все двуслойные 5-мерные L -многогранники (перечисленные ранее в [5]), за исключением L -симплекса двойного объема. Таким образом, получен полный список всех аффинных типов 5-мерных L -многогранников.

Автор пользуется случаем поблагодарить проф. В. П. Гришукхину и своего научного руководителя проф. Е. П. Барановского за внимание и помощь при подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Делоне Б. Н. Геометрия положительных квадратичных форм // УМН. 1937. № 3. Р. 16–62; 1938. № 4. Р. 102–164.
- [2] Erdahl R. M., Ryshkov S. S. The empty sphere // Can. J. Math. 1987. V. 39. № 4. Р. 794–824.
- [3] Барановский Е. П., Власов Е. В., Новикова Н. В. Строение L -разбиений четырехмерных решеток // Деп. ВИНТИ. 1991. № 78-B91. С. 1–38.
- [4] Барановский Е. П., Кононенко П. Г. Об одном способе вывода L -многогранников n -мерных решеток // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 6. С. 830–841.
- [5] Барановский Е. П., Кононенко П. Г. Двухслойные L -многогранники 5-мерных решеток // Деп. ВИНТИ. 1998. № 387-B98. С. 1–28.
- [6] Assouad P. Sur les inegalités valides dans L^1 // European J. Combin. 1984. V. 5. Р. 99–112.
- [7] Deza M., Grishukhin V. P., Laurent M. Extreme hypermetric and L -polytopes // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Budapest. 1991. V. 60. Р. 157–209.
- [8] Деца М. (Тылкин М. Е.) О геометрии Хэмминга единичных кубов // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 5. С. 1037–1040.
- [9] Deza M., Grishukhin V. P., Laurent M. The hypermetric cone is polyhedral // Combinatorica. 1993. V. 13(4). Р. 397–411.
- [10] Deza M., Grishukhin V. P., Laurent M. Hypermetrics in Geometry of Numbers // DIMACS Ser. in Disc. Math. and Theor. Comp. Sci. 1995. V. 20. Р. 1–109.
- [11] Avis D., Mutt. All facets of the six-point Hamming cone // European J. Combin. 1989. V. 10. № 4. Р. 309–312.
- [12] Барановский Е. П. Симплексы L -разбиений евклидовых пространств // Матем. заметки. 1971. Т. 10. № 6. С. 659–670.
- [13] Барановский Е. П. Об L -симплексах шестимерных решеток // Вторая международная конференция “Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел” (25–30 сентября 1995 г., Воронеж). С. 13.
- [14] Рышков С. С., Эрдал Р. М. Поэтажное построение L -тел решеток // УМН. 1989. Т. 44. № 2. С. 241–242.