Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Мамагани, Переписывающие системы и полный ряд
роста для треугольных групп Коксетера, *Матем. заметки*,
2002, том 71, выпуск 3, 431–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm357>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:44:44

УДК 512.54

ПЕРЕПИСЫВАЮЩИЕ СИСТЕМЫ И ПОЛНЫЙ РЯД РОСТА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУПП КОКСЕТЕРА

М. Мамагани

В работе строится полная конечная переписывающая система для групп Коксетера вида

$$W = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ca)^r = 1 \rangle$$

относительно системы образующих $S = \{a, b, c\}$, где $p, q, r \in \mathbb{Z}, p, q, r \geq 2$ и $1/p + 1/q + 1/r < 1$. Такие переписывающие системы могут быть использованы для подсчета полного ряда роста группы.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Основной целью данной работы является построение полных конечных переписывающих систем для групп Коксетера специального вида, называемых группами треугольников. Интересные (в частности, геометрические) свойства треугольных групп привлекали внимание многих математиков, среди которых Г. Коксетер, В. Мозер [1] и Е. Винберг [2]. Дополнительную информацию и библиографию по теме сферических, плоских и гиперболических замощений интересующийся читатель найдет в [3]. Переписывающие системы нашли интересные применения в теории роста конечно порожденных групп.

Пусть G – конечноопределенная группа с полугрупповым порождающим множеством

$$S = \{s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}, \dots, s_m^{\pm 1}\}.$$

Длиной $|g|$ элемента $g \in G$ относительно S называется величина

$$|g| = \inf \{k \mid g = s_1 s_2 \cdots s_k, s_i \in S, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Функция $f: \mathbb{N} \cup 0 \rightarrow \mathbb{N}$, определенная равенствами

$$f(0) = a_0 = 1, \quad f(n) = a_n = \#\{g \in G \mid |g| = n, n \geq 1\},$$

и ряд

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

называются соответственно *функцией роста* и *рядом роста* группы G относительно S .

Работа выполнена при поддержке Национального Совета Ирана по науке (NRCI).

Заметим, что $a_n \in \mathbb{Z}$ и что производящая функция последовательности a_n , $F(z)$, есть элемент кольца $\mathbb{Z}[[z]]$ формальных степенных рядов с целыми коэффициентами.

Эти понятия можно обобщить естественным образом, рассмотрев $\mathbb{Z}[G]$ и $\mathbb{Z}[G][[z]]$ вместо $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[[z]]$. Элементы группового кольца $\mathbb{Z}[G]$ суть конечные суммы вида $n_1 g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_k g_k$, где $n_i \in \mathbb{Z}$ и $g_i \in G$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Следуя [4], определим полный ряд роста группы G относительно S как элемент группового кольца формальных степенных рядов над $\mathbb{Z}[G]$, заданный следующим образом:

$$F_c(z) = \sum_{g \in G} g z^{|g|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|g|=n} g \right) z^n.$$

Этот ряд сводится к ряду роста, если заменить сумму $\sum_{|g|=n} g$ числом элементов G длины n . Существует несколько методов вычисления рядов роста и функций роста групп в соответствии с разными методами решения проблемы равенства слов в группе. Метод запрещенных слов, используемый нами в настоящей работе, рассматривает элементы подходящего конечного подмножества S^* как запрещенные слова и решает проблему равенства слов путем вычисления нормальной формы для каждого элемента группы (см. [5] и [6]). Определенным образом выбранные комбинации запрещенных слов называются *жесткими цепями* (см. [5] и [6]). Схожие конструкции использовались в работе [7] при исследовании топологических свойств группы. Особая геометрическая структура множества жестких цепей позволила вычислить ряд роста [8], а потом и полный ряд роста [4] фундаментальных групп ориентируемых поверхностей рода $g \geq 2$.

О структуре статьи: в п. 2 мы доказываем, что любая треугольная группа Кокстера обладает полной конечной переписывающей системой; в п. 3 мы изучаем структуру цепей, связанных с построенной переписывающей системой; в п. 4 мы применяем наши результаты для получения формулы полного ряда роста группы.

2. Переписывающие системы. В этом пункте мы докажем, что любая треугольная группа Кокстера обладает канонической переписывающей системой. Терминологию и основные результаты из теории переписывающих систем читатель сможет найти в обзорной статье [9].

ТЕОРЕМА 1. *Любая треугольная группа Кокстера*

$$W = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^p = (bc)^q = (ac)^r = 1 \rangle$$

обладает конечной полной переписывающей системой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие четыре случая.

Случай 1: p, q, r нечетные. Легко проверить, что совокупность следующих правил – полная переписывающая система для W :

$$\begin{aligned} a^2 &\rightarrow 1, \\ b^2 &\rightarrow 1, \\ c^2 &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overbrace{aba \cdots a}^p &\rightarrow \overbrace{bab \cdots b}^p, \\ \overbrace{bcb \cdots b}^q &\rightarrow \overbrace{cbc \cdots c}^q, \\ \overbrace{cac \cdots c}^r &\rightarrow \overbrace{aca \cdots a}^r.\end{aligned}$$

Данная система является полной, поскольку левые и правые части последних трех правил не перекрываются.

Случай 2: p и r четные, а q нечетное. В этом случае конечная полная переписывающая система для W задана следующими правилами:

$$\begin{aligned}a^2 &\rightarrow 1, \\ b^2 &\rightarrow 1, \\ c^2 &\rightarrow 1, \\ \overbrace{aba \cdots b}^p &\rightarrow \overbrace{bab \cdots a}^p, \\ \overbrace{bcb \cdots b}^q &\rightarrow \overbrace{cbc \cdots c}^q, \\ \overbrace{aca \cdots c}^r &\rightarrow \overbrace{cac \cdots a}^r, \\ \overbrace{aba \cdots a}^{p-1} \overbrace{cb \cdots c}^q &\rightarrow \overbrace{ba \cdots a}^p \overbrace{cbc \cdots b}^{q-1}.\end{aligned}$$

Случай 3: p , q и r четные. В этом случае имеем следующий набор правил:

$$\begin{aligned}a^2 &\rightarrow 1, \\ b^2 &\rightarrow 1, \\ c^2 &\rightarrow 1, \\ \overbrace{aba \cdots b}^p &\rightarrow \overbrace{bab \cdots a}^p, \\ \overbrace{bc \cdots c}^q &\rightarrow \overbrace{cb \cdots b}^q, \\ \overbrace{ac \cdots c}^r &\rightarrow \overbrace{ca \cdots c}^r, \\ \overbrace{ab \cdots a}^{p-1} \overbrace{cb \cdots b}^q &\rightarrow \overbrace{ba \cdots a}^p \overbrace{cb \cdots c}^{q-1}.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что это множество правил удовлетворяет условиям теоремы.

Случай 4: p и q нечетные, а r четное. Имеем

$$\begin{aligned}a^2 &\rightarrow 1, \\ b^2 &\rightarrow 1, \\ c^2 &\rightarrow 1,\end{aligned}$$

$$\overbrace{ab \cdots ba}^p \rightarrow \overbrace{ba \cdots ab}^p,$$

$$\overbrace{bc \cdots b}^q \rightarrow \overbrace{cb \cdots c}^q,$$

$$\overbrace{ac \cdots c}^r \rightarrow \overbrace{ca \cdots a}^r,$$

$$\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots ca}^r \rightarrow \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{ca \cdots c}^{r-1}, \quad (1)$$

$$\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ab}^p \rightarrow \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ba}^{p-1}, \quad (2)$$

$$\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ba}^{p-1} \overbrace{cb \cdots bc}^q \rightarrow \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ba}^{p-1} \overbrace{cb \cdots cb}^{q-1}. \quad (3)$$

Можно проверить, что данное множество – конечная полная переписывающая система для W .

Заметим, что полные конечные переписывающие системы, отличные от наших, были построены в работе [10] для треугольных групп и некоторых других групп Коксетера.

3. Структура жестких цепей в треугольных группах Коксетера. Напомним, что левые части переписывающих правил принято называть *запрещенными словами*. Последовательности запрещенных слов могут образовывать жесткие цепи (см. [5], где содержатся необходимые определения).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанной цепью* относительно переписывающей системы для S называют жесткую цепь, содержащую все буквы S . Жесткая цепь, не являющаяся смешанной, называется *простой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть система Коксетера (G, S) обладает конечной полной переписывающей системой. Тогда

$$\sum_{i \leq m} (-1)^{i+1} Q_m^{(i)} = 0,$$

где $Q_m^{(i)}$ есть число смешанных цепей длины m и ранга i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем доказательство для треугольных групп Коксетера. Доказательство в остальных случаях аналогично.

Ряд роста $F(z)$ для W удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{F(z)} = 1 + \frac{1}{f_{b,c}(z)} + \frac{1}{f_{c,a}(z)} + \frac{1}{f_{a,b}(z)} - \frac{3}{1+z},$$

где $f_{x,y}(z)$ – ряд роста параболической подгруппы, порожденной элементами x, y .

В то же время, каждая переписывающая система из теоремы 1 удовлетворяет условиям теоремы 1 из [5] и поэтому

$$F(z) = \frac{1}{1 - 3z + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m},$$

где $Q_m^{(i)}$ – число строгих цепей ранга i длины m . Сравнивая два выражения для $1/F(z)$ в полученных формулах, мы обнаруживаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m = 0,$$

где двойная сумма берется по всем смешанным цепям. Теперь поменяем порядок суммирования; тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m = \sum_m \sum_{i \leq m} (-1)^{i+1} Q_m^{(i)} z^m = 0.$$

Таким образом, для заданного m имеем

$$\sum_{i \leq m} (-1)^{i+1} Q_m^{(i)} = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, число смешанных жестких цепей одинаковой длины четно и половина из них имеет нечетный ранг.

4. Полный ряд роста. В этом пункте мы выведем формулу для полного ряда роста треугольных групп Коксетера, используя полную конечную переписывающую систему, описанную в п. 2.

Напомним, что знаменитый результат (см. [11], [12]) гласит, что если $f_Y(z)$ – ряд роста параболической подгруппы G_Y группы G , порождаемой Y , и $|G| = \infty$, то имеем

$$\sum_{Y \subset S} \frac{(-1)^{|Y|}}{f_Y(z)} = 0.$$

Оказывается, что аналогичная формула верна и для полного ряда роста.

Пусть система Коксетера (G, S) обладает полной конечной переписывающей системой относительно S , и пусть $F^c(z)$ и F_X^c – полные ряды роста группы G и параболической подгруппы G , порожденной собственным подмножеством $X \subset S$ относительно $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ и X соответственно. Тогда

$$\sum_{X \subseteq S} (-1)^{|X|} \frac{1}{F_X^c(z)} = 0.$$

Эта формула была впервые получена в работе [13].

В случае, когда G – треугольная группа, формула принимает следующий вид:

$$\frac{1}{F^c(z)} = 1 + \frac{1}{f_{b,c}^c(z)} + \frac{1}{f_{c,a}^c(z)} + \frac{1}{f_{a,b}^c(z)} - \frac{3 - (a + b + c)z}{1 - z^2},$$

где $f_{x,y}^c$ – полный ряд роста параболической подгруппы W , порожденной x, y . Ниже мы продемонстрируем, как эта формула может быть получена с помощью наших результатов о переписывающих системах и жестких цепях.

Переписывающие системы из п. 2 удовлетворяют условию основной теоремы из [5]. Значит,

$$F^c(z) = \frac{1}{1 - (a + b + c)z + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m},$$

где $Q_m^{(i)}$ – сумма жестких цепей длины m и ранга i с правилами в одной из переписывающих систем, полученных при доказательстве теоремы 1. Заметим, что любая параболическая подгруппа группы W обладает канонической переписывающей системой, являющейся подмножеством канонической переписывающей системы для W . Поэтому если

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m$$

– двойная сумма, полученная из соотношений параболической группы, порожденной X , то $1/F^c(z)$ может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{F^c(z)} &= -2 + 3 - (a + b)z - (b + c)z - (c + a)z + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m - \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m + (a + b + c)z, \end{aligned}$$

где последняя двойная сумма берется по всем смешанным цепям. Упрощая это выражение, получаем

$$\frac{1}{F^c(z)} = 1 + \frac{1}{f_{b,c}^c(z)} + \frac{1}{f_{c,a}^c(z)} + \frac{1}{f_{a,b}^c(z)} - \frac{3 - (a + b + c)z}{1 - z^2} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \sum_m Q_m^{(i)} z^m.$$

В заключение доказательства в следующей лемме мы докажем, что последняя двойная сумма равна нулю.

ЛЕММА 1. Пусть $\pi: S^* \rightarrow \mathbb{Z}[W]$ – естественный гомоморфизм моноида всех слов в алфавите $S = \{a, b, c\}$ в групповое кольцо $\mathbb{Z}[W]$. Тогда для некоторого целого числа λ и произвольного $n \neq \lambda$ имеем

$$\sum_{\substack{i \leq n \\ |w|=n}} (-1)^{i+1} \pi(w) = 0,$$

где w пробегает множество всех смешанных цепей длины n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что

- а) любая смешанная цепь начинается с буквы a ;
- б) в силу определения жесткой цепи смешанные цепи имеют ограниченный набор типов;
- с) множество смешанных цепей одинаковой длины конечно и разбивается на два множества равной мощности – множества цепей четного и нечетного ранга.

Таким образом, для доказательства леммы необходимо показать, что для каждой смешанной цепи w существует ровно одна смешанная цепь w' с $|w| = |w'|$, $r(w) + r(w') \equiv 1 \pmod{2}$ и $\pi(w) = \pi(w')$.

Как и в теореме 1, рассмотрим следующие четыре случая.

Случай 1: p, q, r нечетные. В этом случае смешанных цепей нет и лемма доказана.

Случай 2: p и r четные, а q нечетно. Из рассмотрения случая 2 теоремы 1 с очевидностью следует, что самая короткая смешанная цепь имеет длину $p + q - 1$. Положим $\lambda = p + q - 1$. Пусть $n \geq \lambda$ и w – смешанная цепь длины n .

При $n = \lambda$ существует единственная смешанная цепь ранга 1, а именно:

$$w = \overbrace{aba \cdots a}^{p-1} \overbrace{cbc \cdots c}^q.$$

Отметим, что смешанная цепь

$$w' = \overbrace{aba \cdots b}^p \overbrace{cbc \cdots b}^{q-1}$$

длины n имеет ранг 2 и $\pi(w) = \pi(w')$. Итак, мы проверили утверждение для $n = \lambda$. Пусть наше утверждение истинно для любой смешанной цепи длины $< n$ и рассмотрим смешанную цепь w длины n .

Рассмотрим два случая.

1) w содержит подслово sss такое, что $s \in S$. Пусть $w' = usv$. Тогда w' – строгая цепь длины $|w| - 2$ и ранга $r(w) - 2$. Более того, мы имеем $\pi(w) = \pi(w')$. В силу индуктивного предположения существует смешанная цепь w'' со свойствами $|w''| = |w'|$, $r(w'') + r(w') \equiv 1 \pmod{2}$, $\pi(w'') = \pi(w')$. Добавляя два подходящих суффикса или префикса вида s или ss к w'' , получаем слово w''' такое, что $|w'''| = |w|$, $r(w''') = r(w'') + 2$, $\pi(w''') = \pi(w)$. Отсюда следует равенство

$$(-1)^{(r(w)+1)}\pi(w) + (-1)^{(r(w''')+1)}\pi(w''') = 0,$$

доказывающее предположение и в этом случае.

2) w не имеет подслов вида sss , где $s \in S$. Тогда w будет образовано продолжением исходной цепи

$$w = \overbrace{aba \cdots a}^{p-1} \overbrace{cbc \cdots c}^q$$

буквами b и c справа и буквами a и b слева. Рассмотрим допустимые комбинации.

а) Исходная цепь заканчивается буквой c , а значит, по предположению может быть продолжена только одной дополнительной c . Кроме того, к данной цепи может быть приписан префикс $\overbrace{ab \cdots ab}^{p-2}$. Теперь мы поменяем суффикс $\overbrace{cb \cdots c}^q$ цепи w на $b \overbrace{bc \cdots b}^q$,

оставляя неизменными другие ее части. Обозначим полученное слово через w' и заметим, что $|w'| = |w|$, $r(w') = r(w) + 1$, $\pi(w') = \pi(w)$, что и требовалось.

б) Правая часть исходной цепи сначала продолжается буквой b , а затем $\overbrace{cb \cdots b}^{q-1}$. Для построения w' в этом случае мы заменяем самое правое вхождение $\overbrace{cb \cdots c}^q$ в w на $\overbrace{bc \cdots b}^q$. Новая цепь w' удовлетворяет всем требованиям.

Случай 3: p, q и r четные. Рассуждение в этом случае в целом аналогично случаю 2.

Случай 4: p, q нечетные, а r четное. В этом случае положим $\lambda = p - 1 + r$. Для $n = \lambda$ существует единственная смешанная цепь ранга 1 длины n , а именно: цепь

$$w = \overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots a}^r;$$

как и для случая 2, цепи $w' = \overbrace{ab \cdots a}^p \overbrace{ca \cdots c}^{r-1}$ и w удовлетворяют условиям леммы. Аналогично, цепи ранга 1 соотношений (2) и (3) случая 4 доказательства теоремы 1 отвечают цепям ранга 2

$$\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots a}^r \overbrace{b \cdots ba}^{p-1}$$

и ранга 3

$$\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ba}^{p-1} \overbrace{bc \cdots cb}^q.$$

Следующее вычисление показывает, как поставить в соответствие друг другу пару смешанных цепей ранга 2 и 3, оставляя неизменными их длины и образы под действием π :

$$\begin{aligned} \overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ab}^p b &\longleftrightarrow \overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ab \cdots ba}^p b \\ &\longleftrightarrow \overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots ca}^r \overbrace{ba \cdots ba}^{p-1} b \longleftrightarrow \overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots ca}^r \overbrace{a b \cdots ba}^{p-1} b. \end{aligned}$$

Пусть теперь n – произвольное целое число, и пусть утверждение верно для любой смешанной цепи длины, меньшей или равной n . Пусть w – смешанная цепь длины n . Прежде, чем мы воспользуемся предположением индукции, изучим структуру w .

х) Если w получено как многократное применение левой части правила (1) случая 4 из доказательства теоремы 1 к простым цепям, то в силу доказательства случая 2 все доказано.

у) Предположим, что правая часть w образована продолжением правой части правила (2) простыми цепями. Тогда по определению жесткой цепи правая часть w примет одну из следующих форм:

$$\begin{aligned} &\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{a ba \cdots ba}^{p-1} \overbrace{b ba \cdots ba}^{p-1}, \\ &\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{a ba \cdots ba}^{p-1} baa, \\ &\overbrace{ab \cdots b}^{p-1} \overbrace{ca \cdots c}^{r-1} \overbrace{ba \cdots ab}^p \overbrace{a ba \cdots ba}^{p-1} b \overbrace{ab \cdots ba}^{p-1} aa. \end{aligned}$$

В любом из этих случаев замена суффикса $\overbrace{ba \cdots ab}^p$ на $\overbrace{ab \cdots ba}^p$ даст цепь с желаемыми свойствами.

з) Предположим, что w образовано путем повторения в левой части любого из записанных слов правил (1)–(3). Тогда изменение суффикса, скажем, $\overbrace{ca \cdots ca}^r$, $\overbrace{ba \cdots ab}^p$ и $\overbrace{cb \cdots bc}^q$ на $\overbrace{ac \cdots ac}^r$, $\overbrace{ab \cdots ba}^p$ и $\overbrace{bc \cdots cb}^q$, дает смешанную цепь w' с нужными свойствами. Оставшиеся случаи разбираются аналогично. Доказательство окончено.

Наша процедура получения w' с требуемыми свойствами из w как отображение $w \rightarrow w'$ из множества смешанных цепей в себя инъективно и, поскольку множество цепей длины n для любого заданного $n \geq \lambda$ конечно, это отображение также является сюръекцией.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J. Generators and Relations for Discrete Groups. Reprint of 4th ed. New York: Springer Verlag, 1984.
- [2] Vinberg E. B. Groups defined by periodic paired relations // Sb. Math. 1997. V. 188. № 9. P. 1269–1278.
- [3] Tits J. Le problème des mots dans les groupes de Coxeter // Symp. Math. 1968. V. 1. P. 175–185.
- [4] Grigorchuk R. I., Nagnibeda T. Complete growth functions of hyperbolic groups // Inv. Math. 1997. V. 130. P. 159–188.
- [5] Григорчук Р. И. Функции роста, переписывающие системы и эйлерова характеристика // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 653–668.
- [6] Mamaghani M. J. Rewriting Systems and Growth of Groups. Ph. D. dissertation. Sharif University of Technology. Department of Mathematical Sciences. Shahrivar 1374. In Farsi..
- [7] Brown K. S. The geometry of rewriting systems: A proof of the Anick–Groves–Squier theorem // Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory (Lect. Workshop, Berkeley, C.A., 1989). Math. Sci. Res. Inst. V. 23. New York: Springer Verlag, 1992. P. 137–163.
- [8] Мамагани М. Дж. О функциях роста групп поверхностей // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 681–693.
- [9] Cohen D. E. String rewriting – a survey for group theorists // LMS Lecture Notes Ser. V. 181. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 37–47.
- [10] Hermiller S. M. Rewriting systems for Coxeter groups // J. Pure Appl. Algebra. 1994. V. 92. P. 137–148.
- [11] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie. Ch. 4–6. Paris: Hermann, 1968.
- [12] Paris L. Growth series of Coxeter groups // Group Theory from Geometrical Viewpoint / ed. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky. Singapore: World Scientific, 1991.
- [13] Changey N. Rationalité des séries de croissance complète des groupes de Coxeter. Preprint: Université de Dijon, 1997.