Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Фёдоров, Раздутия трехмерных терминальных особенностей: *сА* случай, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 440–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:13:58

УДК 512.776

РАЗДУТИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕРМИНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ: cA СЛУЧАЙ

И. Ю. Фёдоров

Классифицированы дивизоры с минимальной дискрепантностью над cA точками.
Библиография: 16 названий.

Проблема классификации алгебраических многообразий тесно связана с задачей описания особенностей многообразий. Одним из основных классов трехмерных особенностей является класс терминальных особенностей, возникающих в процессе использования программы Мори (см., например, [1]). Хотя эти особенности и были классифицированы в [2]–[5] с точностью до аналитического изоморфизма, этого описания не всегда достаточно для решения задач, возникающих при изучении трехмерных многообразий. В частности, весьма актуальными являются задача описания разрешений терминальных особенностей и смежная с ней задача описания морфизмов многообразий с терминальными особенностями. Стягивания в циклические фактор-особенности классифицированы Каваматай в [6], описания стягиваний с многообразия, имеющего не хуже чем терминальные горенштейновы особенности, приведены в [7] и [8]. Лу в [9] описал стягивания в случае, когда индекс многообразия не понижается, а недавно Кавакита в [10] и [11] описал стягивания в гладкую точку и в особенность типа cA_1 . Представляет интерес и задача описать (или хотя бы построить) морфизмы, реализующие дивизоры с заданной дискрепантностью. Кавамата в работе [12] построил дивизоры с минимальной дискрепантностью над терминальными циклическими фактор-особенностями, Маркушевич в [13] сделал то же самое для терминальных cDv точек, а Хаякава в [14] описал все раздутия в категории Мори, реализующие дивизоры с минимальной дискрепантностью над терминальными точками индекса ≥ 2 . В данной работе мы классифицируем раздутия трехмерных терминальных особенностей типа cA в категории Мори, исключительный дивизор которых неприводим и имеет дискрепантность 1.

Автор очень признателен В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорову за плодотворные беседы и внимание к работе.

1. Предварительные сведения. Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения и понятия содержатся в [1], [15], [14].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01132, программы “Ведущие научные школы”, грант № 96-15-96146, и фонда INTAS-OPEN гранты № 93-2805 и № 97-2072.

1.1. Особенность имеет тип cA , если существует вложение $j: X \simeq \{xy + f(z, u) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{C}_{x,y,z,u}^4$, где либо $f(z, u) = z^2 + u^n$, либо минимальная степень k мономов, входящих в $f(z, u)$, больше 2. В первом случае особенность имеет тип cA_1 , а во втором случае – тип cA_n для $n \geq 2$ (см. [16]). Это вложение мы будем называть *стандартным*.

1.2. В данной работе мы будем изучать морфизмы $\pi: \overline{X} \rightarrow X$, где $\overline{X}$ имеет терминальные особенности (т.е. особенности, на разрешении которых исключительные дивизоры имеют дискрепантности больше 0), X – росток cA точки, а исключительное множество π – неприводимый дивизор с дискрепантностью 1. Такие морфизмы мы будем называть *дивизориальными раздутиями с дискрепантностью 1*.

1.3. Голomorphicная функция $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ называется *квазиоднородной функцией* степени d с показателями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, если при любом $\lambda > 0$ имеем

$$f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n).$$

В терминах ряда Тейлора $f = \sum f_k x^k$ условие квазиоднородности степени d означает, что все показатели ненулевых членов ряда лежат на гиперплоскости

$$\Gamma = \{k: \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n = d\}.$$

Мы скажем, что моном $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ имеет (*обобщенную*) *степень (или вес)* d , если $\langle \alpha, k \rangle = \alpha_1 k_1 + \dots + \alpha_n k_n = d$.

Зафиксируем тип квазиоднородности, т.е. набор показателей α . Многочлен *имеет порядок* d , если все его мономы имеют степень d или выше.

Многочлены порядка d образуют линейное пространство $\mathbb{A}_d$; $\mathbb{A}_{d'} \subset \mathbb{A}_d$ при $d < d'$. Под порядком многочлена f мы будем понимать наибольшее из чисел d , для которых $f \in \mathbb{A}_d$.

Биголomorphicное отображение g имеет порядок d , если для любого λ

$$(g^* - 1)\mathbb{A}_\lambda \subset \mathbb{A}_{\lambda+d}.$$

1.4. Рассмотрим циклическую фактор-особенность

$$Y := \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}_m(a_1, \dots, a_n),$$

где $a_i \in \mathbb{N}$ и $(a_1, \dots, a_n) = 1$ (случай $m = 1$, т.е. $Y \simeq \mathbb{C}^n$, также возможен). Пусть $x_1, \dots, x_n$ – координаты в $\mathbb{C}^n$, собственные для $\mathbb{Z}_m$. *Взвешенным раздутием* Y с *весом* $\sigma = a_1, \dots, a_n$ называется проективный бирациональный морфизм $f: \overline{Y} \rightarrow Y$ такой, что $\overline{Y}$ покрывается аффинными картами $U_1, \dots, U_n$, где

$$U_i = \mathbb{C}_{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n}^n / \mathbb{Z}_{a_i}(-a_1, \dots, m, \dots, -a_n).$$

$\uparrow$
 i

Координаты в Y и в U_i связаны соотношениями

$$y_i = \bar{y}_i^{a_i/m}, \quad y_j = \bar{y}_j \bar{y}_i^{a_j/m}, \quad j \neq i.$$

Исключительное множество E морфизма f является неприводимым дивизором, $E \simeq \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$.

Рассмотрим гиперповерхностную особенность

$$X := \{\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{C}_{y_1, \dots, y_n}^n.$$

Пусть $\bar{X} = \bar{\pi}^{-1}X$ – собственный прообраз X при отображении $\bar{\pi}$, $\pi = \bar{\pi}|_{\bar{X}}$ – ограничение $\bar{\pi}$. Тогда $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ тоже называется *взвешенным раздутием с весом σ* или *σ -раздутием*.

Через $\sigma wt(x)$ (соответственно $\sigma wt(y)$, $\sigma wt(z)$, $\sigma wt(u)$) мы будем обозначать вес x (соответственно y , z , u) при взвешенном раздутии σ (см. [14]). Вес монома $f(x, y, z, u) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} u^{\alpha_4}$ при взвешенном раздутии σ будет

$$\sigma wt(f) = \alpha_1(\sigma wt x) + \alpha_2(\sigma wt y) + \alpha_3(\sigma wt z) + \alpha_4(\sigma wt u).$$

Для любого многочлена $f \in \mathbb{C}(x, y, z, u)$ $\sigma wt(f)$ – минимальный из σ -весов мономов, входящих в f .

1.5. Пусть $j: X \simeq \{xy + f(z, u) = 0\} \hookrightarrow \mathbb{C}_{x, y, z, u}^4$ – стандартное вложение, порядок $f(z, u)$ равен k , $j': X \hookrightarrow \mathbb{C}_{x', y', z', u'}^4$ – некоторое вложение X такое, что $\chi \circ j = j'$, где χ – биголоморфное отображение порядка k , $\chi: \mathbb{C}_{(x, y, z, u)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(x', y', z', u')}^4$. Тогда *псевдо взвешенным нормированием ν'* мы будем называть пару $\nu' = (j', \sigma')$, где $\sigma' = (a, b, c, d)$ вес. Эта пара определяет взвешенное раздутие X , которое мы будем называть *ν' -раздутием*. Если исключительный дивизор ν' -раздутия неприводим, то мы будем называть ν' *взвешенным нормированием* (см. [14]).

Определим частичный порядок $\prec$ на множестве псевдо взвешенных нормирований. Пусть $\nu' = (j', \sigma')$ и $\nu'' = (j'', \sigma'')$ – псевдо взвешенные нормирования; тогда $\nu' \succ \nu''$, если для любого биголоморфного отображения порядка k $\chi: (x'', y'', z'', u'') \rightarrow (x', y', z', u')$ такого, что $\chi \circ j'' = j'$ и для всех $f \in \mathbb{C}\{x', y', z', u'\}$ выполняется неравенство $\sigma' wt(f) \leq \sigma'' wt(\chi^* f)$. Если $\nu' \succ \nu''$ и $\nu'' \prec \nu''$, то $\nu' = (j', \sigma') \sim \nu'' = (j'', \sigma'')$ отношение эквивалентности.

1.6. Пусть $\nu' = (j', \sigma')$ – псевдо взвешенное нормирование, где $\sigma' = (a, b, c, d)$, φ' – уравнение, определяющее $j': X = \{\varphi' = 0\} \hookrightarrow Y = \mathbb{C}_{x', y', z', u'}^4$. Тогда мы можем построить σ' -раздутие $\bar{\pi}: \bar{Y} \rightarrow Y = \mathbb{C}_{x', y', z', u'}^4$ и ν' -раздутие $\pi: \bar{X} \rightarrow X$. Пусть $\bar{E}$ – σ' -исключительный дивизор. Имеем

$$\begin{aligned} K_{\bar{Y}} &= \pi^* K_Y + (\sigma' wt(x') + \sigma' wt(y') + \sigma' wt(z') + \sigma' wt(u') - 1)\bar{E}, \\ K_{\bar{X}} &= \pi^* K_X + (\sigma' wt(x') + \sigma' wt(y') + \sigma' wt(z') + \sigma' wt(u') \\ &\quad - \sigma' wt(\varphi') - 1)\bar{E}_{\bar{X}}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} d(\nu') &= \sigma' wt(x') + \sigma' wt(y') + \sigma' wt(z') + \sigma' wt(u') - \sigma' wt(\varphi') - 1 \\ &= a + b + c + d - \sigma' wt(\varphi') - 1 \end{aligned}$$

и будем называть $d(\nu')$ *виртуальной дискрепантностью ν'* (см. [14]). Отметим, что если $\bar{E}_{\bar{X}}$ неприводим и приведен, то $d(\nu') = a(\bar{E}_{\bar{X}}, X)$.

1.7. Для положительного рационального числа α определим множество

$$\mathcal{W}_\alpha = \{\nu' = (j', \sigma') \mid d(\nu') = \alpha\}.$$

Фиксируем вложение $j: X \hookrightarrow \mathbb{C}_{x', y', z', u'}^4$. Тогда через $\mathcal{W}_\alpha(j)$ будем обозначать подмножество $\mathcal{W}_\alpha$ с вложением j .

Отношения $\succ$ и $\sim$ определяют частичный порядок и отношение эквивалентности на $\mathcal{W}_\alpha$ соответственно.

Отметим, что W_α – это естественно возникающая категория. В ней два элемента эквивалентны, если они реализуют изоморфные (над X) многообразия взвешенными раздутиями в категории терминальных многообразий. Если мы находимся, например, в аналитической категории, то это свойство не выполняется. Рассмотрим особенность $xy + z^3 + u^3 = 0$. Это изолированная терминальная особенность типа cA . Легко видеть, что над ней лежат два дивизора с дискрепантностью 1, которые реализуются взвешенными раздутиями с весами $(wt(x), wt(y), wt(z), wt(u)) = (1, 2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 1)$. Как показано в теореме 2.2, эти раздутия не изоморфны друг другу. Однако если мы сделаем аналитический изоморфизм $\mathbb{C}^4$:

$$x \rightarrow x' + iy' + z' + iu', \quad y \rightarrow x' - iy' + z' - iu', \quad z \rightarrow z', \quad u \rightarrow u',$$

то наша особенность будет иметь уравнение

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + u'^2 + 2x'z' + 2u'y' + z'^3 + u'^3 = 0$$

и единственным взвешенным раздутием, реализующим дивизор с дискрепантностью 1, будет раздутие с весами $(wt(x), wt(y), wt(z), wt(u)) = (1, 1, 1, 1)$, которое реализует приводимый дивизор. Легко видеть, что особенности получившегося многообразия хуже, чем терминальные.

В нашем случае W_α определена корректно, так как при биголоморфных отображениях порядка k , где k – степень многочлена f при некотором стандартном вложении $X \simeq (\varphi = xy + f(z, u) = 0) \subset \mathbb{C}^4$, квазиоднородная часть φ не меняется, а именно она и определяет многообразие при взвешенных раздутиях.

2. Основной результат. Основной результат содержится в следующей теореме

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – росток трехмерной терминальной cA точки. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если $\nu \in \mathcal{W}_1$ – максимальный элемент относительно $\succ$, то ν -раздутие X дивизориально с дискрепантностью 1;
- (2) для любого дивизориального раздутия $\pi: \overline{X} \rightarrow X$ с дискрепантностью 1 существует некоторый элемент $\nu \in \mathcal{W}_1$ такой, что π изоморфен ν -раздутию X ;
- (3) существует однозначное соответствие между множеством всех максимальных элементов $\mathcal{W}_1 / \sim$ и множеством всех классов (с точностью до изоморфизма) дивизориальных раздутий X с дискрепантностью 1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть X – росток трехмерной терминальной сА точки, n – количество дивизоров с дискрепантностью 1 над X . Тогда в обозначениях п. 1.2 $n = \deg_{\min}(f) - 1$, где $\deg_{\min}(f)$ – минимальная из степеней мономов, входящих в f .

Для доказательства основного результата мы можем воспользоваться доказательствами соответствующих фактов, содержащихся в параграфах 5 и 6 работы [14], с небольшими изменениями, касающимися, главным образом, категории особенностей и определения эквивалентности в W_1 . Для удобства читателя приводится часть рассуждений из работы [14] с соответствующими изменениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть X – росток трехмерной терминальной особенности индекса 1, $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – дивизориальное раздутие с дискрепантностью 1, E – π -исключительный дивизор. Пусть $\nu: Z \rightarrow \bar{X}$ – частичное разрешение $\bar{X}$, а $\sum F_i$ – ν -исключительный дивизор. Если $\nu^*(E) = \nu^{-1}(E) + \sum a_i F_i$, то

$$a(F_i, X) = a(F_i, \bar{X}) + a_i.$$

В частности, если $Q \in E \subseteq \bar{X}$ точка индекса 1, то над Q нет дивизоров с дискрепантностью 1 над X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $K_{\bar{X}} = \pi^* K_X + E$, $K_Z = \nu^*(K_{\bar{X}}) + \sum b_i F_i$. Поэтому $K_Z = \nu^*(\pi^*(K_X)) + \nu^{-1}(E) + \sum (a_i + b_i) F_i$.

Следующая лемма легко следует из [6] (см. [14]).

ЛЕММА 2.1 [14]. Пусть $\nu = (j, \sigma)$, $\nu' = (j', \sigma') \in \mathcal{W}_1$ такие, что $\nu \prec \nu'$. Если ν -раздутие X дивизориально с дискрепантностью 1, то $\nu \sim \nu'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – ν -раздутие, E – π -исключительный дивизор. Так как $-E$ π -обилеен, то для достаточно большого l существует общий дивизор $L \in |-lE|$ (X – росток особой точки, поэтому $\bar{X}$ можно считать аналитической окрестностью поверхности E). Пусть $D = \pi_* L = (f = 0)$. Имеем $\pi^* D = \pi^{-1} D + (\sigma wt(f))E$.

Пусть $\bar{\pi}': Y' \rightarrow \mathbb{C}_{(x', y', z', u')}^4$ – σ' -раздутие объемлющего пространства, $\bar{E}'$ – π' -исключительный дивизор, $\pi': \bar{X}' \rightarrow X$ – ограничение $\bar{\pi}'$. Так как $d(\nu') = 1$, имеем

$$K_{\bar{X}'} = \pi'^* K_X + (\bar{E}'|_{\bar{X}'}), \quad \pi'^*(D) = \pi'^{-1}(D) + (\sigma' wt(\chi^*(f))) (\bar{E}'|_{\bar{X}'}),$$

где $\chi: \mathbb{C}_{(x, y, z, u)}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(x', y', z', u')}^4$ – биголоморфное отображение порядка k такое, что $\chi \circ j' = j$.

Пусть $g: Z \rightarrow \bar{X}$, $g': Z \rightarrow \bar{X}'$ – общее разрешение, $\sum F_j$ – g -исключительный дивизор. Так как $\bar{X}$ терминально, имеем $K_Z = g^* K_{\bar{X}} + \sum a_j F_j$, где $a_j > 0$ для всех j , и $K_Z = g^* \pi^* K_X + (g^* E + \sum a_j F_j)$. Следовательно, $\bar{E}'|_{\bar{X}'} = g'_*(g^* E + \sum a_j F_j)$. С другой стороны, $\pi'^* D = \pi'^{-1} D + (\sigma wt(f))g'_* g^* E$, так как $L = \pi^{-1} D$ общий. Отсюда получаем

$$(\sigma wt(f) - \sigma' wt(\chi^*(f)))g'_* g^* E = (\sigma' wt(\chi^*(f)))g'_* \left(\sum a_j F_j \right).$$

Так как $\nu' \succ \nu$, то $\sigma wt(f) \leq \sigma' wt(\chi^*(f))$, поэтому $g'_*(\sum a_j F_j) = 0$. Неприводимость и приведенность $\bar{E}'$ следует из того, что все $a_j > 0$. Отсюда мы видим, что $\bar{E}'|_{\bar{X}'}$ и E определяют одно и то же нормирование над полем функций X и поэтому $\bar{X}$ и $\bar{X}'$ изоморфны над X . Значит, $\nu \sim \nu'$.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\nu \sim \nu' \in \mathcal{W}_1$. Тогда ν -раздутие X и ν' -раздутие X изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Они изоморфны, так как совпадают раздуваемые идеалы.

Пусть X – росток трехмерной терминальной особенности типа cA ,

$$j: X \simeq \{\varphi = (xy + f(z, u)) = 0\} \subseteq \mathbb{C}_{(x, y, z, u)}^4$$

– стандартное вложение, k – минимальная степень мономов, входящих в f . Тогда верна

ЛЕММА 2.3. Пусть $j': X \simeq \{\varphi' = 0\} \subseteq \mathbb{C}_{(x', y', z', u')}^4$. Тогда если $(j', \sigma') \in \mathcal{W}_1$, то $\sigma'wt(z') = \sigma'wt(u') = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Либо $x'y'$, либо $x'^2, y'^2 \in \varphi'$, так как иначе j' не будет определять особенность типа cA . Поэтому $\sigma'wt(x') + \sigma'wt(y') \geq \sigma'wt(\varphi')$. Имеем

$$1 = \sigma'wt(x') + \sigma'wt(y') + \sigma'wt(z') + \sigma'wt(u') - \sigma'wt(\varphi') - 1 \geq \sigma'wt(z') + \sigma'wt(u') - 1.$$

Следовательно, $\sigma'wt(z') = \sigma'wt(u') = 1$.

Положим $\sigma_{a,b} = (a, b, 1, 1)$, $\nu_{a,b} = (j, \sigma_{a,b})$, где a, b – положительные целые числа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [14]. Имеем $\mathcal{W}_1(j) = \{\nu_{a,b} \mid a + b \leq k\}$, где j – стандартное вложение. В частности, $\nu_{a,b}$ максимален в $\mathcal{W}_1(j)$, если $a + b = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(j, \sigma) \in \mathcal{W}_1(j)$, то по лемме 2.3 $\sigma wt(z) = \sigma wt(u) = 1$ и $\sigma wt(xy) = \sigma wt(\varphi)$. Имеем $k \geq \sigma wt(\varphi) = a + b$.

ТЕОРЕМА 2.2. Для каждого $\nu_{a,b} \in \mathcal{W}_1(j)$ такого, что $a + b = k$, $\nu_{a,b}$ -раздутие $\pi_{a,b}: \overline{X}_{a,b} \rightarrow X$ является дивизориальным с дискрепантностью 1. Для различных пар (a, b) морфизмы $\pi_{a,b}$ не изоморфны над X и реализуют все возможные дивизоры с дискрепантностью 1 над X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что многообразие $\overline{X}_{a,b}$ имеет только терминальные особенности. Действительно, оно покрывается четырьмя аффинными картами U_1, U_2, U_3, U_4 , где U_i – гиперповерхность в $\mathbb{C}^4$, заданная уравнением

$$U_1 = \{\bar{y} + \bar{x}^{-k} f(\bar{x}\bar{z}, \bar{x}\bar{u}) = 0\} / \mathbb{Z}_a(1, -b, -1, -1),$$

$$U_2 = \{\bar{x} + \bar{y}^{-k} f(\bar{y}\bar{z}, \bar{y}\bar{u}) = 0\} / \mathbb{Z}_b(-a, 1, -1, -1),$$

$$U_3 = \{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}^{-k} f(\bar{z}, \bar{z}\bar{u}) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4, \quad U_4 = \{\bar{x}\bar{y} + \bar{u}^{-k} f(\bar{z}\bar{u}, \bar{u}) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^4.$$

При этом исключительный дивизор $E_{a,b}$ морфизма $\pi_{a,b}$ задается уравнением

$$E_{a,b} = \{\bar{x}\bar{y} + f_{\sigma wt=k}(\bar{z}, \bar{u}) = 0\} \subseteq \mathbb{P}(a, b, 1, 1).$$

Нетрудно заметить, что на $\overline{X}_{a,b}$ имеются только терминальные особенности, в частности, особенность типа $\frac{1}{a}(-1, 1, 1)$ в карте U_1 , особенность типа $\frac{1}{b}(-1, 1, 1)$ в карте U_2 и не хуже, чем изолированные cDv точки, в картах U_3 и U_4 .

Так как $E_{a,b}$ неприводим, имеем $K_{\overline{X}_{a,b}} = \pi_{a,b}^* K_X + E_{a,b}$. Поэтому $\pi_{a,b}$ – стягивание дивизора с дискрепантностью 1.

Рассмотрим $\mathbb{Q}$ -Картье дивизор D на X , задаваемый уравнением $x = 0$. Имеем $\pi_{a,b}^*(D) = \pi_{a,b}^{-1}(D) + aE_{a,b}$. Следовательно, $\pi_{a,b}$ не изоморфны над X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Над X лежит ровно $k-1$ попарно неизоморфных дивизоров с дискрепантностью 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторое нормирование $\nu_{a,b} \in \mathcal{W}_1$, где $a+b=k$, и раздуем $\pi_{a,b}: \overline{X}_{a,b} \rightarrow X$. По предложению 2.1 дивизоры с дискрепантностью 1 над X не могут лежать над точками $\overline{X}_{a,b}$ индекса 1. Поэтому мы будем рассматривать точки индекса ≥ 2 . Таких точек всего две: особенность Q_1 типа $\frac{1}{a}(-1, 1, 1)$ в карте U_1 и особенность Q_2 типа $\frac{1}{b}(-1, 1, 1)$ в карте U_2 . Рассмотрим Q_1 . Мы можем “экономно” разрешить ее (см. [1]), т.е. существует проективный морфизм $\nu: Z \rightarrow \overline{X}_{a,b}$ такой, что

$$K_Z = \nu^* K_{\overline{X}_{a,b}} + \sum_{i=1}^{a-1} \frac{i}{a} F_i,$$

где $\sum F_i$ – исключительный дивизор над Q_1 . Так как $E_{a,b}$ вблизи Q_1 задается уравнением $\tilde{x} = 0$, то

$$\nu^*(E_{a,b}) = \nu^{-1}(E_{a,b}) + \sum_{i=1}^{a-1} \frac{a-i}{a} F_i.$$

Имеем

$$a(F_i, X) = \frac{i}{a} + \frac{a-i}{a} = 1$$

для всех $i = 1, \dots, a-1$. Аналогично, над Q_2 лежит ровно $b-1$ дивизор с дискрепантностью 1 (над X). Поэтому всего над X лежит $(a-1) + (b-1) + 1 = k-1$ дивизор (включая $E_{a,b}$) с дискрепантностью 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Если $\nu' = (j', \sigma') \in \mathcal{W}_1$ – максимальный элемент, то существует $\nu_{a,b}$, где $a+b=k$, такой, что $\nu' \succ \nu_{a,b}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{\nu_{a,b} \in \mathcal{W}_1 \mid \nu_{a,b} \prec \nu'\}$. Проверим, что A не пусто. По определению $\chi \circ j = j'$, где χ – некоторое биголоморфное отображение порядка k , j – стандартное вложение. Рассмотрим такой вес $\sigma = (a', b', 1, 1)$, что $\nu = (j, \sigma) \preceq (j', \sigma')$. Чтобы доказать, что такой вес можно выбрать, нужно проверить, что $(j, \sigma) \in \mathcal{W}_1$. Если $\sigma wt(xy) \geq \sigma wt(f)$, то мы можем положить $\sigma wt(z) = \sigma wt(u) = 1$ и уменьшить веса x, y так, что $d(\nu) = 1$. Если $\sigma wt(xy) \leq \sigma wt(f)$, то положим $\sigma wt(z) = \sigma wt(u) = 1$. Если мы приходим в предыдущий случай, то все доказано. Иначе

$$d(\nu) = \sigma wt(x) + \sigma wt(y) + \sigma wt(z) + \sigma wt(u) - \sigma wt(\varphi) - 1,$$

где φ – уравнение, определяющее j . В нашем случае

$$\sigma wt(z) = \sigma wt(u) = 1, \quad \sigma wt(x) + \sigma wt(y) = \sigma wt(\varphi).$$

То есть $d(\nu) = 1$. Значит, A не пусто. Следовательно, существует максимальный элемент $\nu_{a,b} \in A$. Предполагая $a+b < k$, мы приходим к противоречию.

Пусть χ – квазиоднородное биголоморфное отображение порядка k :

$$\chi: \mathbb{C}_{(x', y', z', u')}^4 \rightarrow \mathbb{C}_{(x, y, z, u)}^4,$$

такое, что $\chi \circ j' = j$. Обозначим

$$p = \chi^*(x), \quad q = \chi^*(y), \quad r = \chi^*(z), \quad s = \chi^*(u) \in \mathbb{C}\{x', y', z', u'\}.$$

Уравнением, определяющим j' в новых переменных, будет $\varphi' = pq + f(r, s)$. Так как $\nu' \succ \nu_{a,b}$, то $\sigma'wt(p) \geq a$, $\sigma'wt(q) \geq b$. Если хоть одно из этих неравенств строгое, то $\nu' \succ \nu_{a+1,b}$ или $\nu' \succ \nu_{a,b+1}$, что противоречит максимальности $\nu_{a,b}$. Поэтому $\sigma'wt(p) = a$, $\sigma'wt(q) = b$. Так как по предположению $a + b < k$, а $\sigma'wt(f(s, r)) \geq k$, то $\sigma'wt(\varphi') = a + b$. Из леммы 2.3 следует, что с точностью до перестановки координат

$$\sigma'wt(x', y', z', u') = (a', b', 1, 1)$$

для некоторых $a', b' \in \mathbb{N}$. Так как $d(\nu') = 1$, получаем $a' + b' = a + b$. Из леммы 2.1 после возможной перестановки x' и y' получаем $\nu' \sim \nu_{a,b}$, что противоречит максимальности ν' . Поэтому $a + b = k$.

Основная теорема доказана, поскольку из леммы 2.1 и предложения 2.3 следует, что $\nu_{a,b}$, где $a + b = k$ — это все максимальные элементы в $\mathcal{W}_1$, т.е. их всего $k - 1$. С другой стороны, из предложения 2.1 и теоремы 2.2 следует, что над X лежит $k - 1$ дивизор с дискрепантностью 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416.
- [2] Данилов В. И. Бирациональная геометрия торических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 971–982.
- [3] Reid M. Minimal models of canonical threefolds // Adv. Stud. Pure Math. 1983. V. 1. P. 131–180.
- [4] Morrison D., Stevens G. Terminal quotient singularities in dimension three and four // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 90. P. 15–20.
- [5] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. 1985. V. 98. P. 43–66.
- [6] Kawamata Y. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-Dimensional Complex Varieties (Trento, 1994): de Gruyter, 1996. P. 241–246.
- [7] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. of Math. 1982. V. 116. P. 133–176.
- [8] Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein threefolds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.
- [9] Luo T. Divisorial contractions of threefolds: divisor to point // Amer. J. Math. 1998. V. 120. P. 441–451.
- [10] Kawakita M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisor to smooth points // E-print [math.AG/0005207](https://arxiv.org/abs/math/0005207), 2000.
- [11] Kawakita M. Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to compound A_1 points // E-print [math.AG/0010207](https://arxiv.org/abs/math/0010207), 2000.
- [12] Kawamata Y. The minimal discrepancy of 3-fold terminal singularity. Appendix to Shokurov V. V. 3-fold log flips // Russian Acad. Sci. Izv. Math. 1993. V. 40. № 1. P. 93–202.
- [13] Markushevich D. Minimal discrepancy for a terminal cDv singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. P. 445–456.
- [14] Hayakawa T. Blowing-ups of 3-dimensional terminal singularities // RIMS Kyoto Univ. 1999. V. 35. P. 515–570.
- [15] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
- [16] Маркушевич Д. Г. Канонические особенности трехмерных гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 334–368.