Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, Что такое квантовое стохастическое уравнение с точки зрения функционального анализа?, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 3, 448–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 07:52:14

УДК 517.983.51

ЧТО ТАКОЕ КВАНТОВОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА?

А. М. Чеботарев

В статье доказано, что квантовое стохастическое дифференциальное уравнение является представлением взаимодействия задачи Коши для уравнения Шрёдингера с гамильтонианом, который реализуется как оператор плюс краевое условие. Если индекс дефекта соответствующей краевой задачи тривиален, то квантовое стохастическое уравнение имеет единственное унитарное решение. Поэтому мы называем индексом дефекта квантового стохастического уравнения индекс связанной с ним симметричной краевой задачи. В статье получены достаточные условия существенной самосопряженности симметричной краевой задачи. Эти условия тесно связаны с условиями отсутствия взрыва для пары уравнений марковской эволюции, канонически сопоставляемых квантовому стохастическому уравнению.

Библиография: 22 названия.

0. Введение. Квантовые стохастические дифференциальные уравнения описывают результат специфических предельных переходов для ряда важных физических задач в фоксовском пространстве, когда уравнение для предельной величины не совпадает с пределом уравнений. Такие предельные переходы (предел слабого взаимодействия [1], [2], предел слабых неразрушающих измерений [3], стохастический предел [4], сильная резольвентная сходимость [5] и т.п.) активно изучаются многими авторами в последние 20 лет. Важный вклад вносят работы Л. Аккарди и соавторов (см. [6] и приведенные там ссылки).

В силу физической интерпретации операторозначных решений квантовых стохастических дифференциальных уравнений обычно предполагается их унитарность, которая до недавнего времени устанавливалась пертурбативными методами, в основе которых лежат глубокие операторные аналоги стохастического интегрирования [7]–[9]. Хотя решения квантовых стохастических уравнений не являются группами (или полугруппами), а обладают структурой мультипликативных коциклов, они унитарно эквивалентны группам (или полугруппам) [8], [10], [11]. Однако связь этой теории с теоремой Стоуна и теорией самосопряженных расширений оставалась невыясненной в течение последних 15 лет, поскольку попытки найти естественную операторную реализацию генератора не дали удовлетворительного объяснения свойству унитарности. Трудность связана с нетривиальной конструкцией существенной области определения. Недавно

автором настоящей статьи на примере точно решаемой задачи было замечено, что генератор группы, унитарно эквивалентной решению квантового стохастического дифференциального уравнения, является оператором, дополненным краевым условием, описывающим скачки фазы и амплитуды на координатных гиперплоскостях в фоковском пространстве [12], [13]. Это краевое условие обеспечивает симметричность оператора.

В настоящей статье мы описываем теорию, позволяющую связать свойство существенной самосопряженности симметричной краевой задачи с условиями отсутствия взрыва [14], [15] для пары уравнений марковской эволюции, канонически сопоставляемых квантовому стохастическому уравнению.

В первом разделе для задач с неограниченными операторными коэффициентами конструируется область определения, обеспечивающая симметричность и корректную определенность оператора вместе с краевым условием. Далее вводится понятие фоковского комплекса и его границы. На фоковском комплексе – открытом множестве – задаются уравнения, а на его границе ставится граничное условие. Далее выводятся формулы интегрирования по частям (формулы Стокса), играющие важную роль для последующего анализа краевых задач. Во втором разделе выводятся интегральные уравнения на границе, доказываются априорные оценки для их решений и обосновываются достаточные условия существенной самосопряженности симметричной краевой задачи. В третьем разделе мы выводим квантовое стохастическое дифференциальное уравнение непосредственно из краевой задачи.

1. Симметричная краевая задача в фоковском пространстве.

1.1. *Конструкция области определения.* Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство с полуторалинейным скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. В симметричном фоковском пространстве $\Gamma_{\mathcal{H}}^S = \Gamma^S(L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})) = \Gamma^S(L_2(\mathbb{R})) \otimes \mathcal{H}$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0, \psi_0)_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} dx (\varphi_n(x), \psi_n(x))_{\mathcal{H}}$$

рассмотрим оператор C , действующий по правилу

$$C: \quad C\psi = i(\nabla + G^* - L^* A_-)\psi, \quad G = iH + \frac{1}{2}L^*L, \quad (1.1.1)$$

где H – замкнутый симметричный оператор, L – замкнутый оператор, действующие в $\mathcal{H}$,

$$(\nabla\psi)_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} \psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ A_{\pm} \psi_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} \psi_n(\pm 0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

а заданная ниже область определения $\mathcal{D}_0 = \text{dom } C$ плотна в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ и удовлетворяет условиям

$$\text{dom } C \subseteq \psi: \begin{cases} (A_- - W A_+ - L)\psi = 0, \\ (\nabla\psi, G^*\psi, L^* A_- \psi) \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где W – унитарный оператор в $\mathcal{H}$. Поскольку $G + G^* = L^*L$, то в силу краевого условия (1.1.2) оператор C имеет эквивалентную форму $C = i(\nabla - G - L^*WA_+)$. Заметим, что если $v \in W_2^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, то $A_\pm \psi(v) = v(\pm 0)\psi(v)$, и если $v \in C(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то $A_\pm \psi(v) = v(0)\psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} A_0\psi(v)$. Здесь $\psi(v)$ – экспоненциальный вектор:

$$\psi(v) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ 1, \frac{v(x_1)}{\sqrt{1!}}, \frac{v(x_1)v(x_2)}{\sqrt{2!}}, \dots \right\}, \quad v \in L_2(\mathbb{R}),$$

а $\psi(0) = \{1, 0, 0, \dots\}$ – вакуумный вектор. Напомним также, что линейная оболочка множества экспоненциальных векторов $\text{Span}\{\psi(v)\}$ плотна в Γ^S , если множество $\{\lambda v(x)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, плотно в $L_2(\mathbb{R})$ [8], [11].

В простейших случаях, представляющих интерес для приложений, пространство $\mathcal{H}$ либо конечномерно, либо $\mathcal{H} = \ell_2$. Если пространство $\mathcal{H}$ конечномерно, то коэффициенты L и G являются ограниченными операторами; при этом условиям (1.1.2) можно удовлетворить, взяв в качестве $\text{dom } C$ линейную оболочку векторов

$$\mathcal{D}_0 = \text{Span}\{\psi(\hat{v}_\varepsilon)h, \quad h \in \mathcal{H}\}, \quad \psi_n(\hat{v}_\varepsilon)(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_k \hat{v}_\varepsilon(x_k) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (1.1.3)$$

где компоненты вектора $\psi(\hat{v}_\varepsilon)$ являются произведением ограниченных операторов $\hat{v}_\varepsilon(x_k)$, действующих в $\mathcal{H}$, коммутирующих при различных x_k :

$$\hat{v}_\varepsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} v(t) \left(1 - \xi \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) + \xi \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \{ cI_{(-\infty, 0)}(t) + I_{(0, \infty)}(t)W^*(Ic - L) \}, \quad (1.1.4)$$

где $c \in \mathbb{C}$, $v(t) \in W_2^1(\mathbb{R})$, $\xi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\xi(0) = 1$, $|\xi(t)| \leq 1$. Поскольку

$$\hat{v}_\varepsilon(+0) = W^*(Ic - L) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \hat{v}_\varepsilon(-0) = Ic = W\hat{v}_\varepsilon(+0) + L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

то $A_\pm \psi(\hat{v}_\varepsilon)h = \hat{v}_\varepsilon(\pm 0)h \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ и $A_- \psi(\hat{v}_\varepsilon)h = WA_- \psi(\hat{v}_\varepsilon)h + L\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$. Поэтому все условия (1.1.2) кроме $\nabla \psi(\hat{v}_\varepsilon)h \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ выполнены очевидным образом.

Заметим, что поскольку $\|\xi(t/\varepsilon)\|_{L_2} = \varepsilon^{1/2}\|\xi\|_{L_2}$, то

$$\begin{aligned} \|\hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})} &\leq \|v\|_{L_2} + \varepsilon^{1/2}(|c| + \|L\|_{\mathcal{H}})\|\xi\|_{L_2}, \\ \|v - \hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})} &\leq \varepsilon^{1/2}\|\xi\|_{L_2} \left(\sup_t |v(t)| + (|c| + \|L^*\|_{\mathcal{H}}) \right). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Аналогично оценивается норма производной:

$$\|\hat{v}'_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})} \leq \|v'\|_{L_2} + \varepsilon^{-1/2} \left(\sup_t |v(t)| + |c| + \|L\|_{\mathcal{H}} \right) \|\xi'\|_{L_2} < \infty.$$

С помощью первой оценки (1.1.5) нетрудно доказать, что $\nabla \psi(\hat{v}_\varepsilon)h \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$:

$$\nabla \psi_n(\hat{v}_\varepsilon)h(x) = (n!)^{-1/2} \sum_{k=1}^n \hat{v}'_\varepsilon(x_k) \prod_{m=1, m \neq k}^n \hat{v}_\varepsilon(x_m), \quad (1.1.6)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \psi(\hat{v}_\varepsilon)h\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 &\leq \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} dx \|\hat{v}'_\varepsilon(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dy \prod_{m=1}^{n-1} \|\hat{v}_\varepsilon(y_m)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|h\|^2 \{ \|\hat{v}'_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})}^2 + \|\hat{v}'_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})}^2 \} C_\varepsilon < \infty, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

$$\text{где } C_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \|\hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^{2(n-1)} < \infty.$$

Множитель n^2 в сумме (1.1.7) возникает за счет суммирования n производных согласно (1.1.6) и неравенства $\|\sum_{k=1}^n \hat{v}'_\varepsilon(x_k)\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|\hat{v}'_\varepsilon(x_k)\|^2$.

Важно отметить, что для выполнения условий (1.1.2) равномерность приведенных выше оценок по ε не требуется. Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ нужен лишь для того, чтобы доказать тотальность линейной оболочки (1.1.3). Поскольку линейная оболочка множества экспоненциальных векторов с аргументами из $W_1^S(\mathbb{R})$ тотальна в Γ^S (см. [8], [11]), то тотальность множества (1.1.3) следует из оценки

$$\begin{aligned} \|(\psi(v) - \psi(\hat{v}_\varepsilon)h)\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 &\leq \|h\|^2 \|v - \hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} \sum_{m=1}^n \|v\|_{L_2(\mathbb{R})}^{2(m-1)} \|\hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^{2(n-m)} \\ &\leq \|h\|^2 \|v - \hat{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^2 C_\varepsilon = O(\varepsilon), \end{aligned}$$

обеспечивающей сходимость $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме пространства $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ к векторам $\psi(v)h$ (см. (1.1.5)), образующим тотальное множество в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение об области определения оператора C с ограниченными коэффициентами.

ЛЕММА 1.1.1. *Если коэффициенты L и H являются ограниченными операторами в $\mathcal{H}$, то линейная оболочка $\mathcal{D}_0$ векторов $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, $h \in \mathcal{H}$, вида (1.1.3) плотна в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, удовлетворяет краевому условию и принадлежит области определения (1.1.2) оператора C .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.1. Если $c = c(\varepsilon)$ — произвольная комплексная функция, не обязательно имеющая предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, но $\varepsilon^{1/2}c(\varepsilon) \rightarrow 0$, то в силу (1.1.5) $\psi(\hat{v}_\varepsilon) \rightarrow \psi(v)$, а краевые значения $A_- \psi(\hat{v}_\varepsilon) = c(\varepsilon)\psi(\hat{v}_\varepsilon)$ и $A_+ \psi(\hat{v}_\varepsilon) = W^*(c(\varepsilon)I - L)\psi(\hat{v}_\varepsilon)$ хотя и принадлежат $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ при любом ε , но, вообще говоря, не имеют пределов при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае неограниченных коэффициентов L и H построение тотального множества, задающего плотную область определения оператора C , требует дополнительных предположений. Пусть существует положительный самосопряженный оператор $\Lambda \geq I$ такой, что $\text{dom } \Lambda \subset \text{dom } L \cap \text{dom } G^*$ и

$$\Lambda^{1/2}W^*(cI - L)\Lambda^{-1}, G^*\Lambda^{-1}, \Lambda^{-1/2}W^*(cI - L), L^*\Lambda^{-1/2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (1.1.8)$$

В дальнейшем эти условия играют важную роль при доказательстве существенной самосопряженности оператора C . Покажем, что естественная область определения оператора C содержит линейную оболочку векторов

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 = \text{Span}\{\psi(\hat{v}_\varepsilon)h, h \in \text{dom } \Lambda\}, \quad \text{где } \psi_n(\hat{v}_\varepsilon)(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_k^{\rightarrow} \hat{v}_\varepsilon(x_k) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \\ \hat{v}_\varepsilon(t) = v(t) \left(1 - \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) + \xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \{cI_{(-\infty, 0)}(t) + I_{(0, \infty)}(t)e^{-\Lambda t/\varepsilon}W^*(Ic - L)\}, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где $\psi_n(\hat{v}_\varepsilon)(x_1, \dots, x_n)$ является произведением операторов, упорядоченных в соответствии с порядком скалярных координат x_k : операторы с меньшими x_k действуют *позже* (см. [16], [17]), а v, ξ, c те же, что и в (1.1.4).

Для любого $h \in \text{dom } \Lambda$ из условий (1.1.8) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dt \|\Lambda e^{-\Lambda t} W^*(cI - L)h\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{1}{2} \|\Lambda^{1/2} W^*(cI - L)h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{\mu_c^2}{2} \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2, \\ \int_{\mathbb{R}} dt \|G^* e^{-\Lambda t} W^*(cI - L)h\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \nu^2 \int_{\mathbb{R}} dt \|\Lambda e^{-\Lambda t} W^*(cI - L)h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{\nu^2 \mu_c^2}{2} \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

для любых $\mu_c \geq \|\Lambda^{1/2} W^*(cI - L)\|$, $\nu \geq \|G^* \Lambda^{-1}\|$. Отсюда следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}} \|\Lambda \hat{v}_\varepsilon(t) h\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq \frac{3}{2} \kappa_{c,\varepsilon} \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

где $\kappa_{c,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \|v\|_{L_2}^2 + \varepsilon |c|^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|^2 dt + \varepsilon \mu_c^2/2 \rightarrow \|v\|_{L_2}^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если $\|v\|_{L_2}^2 < 2/3$ и $h \in \text{dom } \Lambda$, то $(3/2)\kappa_{c,\varepsilon} < 1$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и поэтому норма в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ вектора $\Lambda \psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ ограничена:

$$\begin{aligned} \|\Lambda \psi(\hat{v}_\varepsilon)h\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 &= \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_1^\infty \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^\infty dt_n \|\Lambda \hat{v}_\varepsilon(t_1) \cdots \hat{v}_\varepsilon(t_n)h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_1^\infty \int_{\mathbb{R}} dt_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} dt_n \|\Lambda \hat{v}_\varepsilon(t_1) \cdots \hat{v}_\varepsilon(t_n)h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|\Lambda h\|^2 \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3\kappa_{c,\varepsilon}}{2} \right)^n < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, для $\forall h \in \text{dom } \Lambda$ нормы векторов $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, $G^*\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, $L^*A_-\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, мажорируемые нормой вектора $\Lambda \psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, ограничены в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ при всех достаточно малых ε . Таким образом, все слагаемые в формуле (1.1.1) за исключением $\nabla \psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ корректно определены как элементы из $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$. Покажем, что $\nabla \psi(\hat{v}_\varepsilon)h \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$.

Из определения оператора $\hat{v}_\varepsilon(t)$ следуют оценки

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}_\varepsilon^*(t) \hat{v}_\varepsilon(t) dt &\leq 3I \left(\|v\|_{L_2}^2 + \varepsilon c^2 \|\xi\|_{L_2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Lambda^{-1/2} W^*(Ic - L)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{c,\varepsilon}(v), \\ \int_{\mathbb{R}} \|\Lambda \hat{v}_\varepsilon(t)h\|_{\mathcal{H}}^2 dt &\leq 3 \left(\|v\|_{L_2}^2 + \varepsilon c^2 \|\xi\|_{L_2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Lambda^{1/2} W^*(Ic - L) \Lambda^{-1}\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \lambda_{c,\varepsilon} \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

где $\lambda_{c,\varepsilon} \rightarrow 3\|v\|_{L_2}^2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \hat{v}_\varepsilon'(t) &= v'(t) \left(1 - \xi \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right) - \Lambda \varepsilon^{-1} \xi \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) e^{-\Lambda t/\varepsilon} W^*(Ic - L) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \xi' \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) (cI_{(-\infty,0)}(t) + I_{(0,\infty)}(t) e^{-\Lambda t/\varepsilon} W^*(Ic - L) - v(t)). \end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{v}_\varepsilon'(t)^* \hat{v}_\varepsilon'(t) dt &\leq 3 \left\{ \|v'\|_{L_2}^2 + \frac{\Lambda^2}{2} \|\Lambda^{1/2} W^*(Ic - L) \Lambda^{-1}\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2\varepsilon} \left[\left(\sup_t |v|^2 + |c|^2 \right) \|\xi'\|_{L_2}^2 \|\Lambda^{-1/2} W^*(cI - L)\|_{\mathcal{H}}^2 \right] \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{c,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi_n(\hat{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} dt \hat{v}_\varepsilon^*(t_n) \cdots \hat{v}_\varepsilon'^*(t_k) \cdots \hat{v}_\varepsilon^*(t_1) \hat{v}_\varepsilon(t_1) \cdots \hat{v}_\varepsilon'(t_k) \cdots \hat{v}_\varepsilon(t_n) \\ &\leq n(3\lambda_{c,\varepsilon})^{n-1} \mu_{c,\varepsilon} \Lambda^2, \end{aligned}$$

и поэтому для любых $h \in \text{dom } \Lambda$ и $v \in W_2^1(\mathbb{R})$ вектор $\nabla\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ принадлежит $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$,

$$(\nabla\psi(\hat{v}_\varepsilon)h, \nabla\psi(\hat{v}_\varepsilon)h)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} \leq \mu_{c,\varepsilon} \|\Lambda h\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(3\lambda_{c,\varepsilon})^{n-1} < \infty,$$

если $\|v\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 < 1/3$. Множество $\mathcal{D}_0$ является плотным в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, поскольку для любого $x \neq 0$ существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \xi(x/\varepsilon) = 0$ и

$$s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{v}_\varepsilon(x) = v(x) \quad \text{в } \mathcal{H}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(\hat{v}_\varepsilon)h = \psi(v)h \quad \text{в } \Gamma_{\mathcal{H}}^S. \quad (1.1.11)$$

Сходимость $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ к $\psi(v)h$ для любого $h \in \text{dom } \Lambda$ можно доказать с помощью первой оценки (1.1.10):

$$\|\psi(\hat{v}_\varepsilon) - \psi(v)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{m=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{t_{n-1}}^{\infty} dt_n V_{\varepsilon,m}^*(t) V_{\varepsilon,m}(t) \right\|^2,$$

где с учетом описанного выше хронологического упорядочения операторов

$$V_{\varepsilon,m}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{m-1} \hat{v}_\varepsilon(t_k)(\hat{v}_\varepsilon(t_m) - v(t_m)) \cdot \prod_{k=m+1}^n v(t_k), \quad t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n.$$

Поэтому для любого $h \in \text{dom } \Lambda$ и любых v таких, что $\lambda_{c,\varepsilon}(v) < 1$, имеем

$$\|(\psi(\hat{v}_\varepsilon) - \psi(v))h\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 \leq \|(\hat{v}_\varepsilon - v)h\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_{c,\varepsilon}^{n-1} \leq C \|(\hat{v}_\varepsilon - v)h\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^2 \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\|(\hat{v}_\varepsilon - v)h\|_{L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}^2 \leq 3\varepsilon \|\Lambda h\|_{\mathcal{H}}^2 ((\sup_t |v(t)| + |c|^2) \|\xi\|_{L_2}^2 + \mu_c^2/2)$. С другой стороны, краевое условие (1.1.2) выполнено для каждого элемента $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$, поскольку для всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$\hat{v}_\varepsilon(+0) = W^*(Ic - L), \quad \hat{v}_\varepsilon(-0) = Ic = W\hat{v}_\varepsilon(+0) + L,$$

а при вычислении граничного условия $A_+\psi(\hat{v}_\varepsilon)$ для каждой компоненты вектора $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ оператор $W^*(Ic - L)$ появляется *слева*, так как в силу хронологического упорядочения (1.1.9) оператор $\hat{v}_\varepsilon(+0)$ действует последним в произведении некоммутирующих операторов, а все операторы, действующие позже него, коммутируют. Идея хронологического упорядочения была высказана и реализована в [17]. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1.1. Пусть выполнены условия (1.1.8). Тогда множество векторов $\psi(\hat{v}_\varepsilon)h$ вида (1.1.9), где $h \in \text{dom } \Lambda$, тотально в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ и удовлетворяет условиям (1.1.2).

Для матричнозначных операторов $L = \{L_n\}_1^N$ и $W = \{W_{k,n}\}_1^N$ обобщение приведенной выше конструкции состоит в глобальном хронологическом упорядочении произведения некоммутирующих операторов

$$\hat{v}_\varepsilon(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \prod_n \prod_{k_n}^{\rightarrow} \hat{v}_\varepsilon^{(n)}(x_{k_n}^{(n)}).$$

1.2. **Фоковский комплекс** – открытая область, где задан симметричный оператор C . Подмножеству $\mathcal{K}_n = \{k_1, \dots, k_j\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ и его дополнению $\mathcal{K}_n^a = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{K}_n$ сопоставим открытые множества

$$\Omega_n(\mathcal{K}_n) = \{x: x_{k_i} > 0, k_i \in \mathcal{K}_n^a; x_{k_j} < 0, k_j \in \mathcal{K}_n\} \subseteq \mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^{n-j} \subset \mathbb{R}^n,$$

называемые n -частичными **фоковскими камерами**, а объединение всех камер

$$\Omega = \Omega_0 \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{\mathcal{K}_n} \Omega_n(\mathcal{K}_n) \right\} = \Omega_0 \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$$

будем называть **фоковским комплексом**. Камера $\Omega_0 = \emptyset$ является пустым множеством. Граница n -частичной камеры $\Omega_n(\mathcal{K}_n)$ отождествляется с объединением n ($n-1$)-частичных камер $\partial\Omega_n(\mathcal{K}_n) = \bigcup_{i=1}^n \Omega_n(\mathcal{K}_n)|_{x_i=0}$, называемых **гранями** камер. Каждая грань имеет две стороны, принадлежащие смежным камерам. Стороны граней называются **стенками** соответствующих камер. Если камера $\Omega_n(\mathcal{K}_n)$ содержит точки с координатами $x_k > 0$, т.е. $k \in \mathcal{K}_n$, то внутренняя нормаль грани $\Omega_n(\mathcal{K}_n)|_{x_i=0}$ направлена противоположно направлению оси x_k . Такая сторона грани (стенка) называется **холодной**. В противоположном случае стенка называется **горячей**. Камера $\Omega_n(\mathcal{K}_n)$, $j = |\mathcal{K}_n|$, имеет j горячих и $k = n - j$ холодных стенок. Рассмотрим множество

$$D_{j,k} = \bigcup_{\mathcal{K}_{j+k}: |\mathcal{K}_{j+k}|=j} \Omega_{j+k}(\mathcal{K}_{j+k}),$$

содержащее C_{j+k}^j ($j+k$)-частичных фоковских камер, имеющих по j горячих и k холодных стенок. Обозначим через

$$\Omega_+^k \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j \geq 0} D_{j,k}, \quad \Omega_-^j \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k \geq 0} D_{j,k}$$

прямую сумму всех фоковских камер с фиксированным числом холодных или горячих стенок, а соответствующие векторные подпространства симметричного фоковского пространства обозначим через $\Gamma_{\mathcal{H}}^S(\mathcal{L}_2(\Omega_{\pm}^k)) \subset \Gamma_{\mathcal{H}}^S$. Например, подпространство $\Gamma_{\mathcal{H}}^S(\mathcal{L}_2(\Omega_+^k))$ состоит из векторов с компонентами

$$\psi = \{\psi_{j+k}(q, p)\}_{j=0}^{\infty}, \quad q \in \mathbb{R}_-^j, \quad p \in \mathbb{R}_+^k, \quad \psi_n(q, p) = 0, \quad \text{если } p \in \mathbb{R}_+^m, m \neq k.$$

Нетрудно видеть, что $\Gamma_{\mathcal{H}}^S = \bigcup_k \Gamma_{\mathcal{H}}^S(\mathcal{L}_2(\Omega_{\pm}^k))$.

ЛЕММА 1.2.1 (формула Стокса для фоковских камер). Для любых $\varphi_n, \psi_n \in W_2^1((\mathbb{R} \setminus \{0\})^n, \mathcal{H})$ имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{D_{j,k}} \{(\varphi_n(x), \nabla \psi_n(x))_{\mathcal{H}} + (\nabla \varphi_n(x), \psi_n(x))_{\mathcal{H}}\} d^n x \\ &= \int_{D_{j-1,k}} (A_- \varphi_n(x), A_- \psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^{n-1} x - \int_{D_{j,k-1}} (A_+ \varphi_n(x), A_+ \psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^{n-1} x, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

где $n = j + k$. В случае если (1.2.1) – квадратичная форма (т.е. $\varphi = \psi$), то горячие стенки дают положительный вклад, а холодные стенки – отрицательный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции из $W_2^s(\Omega_n(\mathcal{K}_n), \mathcal{H})$, $s \in \mathbb{R}$, вкладываются с сохранением нормы в $W_2^s(\mathbb{R}_n, \mathcal{H})$, если их продолжить нулем на $\mathbb{R}_n \setminus \Omega_n(\mathcal{K}_n)$. Для нормы краевого значения любой функции $\psi \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|A\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1}, \mathcal{H})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int dp_1 \cdots dp_{n-1} \left\| \int \tilde{\psi}(p) dp_n \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int dp_1 \cdots dp_{n-1} \int (1 + p_n^2) \|\tilde{\psi}(p)\|_{\mathcal{H}}^2 dp_n \int \frac{dp_n}{1 + p_n^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\psi\|_{W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})}^2, \end{aligned}$$

где $\tilde{\psi}(p)$ – преобразование Фурье функции ψ . Поэтому предположение $\varphi_n, \psi_n \in W_2^1((\mathbb{R} \setminus \{0\})^n, \mathcal{H})$ обеспечивает корректность левой и правой частей равенства (1.2.1), поскольку в этом случае $A_{\pm} \varphi_n, A_{\pm} \psi_n, \nabla \varphi_n, \nabla \psi_n \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$.

Рассмотрим формулу интегрирования по частям, описывающую элементарный вклад от холодных и горячих стенок:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n(\mathcal{K}_n)} (\varphi_n(x), \partial_{x_i} \psi_n(x)) d^n x + \int_{\Omega_n(\mathcal{K}_n)} (\partial_{x_i} \varphi_n(x), \psi_n(x)) d^n x \\ &= \begin{cases} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n \setminus i)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_i=-0} d^{n-1} x, & \text{если } |\mathcal{K}_n| < n \text{ и } i \in \mathcal{K}_n, \\ - \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_i=+0} d^{n-1} x, & \text{если } |\mathcal{K}_n| < n \text{ и } i \in \mathcal{K}_n^a. \end{cases} \end{aligned}$$

По определению множества $\mathcal{K}_n$ граница $\partial \Omega_n(\mathcal{K}_n)$ состоит из $j = |\mathcal{K}_n|$ горячих стенок и $k = n - j = |\mathcal{K}_n^a|$ холодных. Следовательно, по определению операторов $A_{\pm}$ для любой симметричной функции $\psi_n \in W_2^1((\mathbb{R} \setminus \{0\})^n)$ выполнены следующие тождества:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{K}_n^a} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_i=-0} d^{n-1} x \\ &= \frac{k}{j+k} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n)} (A_+ \varphi_n(x), A_+ \psi_n(x)) d^{n-1} x, \\ & \sum_{i \in \mathcal{K}_n} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n \setminus i)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_i=+0} d^{n-1} x \\ &= \frac{j}{j+k} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n \setminus i)} (A_- \varphi_n(x), A_- \psi_n(x)) d^{n-1} x, \end{aligned}$$

где i является элементом множества $\mathcal{K}_n$. Напомним, что множество $D_{j,k}$ состоит из C_{j+k}^k камер и $jC_{j+k}^k/(j+k) = C_{j-1+k}^k$, $kC_{j+k}^k/(j+k) = C_{j+k-1}^{k-1}$. Следовательно, имеет место формула Стокса для фокковских камер:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_n(\mathcal{K}_n)} \partial_{x_i}(\varphi_n(x), \psi_n(x)) \mathcal{H} dx^n \\ &= C_{j-1+k}^k \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n \setminus i)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_i=-0} d^{n-1}x \\ & \quad - C_{j+k-1}^{k-1} \int_{\Omega_{n-1}(\mathcal{K}_n)} (\varphi_n(x), \psi_n(x))|_{x_l=+0} d^{n-1}x \\ &= \int_{D_{j-1,k}} (A_- \varphi_n(x), A_- \psi_n(x)) d^{n-1}x - \int_{D_{j,k-1}} (A_+ \varphi_n(x), A_+ \psi_n(x)) d^{n-1}x, \end{aligned}$$

где $i \in \mathcal{K}_n$, а $l \in \mathcal{K}_n^a$. Лемма доказана.

Заметим, что любую функцию $\psi_n(x) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ такую, что $\nabla \psi_n(x) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$, можно аппроксимировать функциями $\psi_n^{(\varepsilon)}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ такими, что

$$\|\psi_n^{(\varepsilon)} - \psi_n\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})}^2 \rightarrow 0, \quad \|\nabla(\psi_n^{(\varepsilon)} - \psi_n)\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})}^2 \rightarrow 0, \quad (1.2.2)$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого достаточно регуляризовать ψ_n в гиперплоскости $\mathbb{R}_\xi^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, ортогональной вектору $\xi = \{1, \dots, 1\} \in \mathbb{R}^n$:

$$\psi_n^{(\varepsilon)} = (2\pi\varepsilon)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}_\xi^{n-1}} dy e^{-|\hat{\pi}_\xi^a x - y|^2/(2\varepsilon)} \psi_n(\hat{\pi}_\xi x + y),$$

где $\hat{\pi}_\xi$ – проектор на ξ , а $\hat{\pi}_\xi^a = I - \hat{\pi}_\xi$ – проектор на $\mathbb{R}_\xi^{n-1}$. Регуляризованное семейство обладает свойством

$$\nabla \psi_n^{(\varepsilon)} = (2\pi\varepsilon)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}_\xi^{n-1}} dy e^{-|\hat{\pi}_\xi^a x - y|^2/(2\varepsilon)} \nabla \psi_n(\hat{\pi}_\xi x + y) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$$

равномерно по ε , поскольку показатель экспоненты как функция x является постоянной величиной по направлениям ξ . При дифференцировании по x по направлениям η , ортогональным ξ , напротив, постоянной оказывается $\psi_n(\hat{\pi}_\xi x + y)$; следовательно,

$$\begin{aligned} D_\eta \psi_n^{(\varepsilon)} &= (2\pi\varepsilon)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}_\xi^{n-1}} dy \psi_n(\hat{\pi}_\xi x + y) D_\eta e^{-|\hat{\pi}_\xi^a x - y|^2/(2\varepsilon)} \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}), \\ D_\eta &= \frac{(\eta, \nabla)}{\|\eta\|}, \end{aligned}$$

причем здесь не требуется равномерность оценок по ε . Таким образом, $\psi_n^{(\varepsilon)} \in W_2^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ при каждом ε , а сходимость (1.2.2) следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и оценки

$$\begin{aligned} & \|\phi_n - \phi_n^{(\varepsilon)}\|_{L_2(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})}^2 \\ & \leq \left\{ (2\pi)^{-n+1} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}_\xi^{n-1}} dz (\|\phi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\phi_n(x + \sqrt{\varepsilon}z)\|_{\mathcal{H}}^2) e^{-|z|^2/2} \right. \\ & \quad \left. \times \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}_\xi^{n-1}} dw e^{-|w|^2/2} \|\phi_n(y) - \phi_n(y + \sqrt{\varepsilon}w)\|_{\mathcal{H}}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\phi = \psi$ либо $\phi = \nabla\psi$. То есть формула (1.2.1) по непрерывности может быть распространена на векторы ψ и φ из $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ такие, что $A_{\pm}\phi, A_{\pm}\psi, \nabla\phi, \nabla\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$.

Далее, нетрудно видеть, что формула (1.2.1) остается справедливой при любом выборе скалярного произведения в $\mathcal{H}$, например, при замене скалярного произведения на $(h, g)_{\mathcal{H}_\Lambda} = (h, Vg)_{\mathcal{H}}$, где V – положительный ограниченный оператор в $\mathcal{H}$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2.1. *Формула (1.2.1) имеет место при замене скалярного произведения на $(h, g)_{\mathcal{H}_\Lambda} = (h, Vg)_{\mathcal{H}}$ для любых векторов φ, ψ из $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ таких, что $VA_{\pm}\varphi, VA_{\pm}\psi, V\nabla\varphi, V\nabla\psi$ принадлежат $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$.*

Учитывая, что при различных j и k множества $D_{j,k}$ не пересекаются и их объединение дает весь фоковский комплекс, суммируя (1.2.1) по j и k , получаем следующий результат.

ЛЕММА 1.2.2. *Для любых $\varphi, \psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ таких, что $A_{\pm}\varphi, \nabla\varphi, A_{\pm}\psi, \nabla\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$, имеет место формула интегрирования по частям:*

$$(\varphi, \nabla\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (\nabla\varphi, \psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} = (A_{-}\varphi, A_{-}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} - (A_{+}\varphi, A_{+}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}. \quad (1.2.3)$$

Если ψ и φ принадлежат $\mathcal{D}_0$ (т.е. удовлетворяют краевому условию (1.1.2)), то

$$\begin{aligned} (\varphi, \nabla\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (\nabla\varphi, \psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} &= (A_{+}\varphi, W^{*}L\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (W^{*}L\varphi, A_{+}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (L\varphi, L\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} \\ &= (A_{-}\varphi, L\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (L\varphi, A_{-}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} - (L\varphi, L\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Если же компоненты вектора φ непрерывны на границе (например, компоненты вектора φ выбираются из класса гладких финитных функций), то $A_{\pm}\varphi = A\varphi$ и

$$(\varphi, \nabla\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + (\nabla\varphi, \psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} = (A\varphi, (W - I)A_{+}\psi + L\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}. \quad (1.2.5)$$

С помощью формулы (1.2.4) нетрудно установить симметричность оператора C на области определения (1.1.2).

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Оператор C симметричен на $\mathcal{D}_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $G = -G^{*} + L^{*}L$, то из доказанной выше формулы (1.2.4) и полуторалийности скалярного произведения в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$ следует

$$\begin{aligned} (\varphi, C\psi) &= i(\varphi, (\nabla + G^{*} - L^{*}A_{-})\psi) \\ &= -i(\nabla\varphi, \psi) + i(\varphi, (G^{*} - L^{*}A_{-})\psi) + i(A_{-}\varphi, L\psi) + i(L\varphi, A_{-}\psi) - i(L\varphi, L\psi) \\ &= -i(\nabla\varphi, \psi) - i(\varphi, G\psi) + i(A_{-}\varphi, L\psi) = ((i\nabla + iG^{*} - iL^{*}A_{-})\varphi, \psi) = (C\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

1.3. *Сопряженный оператор C^* .* Теорема Наймарка [18] утверждает, что плотно определенный симметричный оператор C имеет замкнутое симметричное расширение C^{**} с областью определения $\mathcal{D}$, равной замыканию $\text{dom } C$ в норме графика. Такое расширение является самосопряженным, если индекс дефекта (m_-, m_+) оператора C является тривиальным. Напомним, что компоненты $m_{\pm}$ индекса дефекта равны числу линейно независимых решений уравнений

$$C^*\psi = \pm i\lambda\psi, \quad \psi \in \text{dom } C^*, \quad (1.3.1)$$

для какого-нибудь $\lambda > 0$. Если уравнение (1.3.1) со знаком “ $-$ ” не имеет решений, то однопараметрическая полугруппа $U_t = \exp\{it\hat{C}\}$ изометрична при $t > 0$, где $\hat{C} = C^{**}$ является замыканием C в норме графика. Если уравнение (1.3.1) со знаком “ $+$ ” не имеет решений, то однопараметрическая полугруппа U_t изометрична при $t < 0$.

Вычислим оператор, сопряженный оператору C , и докажем, что сужение C^* на $\mathcal{D}_0$ совпадает с C , а $\text{dom } C^*$ состоит из всех ψ , удовлетворяющих краевому условию (1.1.2) и таких, что $\|\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} + \|C\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} < \infty$. Для этого перепишем C в виде

$$C\psi = i(\nabla - G - L^*WA_+)\psi,$$

что можно сделать на $\mathcal{D}_0$ в силу краевого условия. Член $L^*WA_+\psi$ принадлежит $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, но не является непрерывной функцией (см. замечание 1.1.1). Поэтому он не может войти в регулярную часть сопряженного оператора, но должен учитываться в краевом условии для C^* . Операторы G и $i\nabla$ действуют в различных сомножителях тензорного произведения, причем $i\nabla$ действует в прямой сумме пространств $L_2(\Omega_n(\mathcal{K}_n))$, где $\Omega_n(\mathcal{K}_n)$ – открытая область *конечномерного* пространства. Поэтому по аналогии с [19] сопряженный оператор $i\nabla^*$ строится в подпространствах $L_2(\Omega_n(\mathcal{K}_n))$ с помощью формул интегрирования, что позволяет представить $(g, C\psi)$ в виде

$$(g, C\psi) \stackrel{\text{def}}{=} (C^*g, \psi) = (i\nabla g, \psi) - (iA_-g, A_-\psi) + (iA_+g, A_+\psi) + (ig, (G + L^*WA_-)\psi),$$

где $(A_-g, A_-\psi) = (A_-g, WA_-\psi) - (A_-g, L\psi) = (W^*A_-g, A_-\psi) - (L^*A_-g, \psi)$ и в силу замкнутости оператора L $(g, L^*WA_-\psi) = (W^*Lg, A_-\psi)$. Следовательно,

$$(C^*g, \psi) = (iW^*(A_- - WA_+ - L)g, A_+\psi) + ((i\nabla + iG^* - iL^*A_-)g, \psi). \quad (1.3.2)$$

Поскольку область определения сопряженного оператора должна быть такой, что скалярное произведение (C^*g, ψ) непрерывно по $\psi \in \mathcal{D}_0$ в топологии $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, а краевое значение $A_+\psi$ не является непрерывной функцией (замечание 1.1.1), то первое слагаемое в правой части (1.3.2) должно обратиться в нуль. Поэтому в силу унитарности W условие непрерывности первого слагаемого имеет вид $(A_- - WA_+ - L)g = 0$, что совпадает с (1.1.2). Подставляя это соотношение в последнее слагаемое в (1.3.2), получаем

$$(i\nabla + iG^* - iL^*A_-)g = (i\nabla - iG - iL^*WA_+)g = Cg \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S.$$

Таким образом, условие непрерывности второго слагаемого состоит в том, что $Cg \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$, т.е. на множестве $\mathcal{D}_0$ оператор C^* совпадает с C . Окончательно получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 1.3.1. *Сужение C^* на $\mathcal{D}_0$ совпадает с C , а его область определения состоит из векторов ψ таких, что $C\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ и $(A_- - WA_+ - L)\psi = 0$.*

2. Критерий самосопряженности. В этом разделе мы докажем, что краевая задача с неограниченными некоммутирующими коэффициентами

$$(\nabla + G^* - L^* A_-)\psi = -\lambda\psi, \quad \lambda > 0, \quad (A_+ - W^*(A_- - L))\psi = 0$$

имеет тривиальное решение в $\Omega_+^0, \Omega_+^1, \dots$ для всех фоковских камер с $0, 1, \dots$ горячими стенками. Аналогичное утверждение может быть доказано для задачи

$$(\nabla - G - L^* W A_+)\psi = \lambda\psi, \quad \lambda > 0, \quad (A_- - W^* A_+ - L)\psi = 0$$

на множествах в $\Omega_-^0, \Omega_-^1, \dots$, состоящих из фоковских камер с $0, 1, \dots$ холодными стенками. В силу граничного условия и определения оператора G левые части приведенных выше уравнений эквивалентны. Но прежде всего нам нужно обосновать применимость формул Стокса (1.2.1) для решений указанных уравнений, т.е. найти оператор $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что $VA_{\pm}\psi, V\nabla\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$.

2.1. Априорные оценки. Пусть для фиксированного $k > 0$ компоненты вектора ψ обращаются в нуль на множестве Ω_+^{k-1} и при $x \in \Omega_+^k$ удовлетворяют краевой задаче

$$(\nabla + G^* - L^* A_- + \mu I)\psi(x) = f(x), \quad \mu > 0, \quad A_+\psi(x) = 0. \quad (2.1.1)$$

Положительные и отрицательные координаты вектора x будем рассматривать отдельно:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} (q, p) \in \mathbb{R}^{j+k}, \quad q \in \mathbb{R}^j, \quad p \in \mathbb{R}^k, \quad q_1 < \dots < q_j < 0 < p_1 < \dots < p_k,$$

и без потери общности будем считать, что $q_j = \max q, p_1 = \min p$. В случаях $k = 0, j \neq 0$ и $j = 0, k \neq 0$ положим $\min p = \infty$ и $\max q = -\infty$ соответственно. Краевое условие (2.1.1) означает, что

$$\psi_n(x - \min p) = \psi_n(x_1 - \min p, \dots, x_n - \min p) = 0. \quad (2.1.2)$$

Предположим, что существует сильно непрерывная сжимающая полугруппа $W_t = e^{-Gt} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с генератором $-G \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, и пусть W_t^* – двойственная полугруппа с генератором $-G^* \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Используя тождество

$$\nabla \psi_n(x - t) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \psi_n(x_1 - t, \dots, x_n - t) = -\frac{\partial}{\partial t} \psi_n(x - t),$$

рассмотрим интегралы от правой и левой части уравнения (2.1.1):

$$\begin{aligned} \int_0^{\min p} e^{-(\mu+G^*)t} f(x-t) dt &= \int_0^{\min p} e^{-(\mu+G^*)t} \left(G^* + \mu - \frac{\partial}{\partial t} - L^* A_- \right) \psi(x-t) dt \\ &= - \int_0^{\min p} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (e^{-(\mu+G^*)t} \psi(x-t)) + e^{-(\mu+G^*)t} L^* A_- \psi(x-t) \right\} dt \\ &= \psi(x) - e^{-(\mu+G^*) \min p} \psi(x - \min p) - \int_0^{\min p} e^{-(\mu+G^*)t} L^* A_- \psi(x-t) dt \\ &= \psi(x) - \int_0^{\min p} e^{-\mu t} W_t^* L^* A_- \psi(x-t) dt \end{aligned}$$

в соответствии с краевым условием (2.1.2). Следовательно, краевая задача (2.1.1) эквивалентна линейному неоднородному интегральному уравнению

$$\psi(x) = \int_0^{\min p} e^{-\mu t} W_t^* \{L^* A_- \psi(x-t) + f(x-t)\} dt,$$

из которого следует *интегральное уравнение на границе* для вектора с компонентами $\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} A_- \psi_{n+1}(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(q, -0, p)$:

$$\varphi = S_\mu \varphi + \sigma_\mu f, \quad (2.1.3)$$

где $x = (q, p) \in \mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k$, $j+k=n$ и

$$\begin{aligned} (S_\mu \varphi)_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n+2} \int_0^{\min p} e^{-\mu t} W_t^* L^* \varphi_{n+1}(q-t, -t, p-t) dt, \\ (\sigma_\mu f)_n(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\min p} e^{-\mu t} W_t^* f_{n+1}(q-t, -t, p-t) dt, \end{aligned}$$

$\|\sigma_\mu f\| \leq \|f\|$, поскольку полугруппы W_t и W_t^* являются сжимающими. В случае $k=0$ (т.е. нет холодных стенок) $\min p = \infty$.

По определению сопряженного оператора имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_n, S_\mu \varphi_{n+1}) &= ((S_\mu^* \varphi)_{n+1}, \varphi_{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} \int_{\mathbb{R}_-^j} dq \int_{\mathbb{R}_+^{n-k}} dp \int_0^{\max q} dt e^{-\mu t} (LW_t \varphi_n(y+t), \varphi_{n+1}(y_-, -t, y_+)) \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(S_\mu^* \varphi)_{n+1}(y_-, -t, y_+) = \sqrt{n+2} \theta(t) \theta(-\max y_- - t) e^{-\mu t} LW_t \varphi_n(y+t),$$

где $\{\theta(t) = 0, \text{ если } t \leq 0 \text{ и } \theta(t) = 1, \text{ если } t > 0\}$. Оператор S_μ корректно определен на множестве финитных фоковских векторов с финитными компонентами из области определения оператора L^* , а оператор S_μ^* корректно определен на множестве финитных фоковских векторов с финитными компонентами из области определения оператора $\text{dom } G^N$, если существует $N \geq 1$ такое, что $\text{dom } G^N \subseteq \text{dom } L$. В дальнейшем это предположение считается выполненным.

Заметим, что в силу неравенства $2 \text{Re}(\varphi, \psi) \leq (\varphi, B\varphi) + (\psi, B^{-1}\psi)$ (для $B, B^{-1} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$) на $D_{j,k}$ выполнено

$$\begin{aligned} 2 \text{Re}(\varphi_n, S_\mu \varphi_{n+1})_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})} \\ = \sqrt{n+2} \int_{\mathbb{R}_-^j} dq \int_{\mathbb{R}_+^k} dp \int_0^{\min p} dt e^{-\mu t} 2 \text{Re}(LW_t \varphi_n(x), \varphi_{n+1}(x-t, -t)) \mathcal{H} \\ \leq B^{-1} I_1 + B I_2, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$I_1 = (n+2) \int_{\mathbb{R}_-^j} dq \int_{\mathbb{R}_+^k} dp \int_0^{\min p} dt e^{-2\mu t} \|LW_t \varphi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}_-^j} dq \int_{\mathbb{R}_+^k} dp \int_0^{\min p} dt e^{-2\mu t} \|\varphi_{n+1}(q-t, -t, p-t)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

где $x = (q, p) \in \mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k$ и $j = n - k$. Поскольку $(q-t)_i < -t$ и $(p-t)_l \geq 0$, то в силу симметрии функции φ_{n+1} интеграл I_2 имеет эквивалентную форму:

$$I_2 = j! \int_{S_-^j} dy \int_{y_j}^0 dy_{j+1} \int_{[-y_{j+1}, \infty)^k} dp \|\varphi_{n+1}(y_-, -y_{j+1}, p - y_{j+1})\|_{\mathcal{H}}^2,$$

где $S_-^j = \{y_1, \dots, y_j : y_1 < \dots < y_j < 0\}$. Следовательно, для симметричной функции φ_{n+1} имеем

$$I_2 = j! \int_{S_-^j} dy_- \int_{\mathbb{R}_+^k} dy_+ \|\varphi_{n+1}(y)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{j+1} \|\varphi_{n+1}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^{j+1} \oplus \mathbb{R}_+^k)}^2. \quad (2.1.5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|S_\mu^* \varphi_n\|_{L_2(\mathbb{R}_-^{j+1} \oplus \mathbb{R}_+^k)}^2 &= (n+2) \int_{\mathbb{R}_-^j} dy_- \int_{\mathbb{R}_+^k} dy_+ \int_0^{-\max y_-} dt e^{-2\mu t} \|LW_t \varphi_n(y+t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= (n+2) \int_0^\infty e^{-2\mu t} dt \int_{(-\infty, -t)^k} dy_- \int_{\mathbb{R}_+^k} dy_+ \|LW_t \varphi_n(y+t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= (n+2) \int_0^\infty e^{-2\mu t} dt \int_{\mathbb{R}_-^k} dq \int_{(t, \infty)^{n-k}} dp e^{-2\mu t} \|LW_t \varphi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= (n+2) \int_{\mathbb{R}_-^j} dq \int_{\mathbb{R}_+^k} dp \int_0^{\min p} dt e^{-2\mu t} \|LW_t \varphi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 = I_1. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Напомним, что $\Omega_+^k = \bigoplus_{j=0}^\infty D_{j,k}$, причем существует C_{j+k}^k $(j+k)$ -частичных камер с k холодными стенками. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))}^2 &= \sum_{j=0}^\infty C_{j+k}^k \|\varphi_{j+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2, \\ n_k &\stackrel{\text{def}}{=} \|(I - S_\mu)^* \varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))}^2 \\ &= \|\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 + \sum_{j=1}^\infty C_{j+k}^k \|\{(I - S_\mu)^* \varphi\}_{j+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 \\ &= \|\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 + \sum_{j=1}^\infty \{C_{j+k}^k \|\varphi_{j+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 \\ &\quad + C_{j-1+k}^k (\|S_\mu^* \varphi_{j-1+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 - 2 \operatorname{Re}(\varphi_{j+k}, S_\mu^* \varphi_{j-1+k})_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})})\}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (2.1.5) выполнена оценка

$$2 \operatorname{Re}(\varphi_{j+k}, S_\mu^* \varphi_{j-1+k}) \leq j^{-1} \|\varphi_{j+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 + \|S_\mu^* \varphi_{j-1+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2,$$

то оператор $(I - S_\mu)(I - S_\mu^*)$ на плотном множестве равномерно ограничен снизу:

$$n_k \geq \|\varphi_k\|_{L_2(\mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (C_{j+k}^k - j^{-1} C_{j-1+k}^k) \|\varphi_{j+k}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j \oplus \mathbb{R}_+^k, \mathcal{H})}^2 \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))}^2,$$

ибо при $k > 0, j > 0$ имеем $C_{j+k}^k - j^{-1} C_{j-1+k}^k = C_{j+k}^k (1 - 1/(j+k)) \geq C_{j+k}^k / 2$. Поэтому обратный оператор ограничен сверху:

$$(I - S_\mu^*)^{-1}(I - S_\mu)^{-1}|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))} \leq 2I, \quad \|(I - S_\mu)^{-1}\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))} \leq 2. \quad (2.1.7)$$

Рассмотрим случай $k = 0$. Предположим, что для некоторого $N \geq 1$ выполнено условие $\operatorname{dom} G^N \subseteq \operatorname{dom} L \subseteq \mathcal{H}$ и H симметричен на $\operatorname{dom} G^N$. Тогда оператор

$$Q_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-\mu t} W_t^* L^* L W_t dt \quad (2.1.8)$$

корректно определен с помощью билинейной формы $Q_\mu[h, g] = \int_0^\infty e^{-\mu t} (L h_t, L g_t)_{\mathcal{H}} dt$, $h_t = W_t h$, $g_t = W_t g$, и ограничен $0 \leq Q_\mu \leq I$ [20], [21]. Поскольку в случае $k = 0$ в формуле (2.1.6) следует положить $\min p = \infty$, то

$$0 \leq \|S_\mu^* \varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^{j+1}, \mathcal{H})}^2 = (j+2)(\varphi_j, Q_\mu \varphi_j)_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})} \leq (j+2) \|\varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2.$$

Согласно определению Ω_+^0 имеем

$$\begin{aligned} n_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \|(I - S_\mu)^* \varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))}^2 \\ &= \|\varphi_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (\|\varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2 + \|S_\mu^* \varphi_{j-1}\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2 - 2 \operatorname{Re}(\varphi_j, S_\mu^* \varphi_{j-1})_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}). \end{aligned}$$

Используя неравенство (2.1.4) и тождество (2.1.5), получим

$$\begin{aligned} n_0 &\geq \|\varphi_0\|_{\mathcal{H}}^2 + (1 - B_1) \|S_\mu^* \varphi_0\|_{L_2(\mathbb{R}_-, \mathcal{H})}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} ((1 - (j B_j)^{-1}) \|\varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2 + (1 - B_{j+1}) \|S_\mu^* \varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^{j+1}, \mathcal{H})}^2) \\ &= \|\varphi_0\|_{\mathcal{H}}^2 + 2(1 - B_1) \|Q_\mu^{1/2} \varphi_0\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} ((1 - (j B_j)^{-1}) \|\varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2 + (j+2)(1 - B_{j+1}) \|Q_\mu^{1/2} \varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2) \end{aligned}$$

для любых положительных B_j . Выбирая $B_1 \in (1, 3/2)$, $B_j \in (0, 1]$ и $jB_j > 1$ при $j > 1$, мы видим, что существует постоянная $c \in (0, 1)$ такая, что

$$n_0 \geq (1 - 2(B_1 - 1))\|\varphi_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{j=1}^{\infty} (1 - (jB_j)^{-1})\|\varphi_j\|_{L_2(\mathbb{R}_-^j, \mathcal{H})}^2 \geq c\|\varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))}^2.$$

Таким образом, на плотной области определения оператора S_{μ}^* выполнена оценка

$$\|(I - S_{\mu})^* \varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))}^2 \geq c\|\varphi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))}^2,$$

из которой следует оценка нормы обратного оператора

$$(I - S_{\mu}^*)^{-1}(I - S_{\mu})^{-1}|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))} \leq c^{-1}I, \quad \|(I - S_{\mu})^{-1}\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))} \leq c^{-1/2}. \quad (2.1.9)$$

Из оценок (2.1.7), (2.1.9) вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1.1. *Предположим, что оператор $-G$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы W_t в $\mathcal{H}$. Если существует $N \geq 1$ такое, что $\text{dom } G^N \subseteq \text{dom } L \subseteq \mathcal{H}$, оператор H симметричен на $\text{dom } G^N$ и ψ является симметричным решением краевой задачи*

$$(\nabla + G^* + \mu - L^*A_-)\psi = f, \quad A_+\psi = 0$$

на Ω_+^k , то существует постоянная $\gamma < \infty$ такая, что для нормы $\varphi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k)) \subset \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ имеет место априорная оценка

$$\|\varphi\| = \|A_-\psi\| = \|(I - S_{\mu})^{-1}\sigma_{\mu}f\| \leq \gamma\|f\|.$$

Кроме того, если $\Lambda^{-1}G^*$, $\Lambda^{-1}L^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то

$$\|\Lambda^{-1}\nabla\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))} \leq \|\Lambda^{-1}(G^* + \mu I)\|_{\mathcal{H}}\|\psi\| + (\gamma\|\Lambda^{-1}L^*\|_{\mathcal{H}} + \|\Lambda^{-1}\|_{\mathcal{H}})\|f\|. \quad (2.1.11)$$

Аналогичное утверждение имеет место для фоковских векторов с носителем на Ω_-^k , $k \geq 0$.

ЛЕММА 2.1.2. *Предположим, что оператор $-G^*$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы W_t^* в $\mathcal{H}$. Если $\exists N \geq 1$ такое, что $\text{dom}(G^*)^N \subseteq \text{dom } L \subseteq \mathcal{H}$, оператор H симметричен на $\text{dom}(G^*)^N$ и ψ является симметричным решением краевой задачи*

$$(\nabla - G - \mu - L^*WA_+)\psi = f, \quad A_-\psi = 0$$

на Ω_-^k , то существует постоянная γ такая, что для нормы $\varphi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_-^k)) \subset \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ имеет место априорная оценка

$$\|\varphi\| = \|A_+\psi\| = \|(I - \tilde{S}_{\mu})^{-1}\tilde{\sigma}_{\mu}f\| \leq \gamma\|f\|,$$

и, кроме того, если $\Lambda^{-1}G$ и $\Lambda^{-1}L^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то

$$\|\Lambda^{-1}\nabla\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_-^k))} \leq \|\Lambda^{-1}(G + \mu I)\|_{\mathcal{H}}\|\psi\| + (\gamma\|\Lambda^{-1}L^*\|_{\mathcal{H}} + \|\Lambda^{-1}\|_{\mathcal{H}})\|f\|. \quad (2.1.10)$$

Леммы 2.1.1 и 2.1.2 описывают условия, при которых

$$\psi \in W_2^1(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi: \|\psi\|_{W_2^1(\Lambda)}^2 = \|\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 + \|\Lambda^{-1}\nabla\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 < \infty\},$$

что позволяет применить формулу Стокса к решениям уравнений (2.1.1).

2.2. *Достаточные условия самосопряженности.* Оператору C сопоставим два генератора Линдблада:

$$\mathcal{L}(B) \stackrel{\text{def}}{=} L^*BL - G^*B - BG, \quad (2.2.1)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(B) \stackrel{\text{def}}{=} L^*WBW^*L - GB - BG^*, \quad (2.2.2)$$

где $G = iH + L^*L/2$. Операторы (2.2.1) и (2.2.2) используются для доказательства отсутствия решений для задач (2.1.1) со знаками “−” и “+” соответственно. Положительному самосопряженному оператору $\Lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ сопоставим

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{-1}G^*, \quad \ell \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{1/2}L\Lambda^{-1}.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ А. Мы предполагаем, что выполнены условия леммы 2.1.1, операторы g и ℓ ограничены в $\mathcal{H}$ и

$$\mathfrak{C} \stackrel{\text{def}}{=} \ell^*\ell - (g^* + g) \leq c\Lambda^{-1}, \quad (2.2.3)$$

т.е. $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условию $\text{Tr}\{\mathfrak{C}\sigma\} \leq c\text{Tr}\{\sigma\Lambda^{-1}\}$ для любого $\sigma \in \mathcal{T}_+(\mathcal{H})$. В многомерном случае $\ell = \{\ell_j\}$ и $\ell^*\ell = \sum \ell_j^*\ell_j$.

Неравенство (2.2.3) является усиленной формой известного достаточного условия консервативности (унитальности) минимального решения уравнения марковской эволюции (уравнения Линдблада) с генератором $\mathcal{L}(\cdot)$ [20], [21]; оно может быть формально записано следующим образом: $\mathcal{L}(\Lambda) \leq c\Lambda$. Связь между свойствами изометричности и унитарности решений квантовых стохастических уравнений и консервативностью решений уравнения Линдблада рассматривалась в [14], [15] и [22].

ЛЕММА 2.2.1. Если предположение А выполнено, то

1. *краевая задача*

$$(\nabla + G^* - L^*A_-)\psi = -\lambda\psi, \quad \lambda > 0, \quad A_+\psi = W^*(A_- - L)\psi \quad (2.2.4)$$

не имеет решений в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, т.е. индекс дефекта оператора C имеет вид $(0, t_+)$;

2. *полугруппа* $U_t = e^{i\hat{C}t}$, $t \geq 0$, $\hat{C} = C^{**}$, *изометрична* в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$;

3. *минимальное решение уравнения Линдблада с генератором $\mathcal{L}(\cdot)$ консервативно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что решение уравнения (2.2.4) равно нулю на Ω_+^0 . Предположим, что $\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$ удовлетворяет уравнению (2.2.4) в Ω_+^0 и рассмотрим оценку мнимой части $(\psi_n(x), \Lambda^{-1}(C\psi)_n(x))_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(\psi_n(x), \Lambda^{-1}(C\psi)_n(x)) &= \text{Re}(\psi_n(x), \Lambda^{-1}\nabla\psi_n(x)) + \text{Re}(\psi_n(x), \Lambda^{-1}G^*\psi_n(x)) \\ &\quad - \text{Re}(L\Lambda^{-1}\psi_n(x), A_-\psi_{n+1}(x)), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где $\text{Re}(\psi_n, \Lambda^{-1}G^*\psi_n) = (\psi_n, (g^* + g)\psi_n)$. Поскольку оператор Λ коммутирует с ∇ и граничное значение $A_-\psi$ решения уравнения $(\nabla + G^* - L^*A_-)\psi = -\lambda\psi$ в силу леммы 2.1.1

принадлежит $\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))$, то в силу оценки (2.1.9) $\Lambda^{-1}L^*A_-\psi$, $\Lambda^{-1}\nabla\psi \in \Gamma_{\mathcal{H}}^S$, и поэтому можно применить теорему 1.2.1 для $V = \Lambda^{-1}$ и формулу Стокса (1.2.1) для камер из $D_{n,0} = \mathbb{R}_-^n$:

$$2 \operatorname{Re} \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \Lambda^{-1}\nabla\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x = \int_{D_{n-1,0}} \|\Lambda^{-1/2}A_-\psi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d^{n-1}x, \quad (2.2.6)$$

поскольку ни одна камера из $D_{n,0}$ не имеет холодных стенок. С другой стороны, в силу неравенства $a^*b + b^*a \leq a^*a + b^*b$ имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}(L\Lambda^{-1}\psi_n(x), A_-\psi_{n+1}(x))_{\mathcal{H}} &\leq \|\Lambda^{1/2}L\Lambda^{-1}\psi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\Lambda^{-1/2}A_-\psi_{n+1}(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|\ell\psi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\Lambda^{-1/2}A_-\psi_{n+1}(x)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Подставляя (2.2.6) и (2.2.7) в (2.2.5), имеем

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{Im} \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \Lambda^{-1}C\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x &\leq \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), (\ell^*\ell - g^* - g)\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x \\ &+ \int_{D_{n,0}} \|\Lambda^{-1/2}A_-\psi_{n+1}(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d^n x - \int_{D_{n-1,0}} \|\Lambda^{-1/2}A_-\psi_n(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d^{n-1}x. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по n , мы получаем следующую априорную оценку:

$$-2 \sum_n \operatorname{Im} \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \Lambda^{-1}C\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x \leq \sum_n \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \mathfrak{C}\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x.$$

Следовательно,

$$-2 \sum_n \operatorname{Im} \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \Lambda^{-1}C\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^n x \leq c \operatorname{Tr} \sigma, \quad (2.2.8)$$

где $\sigma = \sum_n \int_{D_{n,0}} |\psi_n(x)| \langle \psi_n(x) | dx \in \mathcal{T}_+(\mathcal{H})$. Заметим, что постоянная c в (2.2.3) фиксирована, а параметр $\lambda \in \mathbb{R}_+$ в уравнении (2.2.4) может быть выбран произвольно. Если вектор ψ является решением уравнения (2.2.4) с $\lambda > c/2$, то возникает противоречие между оценкой (2.2.8) и предположением (2.2.3), поскольку

$$\begin{aligned} -2 \sum_n \operatorname{Im} \int_{D_{n,0}} (\psi_n(x), \Lambda^{-1}C\psi_n(x))_{\mathcal{H}} dx &= 2\lambda(\psi, \Lambda^{-1}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))} \\ &\leq c(\psi, \Lambda^{-1}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^0))}, \end{aligned}$$

где $\bigoplus_n D_{n,0} = \Omega_+^0$. Следовательно, мы доказали, что $\psi_n(x) = 0$ на Ω_+^0 . Согласно краевому условию (1.1.2) отсюда следует, что $A_+\psi_n(x) = 0$ во всех камерах $D_{n,1}$. Поэтому вклад от холодных стенок камер из $D_{n,1}$ в правую часть формулы Стокса (1.2.1) равен нулю. Из леммы 2.1.1 следует оценка граничного значения, обосновывающая применение формулы Стокса. Следовательно, $\psi_n(x) = 0$ на Ω_+^1 . Аналогичные рассуждения можно повторить по индукции для $\Omega_+^k = \bigoplus_{j \geq 0} D_{j,k}$ и доказать, что

$$-2 \sum_j \operatorname{Im} \int_{D_{j,k}} (\Lambda^{-1}\psi_n(x), C\psi_n(x))_{\mathcal{H}} d^{n+1}x = 2\lambda(\psi, \Lambda^{-1}\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S(L_2(\Omega_+^k))}$$

для $j = 1, 2, \dots, n = j + k$. Это ведет к противоречию с априорной оценкой (2.2.3), что и доказывает отсутствие решений уравнения (2.2.4).

2. Утверждение 2 является следствием утверждения 1 и теоремы 9.1.2 из [21], утверждающей, что если оператор $-iD$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $U_t = \exp\{-itD\}$, $t \geq 0$, в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (т.е. D плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию $\|(D + i\lambda I)^{-1}\|_{\mathfrak{H}} \leq \lambda^{-1}$), то полугруппа U_t изометрична тогда и только тогда, когда уравнение $D^*\psi = -i\psi$ не имеет решений в $\mathfrak{H}$ (см. [21]). В данном случае операторы C и C^{**} плотно определены и имеют один и тот же сопряженный C^* [18]. Кроме того, на области определения $\mathcal{D}_0$ симметричного оператора C выполнено неравенство

$$((C + i\lambda I)\psi, (C + i\lambda I)\psi)_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} = \|C\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 + \lambda^2 \|\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 \geq \lambda^2 \|\psi\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S}^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_0,$$

которое по непрерывности распространяется на замыкание оператора C в норме графика. Поэтому оно верно для C^{**} и из него следует, что $\|(C^{**} + i\lambda I)^{-1}\|_{\Gamma_{\mathcal{H}}^S} \leq \lambda^{-1}$. Поскольку уравнение (2.2.4) не имеет решений, отсюда следует, что $-iC^{**}$ — генератор полугруппы изометрий.

3. Как следует из [20], [21], минимальное решение уравнения Линдблада с генератором (2.2.1) существует, если выполнены следующие условия:

- (1) Оператор $-G$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы W_t , действующей в $\mathcal{H}$;
- (2) существует целое $N \geq 1$ такое, что $\text{dom } G^N \subseteq \text{dom } L$ и оператор H симметричен на $\text{dom } G^N$.

Если, кроме того, существует самосопряженный оператор $\Lambda \geq L^*L$ такой, что

- (3) $\text{dom } G^N \subseteq \text{dom } \Lambda^{1/2}L$ при некотором $N \geq 1$ и
- (4) $\|\Lambda^{1/2}L\psi\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\text{Re}(\Lambda\psi, G\psi)_{\mathcal{H}} \leq c\|\Lambda^{1/2}\psi\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \psi \in \text{dom } G^N$,

то минимальное решение единственно в классе консервативных (унитальных) решений. Последнее неравенство является слабой формой условия $\mathcal{L}(\Lambda) \leq c\Lambda$. Минимальность решения $P_t(\cdot)$ понимается в том смысле, что для любого другого решения $\tilde{P}_t(\cdot)$ разность $\tilde{P}_t(B) - P_t(B)$ положительна для любого $B \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.

Нетрудно видеть, что неравенство (2.2.3) можно записать как неравенство (4) на более широком множестве $\text{dom } \Lambda$. Поэтому предположение (2.2.3) сильнее предположения (4). Таким образом, из условий леммы следуют условия (1)–(4), обеспечивающие существование и консервативность минимального решения уравнения Линдблада.

Рассмотрим теорему об отсутствии решений задачи (1.3.1) в случае “+”. Пусть для некоторого положительного самосопряженного оператора $\Lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, который может отличаться от оператора Λ , использованного в предыдущей теореме, выполнено следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $\mathbb{B}$. Предположим, что выполнены условия леммы 2.1.2. Операторы $\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{-1}G$ и $\tilde{\ell} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda^{1/2}W^*L\Lambda^{-1}$ ограничены в $\mathcal{H}$ и

$$\tilde{\mathcal{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\ell}^*\tilde{\ell} - (\tilde{g}^* + \tilde{g}) \leq c\Lambda^{-1}.$$

ЛЕММА 2.2.2. Если предположение $\mathbb{B}$ выполнено, то

1. уравнение $(\nabla - G - L^*WA_+)\psi = \lambda\psi$, $\lambda > 0$, с граничным условием $A_-\psi = WA_+\psi + L\psi$ не имеет решений в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$, т.е. индекс дефекта оператора C имеет вид $(m_-, 0)$;
2. полугруппа $U_t = e^{i\hat{C}t}$, $t \leq 0$, $\hat{C} = C^{**}$, изометрична в $\Gamma_{\mathcal{H}}^S$;
3. минимальное решение уравнения Линдблада с генератором $\tilde{\mathcal{L}}(\cdot)$ консервативно.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

3. Квантовое стохастическое уравнение, связанное с самосопряженной краевой задачей. Пусть $\hat{C}$ – генератор (сжимающей) полугруппы, соответствующий симметричному оператору C . Если индекс дефекта оператора C тривиален, то такой генератор определен однозначно. Покажем, что семейство операторов

$$u_t = e^{-t\nabla} e^{-it\hat{C}}$$

удовлетворяет неупреждающему квантовому стохастическому уравнению

$$du_t = ((W - I)\Lambda(dt_+) + LA^\dagger(dt_+) - L^*WA(dt_+) - Gdt)u_t, \quad u_0 = I, \quad (3.1.1)$$

с унитарным оператором W и замкнутыми операторами L и $G = iH + \frac{1}{2}L^*L$, $H = H^*$, действующими в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и “фундаментальными” операторозначными процессами рождения, уничтожения и числа частиц

$$A(0, t)^\dagger = \int_0^t a^\dagger(s) ds, \quad A(0, t) = \int_0^t a(s) ds, \quad \Lambda(0, t) = \int_0^t a^\dagger(s)a(s) ds, \quad (3.1.2)$$

действующими в Γ^S , где $a^\dagger(t)$ и $a(t)$ – операторные плотности процессов рождения и уничтожения, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям. В слабой дифференциальной форме операторы (3.1.2) и уравнение (3.1.1) записываются в виде

$$\begin{aligned} (\psi(f), A^\dagger(dt_+)\phi) &= \overline{f(t_+)}(\psi(f), \phi) dt, \quad (\phi, A(dt_+)\psi(h)) = h(t_+)(\phi, \psi(h)) dt, \\ (\psi(f), \Lambda(dt_+)\psi(h)) &= \overline{f(t_+)}h(t_+)(\psi(f), \psi(h)) dt, \\ (\psi(f)h, du_t\psi) &= \{\overline{f(t_+)}(\psi(f)h, ((W - I)a(t_+) + L)u_t\psi) \\ &\quad - (\psi(f)h, Gu_t\psi) - (\psi(f_t)h, L^*Wa(t_+)u_t\psi)\} dt. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Пусть $f \in W_2^1(\mathbb{R})$, $f_t(x) = f(x + t)$, $h \in \text{dom } \Lambda$ и $\psi \in \text{dom } \hat{C}$, $\psi_t = e^{-it\hat{C}}\psi$. Рассмотрим производную скалярного произведения

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi(f)h, e^{-t\nabla} e^{-it\hat{C}}\psi) = i \frac{\partial}{\partial t} (\psi(f_t)h, \psi_t).$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial t}\psi(f_t) = \nabla\psi(f_t)$ и $A_{\pm}\psi(f_t) = f(t)\psi(f_t)$ для тестовой функции $\psi(f)$, то применяя формулу интегрирования по частям (1.2.5), получим

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}(\psi(f_t)h, \psi_t) &= i(\nabla\psi(f_t)h, \psi_t) + (\psi(f_t)h, C\psi_t) \\ &= -i(\psi(f_t)h, \nabla\psi_t) + (\psi(f_t)h, C\psi_t) + if(t)(\psi(f_t)h, (A_- - A_+)\psi_t) \\ &= if(t)(\psi(f_t)h, ((W - I)A_+ + L)\psi_t) \\ &\quad - i(\psi(f_t)h, L^*WA_+\psi_t) - i(\psi(f_t)h, G\psi_t) \\ &= if(t)(\psi(f)h, ((W - I)e^{-\nabla t}A_+e^{\nabla t} + L)u_t\psi) \\ &\quad - i(\psi(f)h, L^*We^{-\nabla t}A_+e^{\nabla t}u_t\psi) - i(\psi(f)h, Gu_t\psi), \end{aligned}$$

что совпадает со слабой формой уравнения (3.1.1), поскольку

$$e^{-\nabla t}A_+e^{\nabla t}\psi(g) = g(t_+)\psi(g) = a(t_+)\psi(g).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1.1. *Квантовое стохастическое дифференциальное уравнение унитарно эквивалентно задаче Коши для оператора (1.1.1), (1.1.2).*

Этот факт позволяет нам назвать *индексом* квантового стохастического дифференциального уравнения *индекс дефекта* связанной и ним симметричной краевой задачи. Простейшие примеры задач с нетривиальным индексом дефекта рассмотрены в [21].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Accardi L., Frigerio A., Lu Y. G. The weak coupling limit as a quantum functional central limit // Comm. Math. Phys. 1990. V. 131. P. 537–570.
- [2] Accardi L., Gough J., Lu Y. G. On the stochastic limit for quantum theory // Reports on Math. Phys. 1995. V. 36. № 2–3. P. 155–187.
- [3] Belavkin V. P. A quantum nonadapted Ito formula and stochastic analysis in Fock space // J. Funct. Anal. 1991. V. 102. № 2. P. 414–447.
- [4] Accardi L., Gough J., Lu Y. G. Quantum stochastic linearization of multilinear interactions // Open Systems & Information Dynamics. 1998. V. 5. P. 41–65.
- [5] Chebotarev A. M., Victorov D. V. Quantum stochastic processes arising from the strong resolvent limits for the Schrödinger evolution in Fock space // Banach Center Publications. V. 43 (Quantum probability). Warsaw., 1998. P. 119–133.
- [6] Accardi L., Lu Y. G., Volovich I. V. Quantum Theory and its Stochastic Limit. Texts and Monographs in Physics: Springer, 2001.
- [7] Hudson R. L., Parthasarathy K. R. Quantum Ito's formula and stochastic evolution // Comm. Math. Phys. 1984. V. 93. № 3.
- [8] Meyer P. A. Quantum Probability for Probabilists. Lecture Notes in Math. V. 1338, 1993.
- [9] Attal S. Classical and quantum stochastic calculus // Quantum Probability Comm. 1998. V. X. P. 1–52.
- [10] Journe J. L. Structure des cocycles Markoviens sur l'espace de Fock // Probab. Theor. and Related Fields. 1987. V. 75. P. 291–316.
- [11] Parthasarathy K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel: Birkhauser, 1992.
- [12] Чеботарев А. М. Квантовое стохастическое уравнение унитарно эквивалентно симметричной краевой задаче для уравнения Шрёдингера // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 612–622.

- [13] Chebotarev A. M. Quantumstochastic differential equation is unitarily equivalent to a symmetric boundary value problem in Fock space // *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Related Topics*. 1998. V. 1. № 2. P. 175–199.
- [14] Chebotarev A. M. Minimal solutions in classical and quantum probability // *Quantum Probability and Related Topics*. V. VII. Singapore: World Sci. Publ., 1992. P. 79–92.
- [15] Fagnola F. Characterization of isometric and unitary weakly differentiable cocycles in Fock space // *Quantum Probability and Related Topics: QP-PQ*. V. VIII. River Edge, N.J.: World Sci. Publ., 1993. P. 143–163.
- [16] Gregoratti M. The Hamiltonian operator associated to some quantum stochastic evolutions // *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Related Topics*. 2000. V. 3. № 4. P. 483–503.
- [17] Gregoratti M. The Hamiltonian Operator Associated to Some Quantum Stochastic Evolutions. Preprint no. 455/P: Politecnico di Milano, 2001.
- [18] Neimark M. A. *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka, 1969.
- [19] Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*: Springer, 1976.
- [20] Chebotarev A. M., Fagnola F. Sufficient conditions for conservativity of minimal quantum dynamical semigroups // *J. Funct. Anal.* 1998. V. 153. № 2. P. 382–404.
- [21] Chebotarev A. M. *Lectures on Quantum Probability*. Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas. V. 14. México, 2000.
- [22] Chebotarev A. M., Fagnola F., Frigerio A. Towards a stochastic Stone's theorem // *Stochastic Partial Differential Equations and Applications*. V. 268: Longman Sci. & Techn. Pitman Research Notes in Math., 1992. P. 86–97.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex@cheb.phys.msu.su

Поступило
 16.11.1999