Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бикчентаев, О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 342–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:18:42

УДК 517.986+517.987

О МИНИМАЛЬНОСТИ ТОПОЛОГИИ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Доказана непрерывность естественного вложения метрического идеального пространства на конечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ в $*$ -алгебру измеримых операторов $\widetilde{\mathcal{M}}$ с топологией сходимости по мере. С помощью этого факта установлено, что топология сходимости по мере является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Библиография: 17 названий.

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, $L^0(\mu)$ – алгебра всех μ -измеримых функций на Ω , снабженная топологией сходимости по мере. Непрерывность естественного вложения классических функциональных пространств в $L^0(\mu)$ играет важнейшую роль как в теории банаховых идеальных пространств, так и в теории интерполяции линейных операторов в этих пространствах. Бурное развитие теории некоммутативного интегрирования (см., например, [1]) привело к интенсивному изучению соответствующих аналогов идеальных функциональных пространств. В этой работе идеальные пространства измеримых операторов служат не только объектом исследования, но и выступают как инструмент (см. также [2]). Мы доказываем непрерывность естественного вложения метрических идеальных пространств на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным конечным следом в $*$ -алгебру $\widetilde{\mathcal{M}}$ измеримых операторов, снабженную топологией сходимости по мере. Любопытно, что этот факт позволяет получить основной результат заметки: топология сходимости по мере является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$. Метод доказательства является новым даже для алгебры случайных величин $L^0(\mu)$.

1. Обозначения, определения и предварительные сведения. Пусть G – коммутативная метризуемая топологическая группа в аддитивной записи, т.е. отображение $(x, y) \mapsto x - y$ декартова произведения $G \times G$ на G непрерывно. Метрика ρ на группе G называется *инвариантной*, если $\rho(a + x, a + y) = \rho(x, y)$ для всех $a, x, y \in G$. Положив $a = -y$, имеем эквивалентное условие $\rho(x - y, 0) = \rho(x, y)$ для всех $x, y \in G$ (поскольку $\rho(a + x, a + y) = \rho((a + x) - (a + y), 0) = \rho(x - y, 0) = \rho(x, y)$). Нам понадобится частный случай теоремы Какутани [3]: *T_0 -группа метризуема тогда и только тогда, когда*

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00129, и научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования”, грант № УР.04.01.061.

она имеет счетную открытую базу в 0, причем метрика может быть выбрана инвариантной.

Множество $X \subset G$ называется *ограниченным*, если для каждой окрестности нуля U найдется такое натуральное число n , что

$$X \subset \underbrace{U + \dots + U}_{n \text{ раз}}.$$

Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов в гильбертовом пространстве через $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ будем обозначать ее подмножество проекторов; e — единица алгебры $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ — единичный шар в C^* -норме $\|\cdot\|$ на $\mathcal{M}$. Пусть τ — точный нормальный конечный след на $\mathcal{M}$.

Множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ всех замкнутых плотно определенных присоединенных к $\mathcal{M}$ операторов замкнуто относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций. В $*$ -алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$ вводится топология t_τ сходимости по мере [4], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon, \delta} = \{x \in \widetilde{\mathcal{M}} : \|xq\| \leq \varepsilon, \tau(e - q) \leq \delta \text{ для некоторого } q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Известно, что $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$ -алгеброй, причем $\mathcal{M}$ плотно в $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$.

Напомним [5], что подпространство $E \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ с инвариантной метрикой ρ называется *метрическим идеальным пространством* (далее МИП) на $\mathcal{M}$, если

- 1) $x \in E \implies x^* \in E$ и $\rho(x, 0) = \rho(x^*, 0)$;
- 2) $x \in \widetilde{\mathcal{M}}, y \in E$ и $|x| \leq |y| \implies x \in E$ и $\rho(x, 0) \leq \rho(y, 0)$,

где $|z| = \sqrt{z^*z}$ для $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Среди МИП хорошо изучены некоммутативные L^p -пространства Лебега ($0 < p < \infty$) (см. [2], [6]), пространства Орлича [7], пространства Лоренца и пространства Марцинкевича [8], [9]. Для этих МИП непрерывность естественного вложения в $(\widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau)$ была установлена с использованием специальных свойств соответствующих метрик. В [10] исследованы выпуклые t_τ -ограниченные подмножества $\widetilde{\mathcal{M}}$ и изучены свойства оператора естественного вложения банаховых идеальных пространств на $\mathcal{M}$. Метрика

$$\rho_\tau(x, y) = \inf_{q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}} \max\{\|(x - y)q\|, \tau(e - q)\}, \quad x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}, \quad (1)$$

задает в $\widetilde{\mathcal{M}}$ структуру МИП с топологией сходимости по мере.

Напомним [11, с. 290], что $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $p \sim q$), если существует такой оператор $u \in \mathcal{M}$, что $p = u^*u$ и $q = uu^*$; запись $p \lesssim q$ означает, что $p \sim r$ для некоторого $r \leq q$, $r \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Через $s(x)$ будем обозначать левый носитель оператора $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

2. Основные результаты. Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Для любой последовательности $\{p_n\} \subset \mathcal{M}^{\text{pr}}$ существует такая попарно ортогональная последовательность $\{r_n\} \subset \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $r_n \lesssim p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigvee_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Методом математической индукции установим утверждение для конечных наборов проекторов. Для набора из двух проекторов $\{p, q\}$ положим $r_1 = p$. Тогда $r_2 = p \vee q - p \sim q - p \wedge q \leq q$, т.е. набор $\{r_1, r_2\}$ – искомый. Пусть утверждение леммы верно для набора $\{p_1, \dots, p_k\}$, т.е. $\bigvee_{n=1}^k p_n = \sum_{n=1}^k r_n$, $r_n \lesssim p_n$, $r_n r_i = 0$ ($n \neq i$), $i, n \in \{1, \dots, k\}$. Для набора $\{p_1, \dots, p_{k+1}\}$ положим $q = \bigvee_{n=1}^k p_n$; тогда

$$\bigvee_{n=1}^{k+1} p_n = \left(\bigvee_{n=1}^k p_n - q \right) + q = r_{k+1} + \sum_{n=1}^k r_n = \sum_{n=1}^{k+1} r_n.$$

Имеем

$$\text{а) } r_{k+1} q = 0 \implies r_{k+1} r_n = 0, \quad n \in \{1, \dots, k\};$$

$$\text{б) } r_{k+1} = \bigvee_{n=1}^{k+1} p_n - q = p_{k+1} \vee q - q \sim p_{k+1} - p_{k+1} \wedge q \leq p_{k+1},$$

т.е. набор $\{r_1, \dots, r_{k+1}\}$ искомый. Применив теорему Вижье, имеем

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigvee_{n=1}^k p_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k r_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n,$$

где пределы понимаются в смысле сильной операторной топологии. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $\langle E, \rho \rangle$ – МИП на $\mathcal{M}$. Если $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $x^* x \in E$, то $xx^* \in E$ и $\rho(x^* x, 0) = \rho(xx^*, 0)$. В частности, если $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $p \lesssim q$ и $q \in E$, то $p \in E$ и $\rho(p, 0) \leq \rho(q, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in E$ и $u, v \in \mathcal{M}_1$. Тогда $|uz|^2 = z^* u^* u z \leq z^* z = |z|^2$, и в силу операторной монотонности функции $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ ($0 \leq \lambda < \infty$) имеем $|uz| \leq |z|$. По свойству 2) МИП оператор $uz \in E$ и $\rho(uz, 0) \leq \rho(z, 0)$. По свойству 1) МИП, переходя к сопряженным операторам, аналогично получаем $zv \in E$ и $\rho(zv, 0) \leq \rho(z, 0)$. Если $x = u|x|$, $x^* = v|x^*|$ – полярные разложения операторов $x, x^* \in \widetilde{\mathcal{M}}$, то $xx^* = u|x|^2 u^* = u x^* x u^*$, $x^* x = v|x^*|^2 v^* = v x x^* v^*$. Остальное теперь очевидно.

ЛЕММА 3. Пусть $\langle E, \rho \rangle$ – МИП на $\mathcal{M}$ и $\{x_n\} \subset E$. Тогда

$$\rho(x_n, 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \iff \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (\rho(\lambda x_n, 0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и k – целая часть числа $|\lambda| + 1$. Применяя свойство 2) МИП, неравенство треугольника и метод математической индукции, имеем оценку

$$\rho(\lambda x_n, 0) \leq \rho(k x_n, 0) \leq k \rho(x_n, 0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следующее некоммутативное обобщение теоремы П. Щептыцкого [12] фактически было установлено в [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ и $\langle E, \rho \rangle$ – МИП на $\mathcal{M}$. Тогда

- I) если $x_n, x \in E$ и $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, то $x_n \rightarrow x$ по мере;
- II) если $\{x_n\}$ – последовательность Коши в $\langle E, \rho \rangle$, то существует $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, для которого $x_n \rightarrow x$ по мере;
- III) если $X \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ ограничено в $\langle E, \rho \rangle$, то оно ограничено в $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_\tau \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Будем считать $x = 0$ и для определенной по формуле (1) метрики ρ_τ воспользуемся ее новым выражением из [6, с. 94]:

$$\rho_\tau(z, 0) = \inf_{\lambda > 0} \max\{\lambda, \tau(e_{(\lambda, \infty)}(|z|))\}, \quad z \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Здесь $e_{(\lambda, \infty)}(|z|)$ – спектральный проектор оператора $|z|$, соответствующий интервалу (λ, ∞) . Если утверждение не верно, то существует такая последовательность операторов $\{x_n\} \subset E$ и число $\delta > 0$, что $\rho(x_n, 0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $\rho_\tau(x_n, 0) \geq \delta$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Используя лемму 3 и переходя при необходимости к подпоследовательности, считаем $\{x_n\} \subset E$ и число $\lambda > 0$ такими, что $\rho(\lambda^{-1}x_n, 0) < 2^{-n}$ и для $p_n = e_{(\lambda, \infty)}(|x_n|)$ выполнено неравенство $\tau(p_n) \geq 2\lambda$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $q_n = \bigvee_{k \geq n} p_k$; тогда $q_n \searrow$ и $\tau(q_n) \geq 2\lambda$. Для $q = \bigwedge_{n \geq 1} q_n$ в силу нормальности следа τ имеем $\inf_{n \geq 1} \tau(q_n) \geq 2\lambda$. Покажем возможность выбора натуральных чисел $k_n \geq n$ с условием $\tau(p) \geq \lambda$ для $p = \bigwedge_{n \geq 1} q_{n, k_n}$, где $q_{n, k_n} = \bigvee_{k=n}^{k_n} p_k$. Тогда $p \leq q$ и

$$q - p = q - \left(\bigwedge_{n \geq 1} q_{n, k_n} \right) \wedge q = q - \bigwedge_{n \geq 1} (q \wedge q_{n, k_n}) = \bigvee_{n \geq 1} (q - q \wedge q_{n, k_n}).$$

По лемме 1 и в силу нормальности следа τ имеем $\tau(q - p) \leq \sum_{n \geq 1} \tau(q - q \wedge q_{n, k_n})$. Проекторы конечной алгебры $\mathcal{M}$ образуют непрерывную геометрию [13, теорема 6.5], т.е. полную модулярную решетку с дополнениями, удовлетворяющую для любой возрастающей сети $\{r_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}^{\text{pr}}$ и для любого $r \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ условию

$$r \wedge \left(\bigvee_{\alpha \in A} r_\alpha \right) = \bigvee_{\alpha \in A} (r \wedge r_\alpha)$$

и дуальному ему условию. Поэтому при $k_n \rightarrow \infty$ получаем

$$q_{n, k_n} \wedge q \nearrow q_n \wedge q = q.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $k_n \in \mathbb{N}$, что $\tau(q - q \wedge q_{n, k_n}) < 2^{-n}\lambda$. Теперь для $p = \bigwedge_{n \geq 1} \bigvee_{k=n}^{k_n} p_k$ имеем $\tau(p) \geq \lambda$. Неравенство $\lambda p_n \leq |x_n|$ показывает, что $\rho(p_n, 0) \leq 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Используя (см. лемму 1) представление $\bigvee_{k=n}^{k_n} p_k = \sum_{k=n}^{k_n} r_k$, лемму 2 и неравенство треугольника для метрики ρ , устанавливаем, что проектор $\bigvee_{k=n}^{k_n} p_k$, а в силу свойства 2) МИП вместе с ним и проектор p лежат в каждом ε -шаре метрики ρ . Следовательно, $p = 0$ в $\langle E, \rho \rangle$ и в силу алгебраичности включения $E \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем $p = 0 \in \widetilde{\mathcal{M}}$ – противоречие.

II) В силу полноты МИП $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_\tau \rangle$ достаточно проверить фундаментальность последовательности $\{x_n\}$ по мере. Если это не так, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $i_n \geq j_n \geq n$, что $\rho_\tau(x_{i_n} - x_{j_n}, 0) \geq \varepsilon$. Тогда $i_n - j_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и $\rho(x_{i_n} - x_{j_n}, 0) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, откуда в силу п. I) имеем $\rho_\tau(x_{i_n} - x_{j_n}, 0) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, — противоречие.

III) По п. I) тождественное вложение E в $\widetilde{\mathcal{M}}$ непрерывно, а любое непрерывное отображение переводит ограниченные множества в ограниченные. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 получим новое доказательство следующего известного факта.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным конечным следом топология сходимости по мере на $\widetilde{\mathcal{M}}$ не зависит от выбора такого следа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ и μ — два точных нормальных конечных следа на $\mathcal{M}$. По п. I) теоремы МИП $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_\mu \rangle$ непрерывно вложено в $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, t_\tau \rangle$; аналогично, МИП $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_\tau \rangle$ непрерывно вложено в $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, t_\mu \rangle$. Следовательно, $t_\tau = t_\mu$.

Рассмотрим еще один пример МИП на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ с точным нормальным конечным следом τ . Пусть $\rho_{s,\tau}(x, y) = \tau(s(x - y))$ для всех $x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Поскольку из соотношений $s(x + y) \leq s(x) \vee s(y)$, $s(xy) \leq s(x)$, $s(xy) \lesssim s(y)$ вытекают оценки

$$\begin{aligned}\rho_{s,\tau}(x + y, 0) &= \tau(s(x + y)) \leq \tau(s(x) \vee s(y)) \leq \tau(s(x)) + \tau(s(y)) = \rho_{s,\tau}(x, 0) + \rho_{s,\tau}(y, 0), \\ \rho_{s,\tau}(xy, 0) &= \tau(s(xy)) \leq \min\{\tau(s(x)), \tau(s(y))\} = \min\{\rho_{s,\tau}(x, 0), \rho_{s,\tau}(y, 0)\}\end{aligned}$$

для всех $x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$, инвариантная метрика $\rho_{s,\tau}$ задает согласованную со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ топологию $t_{s,\tau}$. Очевидно, $\rho_\tau(x, 0) \leq \rho_{s,\tau}(x, 0)$ для всех $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Произведение $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ($\langle \mathbb{C}, |\cdot| \rangle \times \langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_{s,\tau} \rangle \rightarrow \langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_{s,\tau} \rangle$) не является непрерывным: для последовательности $x_n = n^{-1}e$ при больших $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$n^{-1} = \rho_\tau(x_n, 0) < \rho_{s,\tau}(x_n, 0) = \tau(e) = \text{const.}$$

Тем самым $t_\tau \subsetneq t_{s,\tau}$. Поскольку $s(x^*) \sim s(x)$, имеем $\rho_{s,\tau}(x^*) = \rho_{s,\tau}(x)$, т.е. инволюция $x \mapsto x^*$ ($x \in \widetilde{\mathcal{M}}$) $t_{s,\tau}$ -непрерывна. Отметим, что МИП $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho_{s,\tau} \rangle$ играет важную роль в теории интерполяционных пространств.

Следующее утверждение является некоммутативным обобщением основного результата работы Н. Т. Пека [14].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ . Топология сходимости по мере является минимальной среди всех метризуемых топологий, согласованных со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть метризуемая согласованная со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ топология $t \subset t_\tau$. По теореме Какутани топология t задается инвариантной метрикой ρ . Взяв при необходимости топологически эквивалентную инвариантную метрику $\rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$, считаем $\sup_{x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}} \rho(x, y) \leq 1$. Покажем, что метрическое пространство $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \rho \rangle$ допускает топологически эквивалентную “идеальную” перенормировку

$$\tilde{\rho}(x, 0) = \sup_{a, b \in \mathcal{M}_1} \rho(axb, 0), \quad x \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Проверим аксиомы МИП для $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \tilde{\rho} \rangle$. Поскольку $\tilde{\rho}(x, 0) \geq \rho(x, 0)$ для всех $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$, имеем $\tilde{\rho}(x, 0) = 0 \iff x = 0$. Известно, что для конечной алгебры фон Неймана каждый оператор $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ может быть представлен в виде $x = u|x|$ с унитарным оператором $u \in \mathcal{M}$.

Действительно, пусть $x = v|x|$ – полярное разложение с частичной изометрией $v \in \mathcal{M}$ и пусть $v^*v = f$, $vv^* = g$. Поскольку алгебра $\mathcal{M}$ конечна, проекторы $e - f$ и $e - g$ также эквивалентны. Пусть $e - f = w^*w$ и $e - g = ww^*$ с частичной изометрией $w \in \mathcal{M}$. Тогда оператор $u = v + w$ удовлетворяет условию $x = u|x|$ и является изометрией. Так как $\mathcal{M}$ конечна, оператор u унитарен. Отображение $a \mapsto au$ есть биекция шара $\mathcal{M}_1$, поэтому

$$\tilde{\rho}(x, 0) = \sup_{a, b \in \mathcal{M}_1} \rho(au|x|b, 0) = \sup_{c, b \in \mathcal{M}_1} \rho(c|x|b, 0) = \tilde{\rho}(|x|, 0), \quad x \in \widetilde{\mathcal{M}}.$$

Если $x, y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $0 \leq x \leq y$, то существует такой оператор $z \in \mathcal{M}_1$, что $x = zyz^*$ [15, с. 261], поэтому

$$\tilde{\rho}(x, 0) = \sup_{a, b \in \mathcal{M}_1} \rho(azyz^*b, 0) \leq \tilde{\rho}(y, 0).$$

Итак, если $|x| \leq |y|$, то $\tilde{\rho}(x, 0) \leq \tilde{\rho}(y, 0)$. Очевидно, что $\tilde{\rho}(x, y) \leq \tilde{\rho}(x, z) + \tilde{\rho}(z, y)$ для всех $x, y, z \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Отображение $b \mapsto u^*b$ есть биекция шара $\mathcal{M}_1$, поэтому для $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$ имеем

$$\tilde{\rho}(x^*, 0) = \sup_{a, b \in \mathcal{M}_1} \rho(ax^*b, 0) = \sup_{a, b \in \mathcal{M}_1} \rho(a|x|u^*b, 0) = \sup_{a, c \in \mathcal{M}_1} \rho(a|x|c, 0) = \tilde{\rho}(x, 0)$$

по вышедоказанному. Покажем, что

$$\rho(x_n, 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \iff \tilde{\rho}(x_n, 0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для всех последовательностей $\{x_n\} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$. Поскольку $\rho \leq \tilde{\rho}$, импликация ($\Leftarrow$) выполнена. Если импликация ($\Rightarrow$) неверна, переходя при необходимости к подпоследовательности считаем, что для $\{x_n\} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ выполнено условие $\rho(x_n, 0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ и

$$\exists \delta > 0, \quad \exists \{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathcal{M}_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\rho(a_n x_n b_n, 0) \geq \delta > 0). \quad (2)$$

Заметим, что

$$\rho_\tau(x, 0) = \inf_{q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}} \max\{\|xq\|, \tau(e - q)\} \leq \|x\|, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Поэтому последовательности операторов $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, будучи ограниченными в C^* -норме алгебры $\mathcal{M}$, являются t_τ -ограниченными (это следует и из п. III) теоремы 1 для МИП $\langle \mathcal{M}, \|\cdot\| \rangle$). Поскольку $t \subset t_\tau$, они и t -ограничены. Так как топология t согласована со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$, произведение (слева и справа) t -ограниченных последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ на t -сходящуюся к нулю последовательность $\{x_n\}$ снова t -сходится к нулю – противоречие с (2).

Итак, $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \tilde{\rho} \rangle$ есть МИП на $\mathcal{M}$. Применив к $\langle \widetilde{\mathcal{M}}, \tilde{\rho} \rangle$ п. I) теоремы 1, имеем $t_\tau \subset t$. Тем самым $t = t_\tau$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке теоремы 2 не требуется непрерывности инволюции $x \mapsto x^*$, $x \in \widetilde{\mathcal{M}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для коммутативной алгебры фон Неймана условие “идеальности” метрики в теореме 1 (см. [16]), как и условие согласованности топологии со структурой кольца в теореме 2 нельзя опустить (см. [14, теорема 1.1]). Доказательство теоремы 2 с помощью теоремы 1 является новым и в коммутативном случае.

В [17] введена топология d_τ двусторонней сходимости по мере на алгебре $\widetilde{\mathcal{M}}$, фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$V_{\varepsilon, \delta} = \{x \in \widetilde{\mathcal{M}} : \|qxq\| \leq \varepsilon, \tau(e - q) \leq \delta \text{ для некоторого } q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

ЛЕММА 4. *Отображения $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto xy$ ($\widetilde{\mathcal{M}} \times \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$) непрерывны в топологии d_τ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем включения $V_{\varepsilon, \delta} + V_{\alpha, \beta} \subset V_{\varepsilon + \alpha, \delta + \beta}$ и $V_{\varepsilon, \delta} \cdot V_{\alpha, \beta} \subset V_{\varepsilon\alpha, 2\delta + 2\beta}$ для всех $\varepsilon, \delta, \alpha, \beta > 0$. Пусть операторы $x \in V_{\varepsilon, \delta}$ и $y \in V_{\alpha, \beta}$ произвольны. Существуют такие $p, q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $\|pxp\| \leq \varepsilon$, $\|quq\| \leq \alpha$ и $\tau(e - p) \leq \delta$, $\tau(e - q) \leq \beta$. Для проектора $f = p \wedge q$ имеем $\tau(e - f) = \tau((e - p) \vee (e - q)) \leq \delta + \beta$; равенство $f(x + y)f = f(pxp + quq)f$ влечет оценку $\|f(x + y)f\| \leq \varepsilon + \alpha$. Следуя [4], определим для произвольных операторов $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ и $v \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ проектор $v_z = \bigvee \{w \in \mathcal{M}^{\text{pr}} : zw = vzw\}$. Тогда $e - v_z \lesssim e - v$ и v_z — наибольший из проекторов w , обладающих свойством $zw = vzw$. При этом $v_z^*z = v_z^*zv$ [4, с. 105]. Положим $r = p \wedge q \wedge q_y \wedge p_{x^*}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tau(e - r) &= \tau((e - p) \vee (e - q) \vee (e - q_y) \vee (e - p_{x^*})) \\ &\leq \tau(e - p) + \tau(e - q) + \tau(e - q_y) + \tau(e - p_{x^*}) \leq \delta + \beta + \beta + \delta = 2\delta + 2\beta. \end{aligned}$$

Поскольку $r \cdot xy \cdot r = rpx^* \cdot xy \cdot q_yr = r \cdot p_{x^*}x \cdot yq_y \cdot r = r \cdot p_{x^*}xp \cdot quq_y \cdot r = rpx^* \cdot xpqu \cdot q_yr = r \cdot xpqu \cdot r = rp \cdot xp \cdot qu \cdot qr = r \cdot prp \cdot quq \cdot r$, имеем $\|r \cdot xy \cdot r\| \leq \|pxp\| \cdot \|quq\| \leq \varepsilon\alpha$. Лемма доказана.

Выбирая $V_{\varepsilon, \delta}$ с рациональными $\varepsilon, \delta > 0$, из леммы 4 и теоремы Какутани получаем, что согласованная со структурой кольца на $\widetilde{\mathcal{M}}$ топология d_τ метризуема. Поскольку $U_{\varepsilon, \delta} \subset V_{\varepsilon, \delta}$ для всех $\varepsilon, \delta > 0$, имеем $d_\tau \subset t_\tau$. Теорема 2 дает

СЛЕДСТВИЕ 2 [17, теорема 3]. *Имеем $d_\tau = t_\tau$.*

Автор выражает свою признательность участникам Казанского семинара “Алгебры операторов и их приложения” за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. Введение в теорию некоммутативного интегрирования // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Т. 27. М.: ВИНТИ, 1985. С. 167–190.
- [2] Kosaki H. On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of W^* -algebra // J. Funct. Anal. 1984. V. 59. № 1. P. 123–131.
- [3] Kakutani S. Über die Metrization der topologischen Gruppen // Proc. Imp. Acad. Japan. 1936. V. 12. № 4. P. 82–84.

- [4] Nelson E. Notes on non-commutative integration // J. Funct. Anal. 1974. V. 15. № 2. P. 103–116.
- [5] Бикчентаев А. М. F -нормированные идеальные пространства измеримых операторов. Казань: Казан. ун-т, 1988. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4 июля 1988 г., № 5375-B88 Деп.).
- [6] Yeadon F. J. Non-commutative L^p -spaces // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1975. V. 77. № 1. P. 91–102.
- [7] Bikchentaev A. M. On noncommutative function spaces // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1992. V. 154. P. 179–187.
- [8] Овчинников В. И. Симметричные пространства измеримых операторов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191. № 4. С. 769–771.
- [9] Ciach L. J. Linear-topological spaces of operators affiliated with a von Neumann algebra // Bull. Acad. Pol. Sci. Math. 1983. V. 31. № 3–4. P. 161–166.
- [10] Tikhonov O. E. On the Losanovskii class of condensing operators and its applications to non-commutative integration // Israel Math. Conf. Proc. 1999. V. 13. P. 204–208.
- [11] Takesaki M. Theory of Operator Algebras. V. I. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [12] Szeptycki P. On solid spaces of measurable functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Math. 1982. V. 30. № 3–4. P. 115–116.
- [13] Kaplansky I. Projections in Banach algebras // Ann. Math. 1951. V. 53. № 2. P. 235–249.
- [14] Peck N. T. On nonlocally convex spaces. II // Math. Ann. 1968. V. 178. № 3. P. 209–218.
- [15] Yeadon F. J. Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1973. V. 74. № 2. P. 257–268.
- [16] Wnuk W. On a continuous embedding in a space of measurable functions // Bull. Acad. Pol. Sci. Math. 1986. V. 34. № 7–8. P. 413–416.
- [17] Муратов М. А. Сходимости в кольце измеримых операторов // Сбор. науч. тр. Ташкент. ун-та. № 573. Функцион. анализ. Ташкент: Изд-во ТашГУ, 1978. P. 51–58.

Казанский государственный университет
E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило
18.12.2002
Исправленный вариант
05.08.2003