Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Антонов, И. А. Тюрина, А. П. Ческидов, О конечных группах с ограничениями на централизаторы, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 483–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:00:47

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ

В. А. Антонов, И. А. Тюрина, А. П. Ческидов

Через $w(n)$ условимся обозначать количество множителей в представлении натурального числа n в виде произведения простых чисел. Если H – подгруппа конечной группы G , то $w(H) = w(|H|)$ и $v(G) = \max\{w(C(g)) \mid g \in G \setminus Z(G)\}$. В данной работе приводится полное описание групп с нетривиальным центром с условием $v(G) = 4$.

Библиография: 10 названий.

Через $w(n)$ условимся обозначать количество множителей в представлении натурального числа n в виде произведения простых чисел. Если H – подгруппа конечной группы G , то $w(H) = w(|H|)$ и

$$v(G) = \max\{w(C(g)) \mid g \in G \setminus Z(G)\}.$$

В работах [1] и [2] описаны конечные неабелевы группы с условиями $v(G) = 2$ и $v(G) = 3$ соответственно. В [3] исследованы конечные группы без центра с условием $v(G) = 4$. В предлагаемой работе приводится описание групп с нетривиальным центром, для которых $v(G) = 4$. Это завершает полное описание конечных неабелевых групп с таким условием.

1. m -группы. Следуя [4], m -группой будем называть неабелеву группу, все собственные централизаторы в которой абелевы.

ЛЕММА 1.1. Пусть G – конечная неабелева p -группа с условием $v(G) = n$. Если $|Z(G)| = p^m$, то $p^{n+1} \leq |G| \leq p^{n+m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in Z_2(G) \setminus Z(G)$, $f: g \rightarrow [g, x]$. Тогда из $|G| = |\text{Ker } f| \cdot |\text{Im } f|$ и того, что $\text{Ker } f = C(x)$, а $\text{Im } f \leq Z(G)$, получаем $|G| \leq p^n \cdot p^m = p^{n+m}$.

Заметим, что из $Z(G) < C(x)$ следует, что $m < n$. Поэтому $|G| \leq p^{2n-1}$. В частности, для $n = 4$ получаем $p^5 \leq |G| \leq p^7$. При этом если $|Z(G)| = p$, то $|G| = p^5$; если $|Z(G)| = p^2$, то $|G| \leq p^6$, и если $|Z(G)| = p^3$, то $|G| \leq p^7$. И обратно, если $|G| = p^7$, то $|Z(G)| = p^3$, если $|G| = p^6$, то $p^3 \geq |Z(G)| \geq p^2$, и если $|G| = p^5$, то $p^3 \geq |Z(G)| \geq p$.

В дальнейшем будем писать Z вместо $Z(G)$ и Z_2 вместо $Z_2(G)$. Кроме того, $S_p = S_p(G)$ – силовская p -подгруппа группы G и $C^2(x) = C(C(x))$.

При доказательстве всех теорем мы ограничимся доказательством необходимости. Достаточность везде проверяется непосредственно.

Так как в нильпотентной m -группе только одна силовская p -подгруппа неабелева, то в силу [1], [2] для описания нильпотентных m -групп нам достаточно ограничиться p -группами.

ТЕОРЕМА 1.2. *Конечная p -группа G в том и только том случае является m -группой с условием $v(G) = 4$, когда выполняется один из следующих случаев:*

- 1) $|G| = p^5$ и G изоклинна одной из следующих групп:
 $G_1 = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, a^{p^2} = b^p = 1, [a, b] = a^p;$
 $G_2 = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, a^{p^3} = b^p = 1, [a, b] = a^p;$
 $G_3 = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle, a^{p^4} = b^p = 1, [a, b] = a^p;$
 $G_4 = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \lambda \langle b \rangle, a_i^{p^2} = b^p = 1, [a_i, b] = a_i^p, i = 1, 2;$
- 2) $|G| = p^6$ и G изоклинна одной из следующих групп:
 $G_5 = ((\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle z_3 \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle, z_i^p = a^p = b_j^p = 1$ для $i = 1, 2, 3;$
 $j = 1, 2; [z_i, b_j] = 1, [a, b_j] = z_j, [b_1, b_2] = z_3;$
 $G_6 = ((\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle z_3 \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle, z_i^p = a^p = b_j^p = 1$ для $i = 1, 2, 3,$
 $j = 1, 2; [z_i, b_j] = 1, [a, b_j] = z_j, [b_1, b_2] = a, p > 2;$
 $G_7 = (\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \lambda (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle), z_i^p = a_i^p = b_i^p = 1$ для $i = 1, 2;$
 $[a_1, b_1] = z_1, [a_1, b_2] = [a_2, b_1] = z_2, [a_2, b_2] = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$ и уравнение $x^2 + \alpha_2 x - \alpha_1 = 0$ не имеет решений в $GF(p);$
 $G_8 = ((\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle, z_i^p = a_i^p = b_i^p = 1$ для $i = 1, 2;$
 $[b_1, b_2] = a_1, [a_1, b_i] = z_i, [a_2, b_1] = z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}, [a_2, b_2] = z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_2}, p \neq 2$ и уравнение $x^2 - (\alpha_1 + \beta_2)x - \alpha_2 \beta_1 = 0$ не имеет решений в $GF(p).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 $|G| \in \{p^5, p^6, p^7\}.$

Пусть $|G| = p^5, a \in Z_2 \setminus Z.$ Тогда $|C(a)| = p^4,$ т.е. G обладает абелевой максимальной подгруппой. Холл [5] показал, что если G и H – две p -группы с абелевой максимальной подгруппой, то G изоклинна H тогда и только тогда, когда $|\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)| = |\gamma_i(H)/\gamma_{i+1}(H)|$ для $i \geq 2.$ При этом $|\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)| \geq |\gamma_{i+1}(G)/\gamma_{i+2}(G)|.$ Пусть c – степень нильпотентности группы G и $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{c-1})$ – набор чисел со свойством $|\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)| = p^{\alpha_i-1}.$ Несложно заметить, что наборы (3) и (2.1) невозможны. Остаются случаи (1), (1,1), (1,1,1) и (2), т.е. G изоклинна одной из групп $G_1, G_2, G_3, G_4.$

Пусть теперь $|G| = p^6.$ В этом случае в G нет абелевых максимальных подгрупп. Если $a \in Z_2 \setminus Z,$ то $C(a)$ – инвариантный в G централизатор. В силу теоремы 2.5 из [6] можно считать, что $C(a)$ – группа экспоненты p и G порождается элементами порядка $p.$

Предположим сначала, что $|Z| = p^3.$ Тогда можно считать, что

$$G = ((\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle z_3 \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle,$$

$[a, b_i] = z_i.$ Если $[b_1, b_2] = z_1^{\alpha} z_2^{\beta},$ то $[a^{-\beta} b_1, a^{\alpha} b_2] = 1,$ что противоречит тому, что $v(G) = 4.$ Поэтому можно считать, что либо $[b_1, b_2] = z_3,$ либо $[b_1, b_2] = a.$ Так как собственные централизаторы группы G индуцируют расщепление фактор-группы $G/Z,$ то G/Z – группа экспоненты $p.$ Поэтому во втором случае $p \neq 2,$ и мы получаем одну из групп G_5 или $G_6.$

Пусть теперь $|Z| = p^2,$ т.е.

$$G = ((\langle z_1 \rangle \times \langle z_2 \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle.$$

Можно считать, что $[a_1, b_i] = z_i.$ Если для любого $x \in G \setminus Z(G)$ выполняется равенство $|C(x)| = p^4,$ то G – группа первого типа из [7] и, следовательно, изоклинна $G_7.$ Поэтому будем считать, что $C(b_1) = Z \langle b_1 \rangle.$ Если бы степень нильпотентности группы G была равна 2, то из зависимости элементов $[a_1, b_1], [a_2, b_1], [b_2, b_1]$ мы бы получили

противоречие с тем, что $C(b_1) = Z\langle b_1 \rangle$. Следовательно, степень G больше двух. Тогда, как и выше, $p > 2$.

Так как $Z_2 \leq C(G') < G$, то Z_2 абелева, т.е. $Z_2 \leq C(a_1)$. Если $[a_2, b_1] \in a_1^\alpha Z$ и $[a_2, b_2] \in a_1^\beta Z$, то $[a_2, b_1^\beta b_2^{-\alpha}] \in Z$, т.е. можно считать, что $[a_2, b_1] \in Z$. Но тогда из $[a_2, b_1, b_2] = [a_2, b_2, b_1]$ (см. доказательство леммы 3.11 из [6]) получим $[a_2, b_2] \in A \cap C(b_1) = Z$, т.е. $a_2 \in Z_2$.

Итак, $Z_2 = C(a_1)$. Пусть $[a_2, b_1] = z_1^{\alpha_1} z_2^{\beta_1}$, $[a_2, b_2] = z_1^{\alpha_2} z_2^{\beta_2}$. Так как $C(a) \cap C(b_1^s b_2^t) = Z$ для $b_1^s b_2^t \neq 1$ и $a \in Z_2 \setminus Z$, то равенство $[a_1^x a_2^y, b_1^s b_2^t] = 1$ может выполняться только при $s = t = 0$ или $x = y = 0$.

Из $[a_1^x a_2^y, b_1^s b_2^t] = z_1^{x s + \alpha_1 y s + \alpha_2 y t} z_2^{x t + \beta_1 y s + \beta_2 y t}$ получаем, что система

$$\begin{cases} xs + (\alpha_1 s + \alpha_2 t)y = 0, \\ xt + (\beta_1 s + \beta_2 t)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение при любых s и t , не равных нулю одновременно, т.е. система

$$\begin{cases} \alpha_1 s + \alpha_2 t = ks, \\ \beta_1 s + \beta_2 t = kt \end{cases}$$

не имеет решений при всех $k \in GF(p)$. Следовательно, уравнение $k^2 - (\alpha_1 + \beta_2)k - \alpha_2 \beta_1 = 0$ не имеет решений и G изоклинна G_8 .

Наконец, предположим, что $|G| = p^7$. Тогда $|Z| = p^3$ и $|G: C(x)| = p^3$ для любого $x \in G \setminus Z$. По теореме 3.6 из [8] G должна быть двуступенно нильпотентной. Но тогда, очевидно, $|G'| = p^3$ и по теореме 3.3 из [8] G изоклинна полужэкстраспециальной группе, т.е. должно выполняться неравенство $p^7 = |G| \geq |Z| \cdot |G: C(x)|^2 = p^9$, что невозможно.

ТЕОРЕМА 1.3. *Ненильпотентная группа G в том и только том случае является t -группой с условием $v(G) = 4$, когда G — одна из следующих групп:*

- 1) $G = (A \times B)\langle b \rangle$, A и B — абелевы p - и p' -группы соответственно, $b^p \in A$, $A\langle b \rangle$ и $B\lambda\langle b \rangle$ неабелевы, $w(A \times B) = 4$;
- 2) $G/Z = A/Z\lambda B/Z$ — группа Фробениуса, подгруппы A и B абелевы, $\max\{w(A), w(B)\} = 4$;
- 3) $G/Z = A/Z\lambda B/Z$ — группа Фробениуса, B абелева, A является t -группой, A/Z примарна, $Z(A) = Z$, $\max\{v(A), w(B)\} = 4$;
- 4) $G/Z \cong S_4$, $w(Z) = 2$ и если V/Z — четверная группа Клейна, то V неабелева;
- 5) $G = PSL(2, 9)^*$ — накрывающая группа для $PSL(2, 9)$;
- 6) $G = SL(2, q)$, $q \in \{2^4, 5^3, 7^3, 5^2, p\}$, где p — простое число со свойством $\max\{w(p-1), w(p+1)\} = 4$;
- 7) $G = A \times SL(2, q)$, $q \in \{4, 8\}$, A — абелева группа, $w(A) = 1$ при $q = 8$ и $w(A) = 2$ при $q = 4$;
- 8) $G = SL(2, q)Z$, $q \in \{5, 9, 27, p\}$, где p — простое число со свойством $\max\{w(p-1), w(p+1)\} = 3$, $w(Z) = 3$ при $q = 5$ и $w(Z) = 2$ в остальных случаях;
- 9) $G/Z \cong PGL(2, q)$, $G' \cong SL(2, q)$ и либо $w(Z) = 2$ и $q = 5$, либо $w(Z) = 1$ и $q \in \{9, 27, p\}$, где p — простое число из пункта 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [4, теоремы 5.9 и 5.12] группа G удовлетворяет одному из следующих свойств:

- 1) G обладает абелевым нормальным делителем простого индекса p ;
- 2) $G/Z = A/Z \lambda B/Z$ – группа Фробениуса, B – абелева группа, а группа A либо абелева, либо $Z(A) = Z$ и A/Z примарна;
- 3) $G/Z \cong S_4$ и если V/Z – четверная группа Клейна, то V неабелева;
- 4) $G/Z \cong PSL(2, p^n)$ или $PGL(2, p^n)$, $p^n > 3$, и либо $G' \cong SL(2, p^n)$, либо $p^n = 9$ и $G' \cong PSL(2, 9)^*$.

Учитывая, что $v(G) = 4$, в случаях 1)–3) получаем группы типов 1)–4) из формулировки теоремы. Рассмотрим случай 4).

Если $G' \cong PSL(2, 9)^*$, то из $G \geq G'Z$ и $v(G) = 4$ получаем группу типа 5).

Предположим, что $G/Z \cong PSL(2, p^n)$, $G' \cong SL(2, p^n)$. Тогда $G = G'Z$. Если $G' < G$, то $v(G') \leq 3$ и в силу [1], [2] мы получаем группы типов 7), 8).

Пусть теперь $G = SL(2, p^n)$. Так как $v(G) = 4$, то $n \leq 4$. Если A – собственный централизатор из G , то (см. [4, доказательство теоремы 5.9]) A/Z является либо элементарной абелевой группой порядка p^n , либо циклической группой порядка $(p^n \pm 1)/d$, где $d = (p^n - 1, 2)$. Поэтому либо $p = 2$ и $n = 4$, либо $p > 2$ и $n \leq 3$. Рассмотрим второй случай.

Если $n = 1$, то должно выполняться условие

$$\max\{w(p-1), w(p+1)\} = 4.$$

Пусть $n = 2$. Из $p^2 - 1 = 8 \cdot (p^2 - 1)/8$ следует, что $(p^2 - 1)/8$ – простое число. Так как при $p \neq 3$ число $p^2 - 1$ делится на 3, то $(p^2 - 1)/8 = 3$ и $p = 5$.

В случае $n = 3$ предположим сначала, что $p \equiv 1(4)$. Тогда $p^3 - 1 = 4 \cdot (p - 1)/4 \cdot (p^2 + p + 1)$. Если $p \neq 5$, то $(p - 1)/4$ и $p^2 + p + 1$ – простые числа. Так как $|G|$ делится на 3, то на 3 делится число $p^3 + 1$. Из $p^3 + 1 = 18 \cdot (p + 1)/6 \cdot (p^2 - p + 1)/3$ получаем $v(G) > 4$. В случае $p \equiv -1(4)$ и $p > 7$ аналогично получим, что $v(G) > 4$.

Наконец, если $G/Z \cong PGL(2, p^n)$, $G' \cong SL(2, p^n)$, $p > 2$, и A – собственный централизатор, то (см. [4, доказательство теоремы 5.9]) A/Z – либо элементарная абелева группа порядка p^n , либо циклическая группа порядка $p^n \pm 1$. Так как $Z > 1$, то $w(p^n - 1)$ и $w(p^n + 1)$ не превосходят 3, и мы получаем группу типа 9).

2. Группы с условием $Z_2 > Z$. Если G – непримарная нильпотентная группа с условием $v(G) = 4$, то, очевидно, G является m -группой.

ЛЕММА 2.1. Пусть G – конечная неабелева p -группа с условием $v(G) = 4$. Если G не является m -группой, то $|G| = p^5$ и $|Z| = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(x)$ – неабелев собственный централизатор группы G . Тогда $v(C(x)) \leq 4$. Поэтому из $|C(x)| \leq p^4$ и $|C^2(x)| \geq p^2$ получаем $|Z| = p$ и по лемме 1.1 $|G| = p^5$.

ЛЕММА 2.2. Пусть G – конечная неабелева p -группа, $v(G) = 4$, $|Z| = p$. Тогда либо G – центральное склеивание двух неабелевых групп порядка p^3 , либо степень нильпотентности группы G больше двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – двуступенно нильпотентна. Тогда для любого $x \in G \setminus Z$ имеем $|C(x)| = |G:Z| = p^4$. Если $[x, y] \neq 1$, то из $G = C(y) \cdot C^2(x)$ получаем $|C^2(x):C(y) \cap C^2(x)| = p$. Из максимальности $C(x)$ следует, что $C^2(x)$ – минимальный централизатор в группе G . Поэтому $C^2(x) \cap C(y) = Z$. Итак, для любого элемента $x \in G \setminus Z$ выполняются равенства $|G:C(x)| = |C^2(x):Z| = p$. По [7, лемма 11 и теорема 3] G – центральное склеивание двух неабелевых групп порядка p^3 .

ТЕОРЕМА 2.3. *Конечная p -группа G , не являющаяся ни m -группой, ни центральным склеиванием двух неабелевых групп порядка p^3 , в том и только том случае удовлетворяет условию $v(G) = 4$, когда $|G| = p^5$ и G изоклинна одной из следующих групп:*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle b_1 \rangle \lambda \langle b_2 \rangle, b_1^{p^3} = b_2^{p^2} = 1, [b_1, b_2] = b_1^p; \\ G_2 &= ((\langle z \rangle \times \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle) \lambda \langle b_1 \rangle) \lambda \langle b_2 \rangle, z^p = a_i^p = b_i^p = 1, z \in Z, [a_i, b_i] = 1, \\ &i = 1, 2; [a_i, b_j] = z \text{ при } i \neq j, [b_1, b_2] = a_1, p \neq 2; \\ G_3 &= ((\langle z \rangle \times \langle x \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle c \rangle, z^p = x^p = a^p = b^p = c^p = 1, z \in Z, [x, b] = 1, \\ &[x, c] = z = [a, b], [a, c] = x, [b, c] = a, p > 3. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – конечная неабелева p -группа, $v(G) = 4$ и G не является ни m -группой, ни центральным склеиванием двух групп порядка p^3 . Как показано выше, $|G| = p^5$, $|Z| = p$, степень нильпотентности G больше двух и если $x \in Z_2 \setminus Z$, то $|C(x)| = p^4$. Так как G не m -группа, то $C(x)$ неабелев.

Если $y \in Z_2 \setminus Z$ и $C(x) \neq C(y)$, то из соотношений порядков получим $|C(x) \cap C(y)| = p^3$. Если при этом $H = C(x) \cap C(y)$ неабелева, то $G = H \cdot C(H)$ нильпотентна степени 2. Следовательно, H абелева. Но тогда H – максимальная абелева подгруппа как в $C(x)$, так и в $C(y)$, т.е. $y \in C(x)$. Это означает, в частности, что Z_2 – абелева подгруппа.

Рассмотрим сначала случай, когда $|Z_2| = p^3$. Тогда $Z_2 = C(Z_2)$ и $G/Z_2 = \langle \bar{b}_1 \rangle \times \langle \bar{b}_2 \rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^2 . В частности, Z_2/Z не циклическая. Пусть $\langle \bar{b}_i \rangle = Z_2 \langle b_i \rangle$ и $[b_1, b_2] = a_1$. В качестве образующего z для Z возьмем $[a_1, b_2]$ (если $[a_1, b_2] = 1$, то поменяем нумерацию у b_1 и b_2). А элемент a_2 выберем так, чтобы выполнялись условия $a_2 \in C(b_2) \cap Z_2$ и $[a_2, b_1] = z$. Если $[a_1, b_1] = z^\alpha \neq 1$, то заменим b_1 на $b_2^{-\alpha} b_1$. В результате мы получим, что в группе G выполняются следующие равенства: $[b_1, b_2] = a_1$; $[b_i, a_i] = 1$, $i = 1, 2$; $[a_i, b_j] = z$ при $i \neq j$, $[a_i, a_j] = 1$. Из этих равенств следует, что $[b_1^p, b_2] = a_1^p$ и $[b_1, b_2^p] = a_1^p z^{p(p-1)/2}$. Поэтому если $p = 2$, то $b_2^p \notin Z$. Кроме того, если $b_1^p \notin Z$, то $a_1^p \neq 1$, если $b_2^p \notin Z$, то $a_1^p \neq 1$, и, наконец, если $a_1^p \neq 1$, то $b_1^p \notin Z$ и $b_2^p \notin Z$. Как нетрудно видеть, группа G изоклинна одной из групп G_1, G_2 .

Предположим теперь, что $|Z_2| = p^2$, $x \in Z_2 \setminus Z$, $Z = \langle z \rangle$, а y – элемент из G с неабелевым централизатором. Тогда $|C(y)| = p^4$ и, как и выше, $y \in C(x)$. Следовательно, для любого $y \notin C(x)$ подгруппа $C(y)$ абелева. Так как $|C(y)| \leq p^3$, то $C(y) \cap C(x)$ – абелева подгруппа порядка не больше p^2 . Если $a \in (C(y) \cap C(x)) \setminus Z$, то $C(a)$ содержит x и y , т.е. неабелев. Но тогда $a \in Z_2 \cap C(y) = Z$, что невозможно. Итак, в этом случае $C(x)$ – единственный неабелев централизатор и для всех $y \notin C(x)$ подгруппа $C(y)$ абелева порядка p^2 .

Пусть степень нильпотентности группы G равна 3, $c \in G \setminus C(x)$, $[x, c] = z$, а a и b – неперестановочные элементы из $C(x)$. Пусть также $[a, c] = x^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$, $[b, c] = x^{\beta_1} z^{\beta_2}$. Если $\alpha_1 \equiv 0(p)$, то α_2 не делится на p . Пусть $s\alpha_2 \equiv 1(p)$. Тогда $[a^s, c] = [a, c]^s = z = [x, c]$, т.е. $a^s x^{-1} \in C(c)$, что невозможно. Поэтому α_1 не делится на p . Аналогично, β_1 не делится на p . Но тогда если $\alpha_1 + s\beta_2 \equiv 0(p)$, то $[ab^s, c] \in Z$, и снова получим противоречие.

Итак, степень нильпотентности группы G равна 4. Тогда, в тех же обозначениях, можно считать, что $Z_3(G) = \langle z, x, a \rangle = C(a)$. В самом деле, так как Z_3/Z_2 – циклическая группа простого порядка, то из $C(x)/Z_2 \triangleleft G/Z_2$ следует, что $Z_3 \leq C(x)$. Пусть $[b, c] = a$, $[x, c] = z$, $[a, b] = x^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$, $[a, c] = x^{\beta_1} z^{\beta_2}$. Если $\beta_1 \equiv 0(p)$ и $s\beta_2 \equiv 1(p)$, то снова получим $a^s x^{-1} \in C(c)$, что невозможно. Поэтому β_1 не делится на p . Если α_1 не делится на p и $s\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0(p)$, то $b^s c \in C(a)$, что тоже невозможно, т.е. $\alpha_1 \equiv 0(p)$, и мы можем считать, что $[a, b] = z$.

Если положить $z' = z^{\beta_1^2}$, $x' = x^{\beta_1^2} z^{\beta_1 \beta_2}$, $a' = a^{\beta_1} z^{\beta_1(\beta_1-1)/2}$ и $b' = b^{\beta_1}$, то получим $[b', c] = a'$, $[x', c] = z'$, $[a', b'] = z'$ и $[a', c] = x'$. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $[a, c] = x$.

Подгруппа $G' = \langle z, x, a \rangle$ – абелева группа порядка p^3 , $|Z| = p$. Предположим, что $x^p \neq 1$. Тогда $C^2(x)$ – циклическая группа порядка p^2 и $x^p \in Z$. Из $\langle [a^p, c] \rangle = \langle x^p \rangle$ получаем, что $a^p \notin Z$. Но тогда из $|\langle a, x \rangle| = p^3$ следует, что $\langle a \rangle \cap \langle x \rangle \neq 1$, т.е. $a^p \in Z$. Противоречие.

Таким образом, $x^p = 1$ и $Z_2 = \langle z \rangle \times \langle x \rangle$. Так как $|C(c)| = p^2$, то $c^p \in Z$. Из $[b, c^p] = a^p x^{p(p-1)/2} z^{p(p-1)(p-2)/6} = 1$ следует, что $a^p = 1$ и $p > 3$. Несложно проверить, что $b^p \in Z$. Поэтому G изоклинна группе G_3 .

В следующей теореме p, q, r – различные простые числа.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть G – конечная ненильпотентная группа, $Z_2(G) \neq Z(G)$ и G не является t -группой. Тогда $v(G) = 4$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P \times Q$, где P и Q – неабелевы группы порядков p^3 и qr соответственно;
- 2) $G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda P$, P – неабелева группа порядка p^3 , $a^q = b^r = 1$, $[a, b] \neq 1$, $q-1$ делится на pr , $[b, P] = 1$, $|C(a)| = qp^2$;
- 3) $G = P \times Q$, где P и Q – неабелевы группы порядков p^3 и pq соответственно;
- 4) $G = \langle b \rangle \lambda (\langle y \rangle \lambda \langle x \rangle)$, $b^q = x^p = y^{p^3} = 1$, $b^x = b$, $b^y = b^r$, $r^{p^2} \equiv 1(q)$, $r^p \not\equiv 1(q)$, $[x, y] = y^{p^2}$;
- 5) $G = \langle b \rangle \lambda (\langle x \rangle \lambda \langle y \rangle)$, $b^q = x^{p^2} = y^{p^2} = 1$, $b^x = b$, $b^y = b^r$, $r^{p^2} \equiv 1(q)$, $r^p \not\equiv 1(q)$, $[x, y] = x^p$;
- 6) $G = \langle b \rangle \lambda [(\langle z \rangle \times \langle x \rangle) \lambda \langle y \rangle]$, $b^q = x^p = z^p = y^{p^2} = 1$, $z \in Z$, $b^x = b$, $b^y = b^r$, $r^{p^2} \equiv 1(q)$, $r^p \not\equiv 1(q)$, $[x, y] = z$;
- 7) $|G| = p^4 q$ и G изоклинна одной из следующих групп:
 - а) $(\langle b \rangle \times [(\langle z \rangle \times \langle x \rangle) \lambda \langle y \rangle]) \lambda \langle a \rangle$, $b^q = z^p = x^p = a^p = y^p = 1$, $z \in Z$, $b^a = b^r$, $r^p \equiv 1(q)$, $r \not\equiv 1(q)$, $[y, a] = [x, a] = 1$, $[x, y] = z$;
 - б) $\langle b \rangle \lambda (\langle a \rangle \lambda \langle y \rangle)$, $b^q = a^{p^3} = y^p = 1$, $b^y = b$, $b^a = b^r$, $r^p \equiv 1(q)$, $r \not\equiv 1(q)$, $[a, y] = a^p$;
 - в) $\langle b \rangle \lambda [(\langle z \rangle \times \langle x \rangle \times \langle a \rangle) \lambda \langle y \rangle]$, $b^q = z^p = x^p = a^p = y^p = 1$, $z \in Z$, $b^x = b^y = b$, $b^a = b^r$, $r^p \equiv 1(q)$, $r^p \not\equiv 1(q)$, $[a, y] = x$, $[x, y] = z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – ненильпотентная группа, $v(G) = 4$ и $Z_2 \neq Z$. Если $x \in Z_2 \setminus Z$, то снова получим $|G| = |C(x)| \cdot |I|$, где I – образ гомоморфизма $f: g \rightarrow [g, x]$.

Если $w(Z) \geq 2$, то $w(C^2(y)) \geq 3$ для любого $y \in G \setminus Z$, т.е. все собственные централизаторы в группе G абелевы. Поэтому $|Z(G)| = p$ для некоторого простого числа p . Так как $Z = I \geq G'$, то по теореме VI.14.3 из [9] силовская p -подгруппа P группы G неабелева, т.е. $|P| \geq p^3$. Из $w(C(x)) \leq 4$ следует $w(G) = 5$ и $w(P) \leq 4$. Так как $[x^p, G] = 1$,

то x является p -элементом, т.е. $x \in P$. Предположим сначала, что $|P| = p^3$. Обозначим через Q холлову p' -подгруппу из G . Тогда $w(Q) = 2$ и $|C(x)| = p^2|Q|$. Поэтому $C(x) = C_P(x) \times Q$, $Q \triangleleft G$ и $G = Q\lambda P$.

Так как G – не m -группа и $|G/C(x)| = p$, то $C(x)$ неабелев, т.е. Q – неабелева подгруппа порядка qr , где q, r – различные простые числа, отличные от p . Пусть $Q = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $|a| = q$, $|b| = r$, и $y \in P \setminus C(x)$.

Так как $\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ не нильпотентна, то по теореме Томпсона (см. теорему V.8.7.a) из [9]) о нильпотентности группы, допускающей регулярную группу автоморфизмов, y действует на $\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ нерегулярно, т.е. существует неединичный элемент $c \in \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ такой, что $c^y = c$. Предположим сначала, что c сопряжен со степенью b . Можно считать, что $y \in C(b)$. Если $y \in C(a)$, то $G = Q \times P$. Если же $y \notin C(a)$, то $(q-1)$ делится на pr , $C(a) = \langle a \rangle \times C^2(x)$ и $G/C(a)$ – циклическая группа порядка pr .

Пусть теперь $c = a$. Так как подгрупп, сопряженных с $\langle b \rangle$, ровно q , то $P \leq N(\langle b \rangle)$. Из $y \in N(\langle b \rangle)$ следует, что $y^a = y \in N(\langle b^a \rangle)$. Пусть $b^a = ba^s$ и $b^y = b^t$. Тогда $(ba^s)^y = bya^s = b^t a^s \in \langle ba^s \rangle$, т.е. $b^{t-1} \in \langle b^a \rangle$. Отсюда $t = 1$, т.е. $y \in C(b)$ и $G = Q \times P$.

Итак, в случае $|P| = p^3$ мы получаем группы 1), 2). Пусть теперь $|P| = p^4$. Так как $|C(x)| = p^3q$, $|C^2(x)| \geq p^2$ и G не является m -группой, то $C(x)/C^2(x)$ – неабелева группа порядка pq . Пусть Q – силовская q -подгруппа из G . Из $C(x) \triangleleft G$ следует, что либо $C^2(x) \times Q \triangleleft G$ и, следовательно, $Q \triangleleft G$, либо $P \cap C(x) \triangleleft G$.

Предположим сначала, что $P \cap C(x) \triangleleft G$. Из $|P \cap C(x)| = p^3$ и $|C^2(x)| \geq p^2$ следует, что $P \cap C(x)$ абелева. По [10, следствие 0.5] $C(x) = C^2(x) \times (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, $|a| = p$, $|b| = q$. Так как $C(x) \triangleleft G$ и $(C(x))' = \langle a \rangle$, то $\langle a \rangle \triangleleft G$ и, следовательно, $a \in Z(P)$. Из $H = (C^2(x) \times \langle a \rangle) \triangleleft G$ и $|G/H| = pq$ следует, что $P \triangleleft G$.

Все силовские q -подгруппы группы G содержатся в $C(x)$, и число их равно p . Поэтому $N(\langle b \rangle)$ содержит элемент $y \notin C(x)$. Ясно, что $y \in C(b)$. Но тогда $y \in C(\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$ и

$$G = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \cdot C(\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle).$$

Так как $a \notin C(\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, то $P_1 = \langle C^2(x), y \rangle = C(\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$ – неабелева группа порядка p^3 и $G = P_1 \times (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle)$, т.е. G группа типа 3).

Пусть теперь $Q \triangleleft G$, $G = Q\lambda P$. Тогда $C(x) = Q\lambda C_P(x)$ и $C_P(x)$ – абелева подгруппа порядка p^3 . Так как $C(x)$ неабелев, то $C(x) = (Q \times C^2(x))\langle a \rangle$, $Q\lambda \langle a \rangle$ неабелева. Из $C(Q) \geq Q \times C^2(x)$ следует, что либо $|C(Q)| = qp^2$, либо $|C(Q)| = qp^3$.

Предположим сначала, что $|C(Q)| = qp^2$, т.е. $C(x) = C(Q)\langle a \rangle$. Так как $G/C(Q)$ – циклическая группа, то $a = y^p$ для некоторого $y \notin C(x)$. Но тогда $a \in Z(P)$, т.е. $|Z(P)| = p^2$. В этом случае, как несложно видеть, группа G изоморфна одной из групп 4)–6).

Пусть теперь $|C(Q)| = qp^3$. Тогда $C(Q) = Q \times P_1$, где P_1 – неабелева группа порядка p^3 , $P = P_1\langle a \rangle$. Если $|Z(P)| > p$, то $P = C(Z(P))$ и $P_1 = C(Q) \cap P$ является централизатором. Но тогда $G = P_1 \cdot C(P_1) = P_1 \cdot (Q\lambda \langle a \rangle)$. В этом случае $G' = Q \times Z$ и $G/Z \cong \langle b \rangle \lambda (\langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle a \rangle)$, $b^q = x^p = y^p = a^p = 1$, $b^x = by = b$, $b^a = b^r$, $r^p \equiv 1(q)$, $r \not\equiv 1(q)$, т.е. G изоклинна группе типа 7а).

Пусть теперь $|Z(P)| = p$, т.е. $Z(P) = Z(G)$. В этом случае P нильпотентна степени 3. В самом деле, предположим, что P двуступенно нильпотентна, $y \in P \setminus C(x)$. Тогда можно считать, что $[x, y] = [a, y] = z$. Отсюда $xa^{-1} \in C(y)$ и, следовательно, $xa^{-1} \in Z(P)$, что невозможно.

Несложно проверить, что в этом случае G изоклинна группе 7б) или 7в).

3. Группы с условием $Z_2 = Z > 1$.

ЛЕММА 3.1. Если $Z_2(G) = Z(G)$ и Z не лежит в G' , то $v(G/Z) \leq v(G) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h является элементом из $G \setminus Z$ с наибольшим значением $w(C_{G/Z}(hZ))$. Обозначим $L/Z = C_{G/Z}(hZ)$. Если f – гомоморфизм из L в $Z \cap L'$ такой, что $f(l) = [l, h]$, и I – его образ, то $L/C(h) \cong I$. Поэтому

$$|L/Z| = |L/C(h)| \cdot |C(h)/Z| = |C(h)| \cdot |I|/|Z|.$$

Так как Z не лежит в G' , то $|I| < |Z|$ и

$$v(G/Z) = w(L/Z) \leq w(C(h)) - 1 \leq v(G) - 1.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть G – конечная неразрешимая группа, $Z_2(G) = Z(G) \neq 1$ и G не является m -группой. Тогда в группе G выполняется условие $v(G) = 4$ в том и только том случае, когда G изоморфна одной из следующих групп:

- 1) $G = \langle a \rangle \times H$, $|a|$ – простое число, $H \cong S_5$ или $H \cong PSL(2, q)$, $q \in \{5^3, 3^3, 3^2, p\}$, где p – простое число со свойством $l(p) = 3$;
- 2) $G = H\lambda\langle a \rangle$, $H \cong A_5$, $a^4 = 1$, $a^2 \in Z$ и $G/\langle a_2 \rangle \cong S_5$;
- 3) $G/Z \cong PSL(2, 9)$ или $PGL(2, 9)$, $|Z| = 3$ и $G' \cong PSL(2, 9)^*/\langle k^2 \rangle$, где $\langle k \rangle$ – мультипликатор Шура группы $PSL(2, 9)$;
- 4) $G \cong A_7^*/\langle k^2 \rangle$, где $\langle k \rangle$ – мультипликатор Шура группы A_7 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа из условия теоремы. Так как G не является m -группой, то $|Z(G)| = p$ – простое число.

Предположим сначала, что $Z \not\leq G'$. Тогда по лемме 3.1 $v(G/Z) = 3$. Так как G/Z имеет тривиальный центр, то по теореме 4.1 из [2] и замечанию, сделанному после теоремы 1.1 из [3], либо $G/Z \cong S_5$, либо $G/Z \cong PSL(2, q)$, где q определено в п. 1) теоремы.

Если $G/Z \cong PSL(2, q)$, то из $(G/Z)' = G/Z$ получаем $G = G' \cdot Z = G' \times Z$. Предположим теперь, что $G/Z \cong S_5$. Если $Z \not\leq \Phi(G)$ и H – максимальная подгруппа группы G , не содержащая Z , то $G = Z \times H$ и $H \cong S_5$. Пусть $Z \leq \Phi(G)$ и $H = G'Z$. Так как $Z \not\leq G'$, то $H = G' \times Z$ и $G' \cong A_5$. Кроме того, $|G:H| = 2$. Пусть a – элемент из $G \setminus H$. Тогда $G = G'\langle a \rangle$. Подгруппа H не содержит элементов порядка 4. Поэтому $|a| = 4$, $G = G'\lambda\langle a \rangle$ и $|Z| = 2$. Так как aZ/Z имеет порядок 2, то $a^2 \in Z$.

Предположим теперь, что $Z \leq G'$. В силу [2] и теорем 1.1 и 1.2 из [3] G/Z изоморфна либо группе $PSL(2, q)$, $q \in \{2^4, 7^3, 5^3, 3^3, 2^3, 5^2, 3^2, p\}$, где $l(p) \in \{3, 4\}$, либо группе $PGL(2, q)$, $q \in \{5^3, 3^3, 5^2, 3^2, p\}$, где $l(p) \in \{2, 3\}$, либо группе из пункта 3) или 4) теоремы 1.2 из [3], либо A_7 .

Если $G/Z \cong PSL(2, q)$, то из $G = G'$ следует, что G – накрывающая для $PSL(2, q)$. Но для $PSL(2, 16)$ и $PSL(2, 8)$ мультипликатор Шура тривиален, а для $PSL(2, q)$, $q \neq 9$ нечетно, накрывающей является группа $SL(2, q)$, которая по теореме 5.9 из [4] является m -группой. В случае $q = 9$ мультипликатор Шура $\langle k \rangle$ имеет порядок 6. Поэтому $|Z| = 2$ или 3. Если $|Z| = 2$, то снова $G \cong SL(2, 9)$, т.е. является m -группой. Следовательно, $|Z| = 3$ и $Z = \langle k^2 \rangle$.

Пусть $G/Z \cong PGL(2, q)$. В этом случае $G'/Z \cong PSL(2, q)$ и G' – накрывающая для $PSL(2, q)$. Снова используя теорему 5.9 из [4], получим $q = 9$ и $|Z| = 3$.

В случае группы A_7 мультипликатор Шура имеет порядок 6. Так как порядок силовой 2-подгруппы группы A_7 равен 16, то $(|Z|, 2) = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда G изоморфна группе из пункта 3) или 4) теоремы 1.2 из [3]. Заметим, что если $[x, y] \in Z \setminus 1$, то из $[x^p, y] = [x, y^p] = [x, y]^p = 1$ следует, что x и y являются p -элементами. Это означает, что если x p' -элемент из G , то $C_{G/Z}(xZ) = C(x)/Z$, т.е. $w(C(x)) = w(C_{G/Z}(xZ)) + 1$. Поэтому $p = \exp(H/Z)$.

Пусть $\bar{H} = H/Z$ – инвариантная абелева подгруппа порядка p^3 из G/Z . Как отмечалось при доказательстве теоремы 1.2 из [3], $\bar{H} = \langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle \times \langle \bar{a}_3 \rangle$, где $C_{\bar{G}}(\langle \bar{a}_i \rangle) = \bar{H}\lambda\langle \bar{\tau}_i \rangle$, $\bar{\tau}_i \in S_2(G/Z)$. Так как $w(C(a_i)) \leq 4$ и подгруппа $\langle a_1 \rangle Z$ нормализуется τ_2 , то можно считать, что $[a_1, a_2] = z \neq 1$ и $a_1^{\tau_2} = a_1^{-1}$. Но тогда

$$z = [a_1, a_2]^{\tau_2} = [a_1^{\tau_2}, a_2^{\tau_2}] = [a_1^{-1}, a_2] = z^{-1},$$

что невозможно.

Для описания разрешимых групп с нетривиальным центром нам понадобится следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.3 [2, теорема 3.4]. *Если G – группа без центра, $v(G) = 3$ и G не является m -группой, то выполняется один из следующих случаев:*

- 1) $G = P\lambda(\langle b \rangle \lambda\langle c \rangle)$ – группа Фробениуса, P – элементарная абелева порядка p^3 , $|b| = q$, $|c| = r^2$, q и r – простые числа, $b^c = b^\alpha$, $\wp(\alpha) = r$;
- 2) $G = H \times K$, H и K – неабелевы группы порядков p_1q_1 и p_2q_2 соответственно;
- 3) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda\langle c \rangle$, $a^p = b^q = c^{rs} = 1$, $a^c = a^\alpha$, $\wp(\alpha) = rs$, $b^c = b^\beta$, $\wp(\beta) = r$;
- 4) $G = P\lambda(H\lambda\langle \tau \rangle)$, P – элементарная абелева порядка p^2 , $\tau^2 = 1$, $|C_P(\tau)| = p$, $|H|$ нечетен, $H\lambda\langle \tau \rangle$ действует на P неприводимо и либо $H = \langle c \rangle$, $c^\tau = c^{-1}$, $w(H) \leq 3$, либо $H = \langle c \rangle \times \langle t \rangle$, $|c|$ и $|t|$ – простые числа, $c^\tau = c^{-1}$, $t^\tau = t$;
- 5) $G = S_4$;
- 6) $G = P\lambda\langle c \rangle$ – группа Фробениуса, P – неабелева группа порядка p^3 , $w(|c|) \leq 3$;
- 7) $G = P\lambda Q$ – группа Фробениуса, P – элементарная абелева порядка p^2 или p^3 , Q – группа кватернионов порядка 8;
- 8) $G = P\lambda Q$, P – элементарная абелева порядка p^2 , $p > 2$, Q – группа диэдра порядка 8 и центральная инволюция из Q инвертирует все элементы из P ;
- 9) $G = P\lambda\langle c \rangle$, $w(|c|) \leq 2$, P – неабелева порядка p^3 , $C(c_0) = \langle a \rangle \lambda\langle c \rangle$, где c_0 – некоторый элемент простого порядка из $\langle c \rangle$, a – нецентральный элемент порядка p из P и если $w(|c|) = 2$, то $C(c) = \langle c \rangle$.

Отметим, что группы типа 9) в [2] определены неточно.

Условимся говорить, что в группе H элемент y *вырастает*, если в определяющих соотношениях группы H соотношение $y^n = 1$ заменяется соотношением $y^{np} = 1$, где p – простой делитель числа n . Кроме того, будем говорить, что элемент z *растет* в группе H , если в группе H элементарная абелева подгруппа $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ заменяется на неабелеву группу порядка p^3 вида $(\langle z \rangle \times \langle a \rangle) \lambda\langle b \rangle$.

Нам понадобится следующий результат о группах порядка p^4 (см. [9, III, 12.6]): если $|F| = p^4$ и $|Z(F)| = p$, то F – одна из следующих групп:

а) $F = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda\langle x \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^{sp}$, где $s = 1$ или s – квадратичный невычет по модулю p ;

- б) $F = (\langle z \rangle \times \langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $z^p = a^p = b^p = x^p = 1$, $[z, x] = 1$, $[a, x] = z$, $[b, x] = a$;
 в) $F = (\langle a \rangle \lambda \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle$, $a^{p^2} = b^p = x^p = 1$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$ при $p > 3$ и $F = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle$, $a^9 = b^3 = 1$, $a^3 = x^3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3$ при $p = 3$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть G – конечная разрешимая группа, не являющаяся t -группой, и $Z_2 = Z > 1$. Тогда условие $v(G) = 4$ выполняется тогда и только тогда, когда G – одна из следующих групп:

- 1) $G = Z \times G_1$, $|Z|$ – простое число, G_1 – одна из групп 1)–9) теоремы 3.3;
- 2) G получается из групп 1), 3), 6), 9) теоремы 3.3 за счет вырастания элемента c ;
- 3) G получается за счет вырастания инвариантного множителя из H или K в случае группы 2), элемента τ или элемента t в случае группы 4), инволюции, не лежащей в A_5 , в случае группы 5), нецентральной инволюции из Q в группе 8), неединичного элемента из $P \cap C(c)$ в группе 9), если $w(|c|) = 1$;
- 4) $G = A\lambda B$, A – элементарная абелева группа порядка p^2 , B – неабелева группа порядка q^3 , $Z = Z(B)$ и G/Z – группа типа 2) из теоремы 3.3;
- 5) $G = P\lambda Q$, P – неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p , Q – группа кватернионов порядка 8, $Z = Z(P)$ и G/Z – группа Фробениуса;
- 6) $G = P\lambda Q$, P – абелева группа порядка p^2 , Q – группа кватернионов, группа диэдра или квазидиэдральная группа, $|Q| = 16$, $Z = Z(Q)$ и G/Z – группа типа 8) из теоремы 3.3;
- 7) $G = ((\langle z \rangle \times \langle a \rangle \times \langle b \rangle) \lambda \langle x \rangle) \lambda \langle c \rangle$, $z^p = a^p = b^p = x^p = 1$, $[z, x] = 1$, $[a, x] = z$, $[b, x] = a$, $|c|$ нечетен, $w(|c|) = 3$, $[z, c] = 1$, $a^c = a^\alpha$, $\wp(\alpha) = |c|$, $b^c = a^{\alpha(\alpha-1)/2} b \alpha^2$, $x^c = a^\delta x \alpha^{-1}$;
- 8) $G = F\lambda K$, F – центральное склеивание двух неабелевых групп порядка p^3 , $K = Q_8$ или $K = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$, $a^{q^1} = b^{q^2} = 1$, $[a, b^{q^2}] = 1$, $[a, b] \neq 1$, $Z = Z(F)$ и G/Z – группа Фробениуса;
- 9) $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \lambda ((\langle a_1 \rangle \times \langle z \rangle) \lambda \langle a_2 \rangle) \times \langle a_3 \rangle$, $b_1^p = b_2^p = a_1^q = a_2^q = a_3^r = 1$, $q \neq r$, $[a_1, a_2] = z$, $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 1$, $\langle b_1 \rangle \lambda \langle a_2 a_3 \rangle$ и $\langle b_2 \rangle \lambda \langle a_1 a_3 \rangle$ – группы Фробениуса;
- 10) $G = (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \lambda H$, $w(H) = 5$, $H = \langle a \rangle \lambda Q$, $|a|$ – нечетный делитель числа $p+1$ и либо $Q = \langle x \rangle \langle y \rangle$ – группа кватернионов порядка 8, 16 или 32, $y^4 = 1$, либо $Q = \langle x \rangle \lambda \langle y \rangle$ – диэдральная или квазидиэдральная группа порядка 8, 16 или 32. В любом случае $b_1^y = b_2$, $b_2^y = b_1$, $a^y = a^p$, $[a, x] = 1$ и $\langle a \rangle$ действует на $\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ неприводимо;
- 11) $G = F\lambda \langle d \rangle$, F – группа типа G_2 или G_3 из теоремы 2.3, $w(|d|) \leq 3$, $Z = Z(F)$ и G/Z – группа Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа из условия теоремы. Тогда $|Z|$ – простое число. Если G/Z является t -группой, то G/Z – группа Фробениуса с абелевыми инвариантным и дополнительным множителями. Но тогда по теореме 5.12 из [3] и G должна быть t -группой. Поэтому G/Z не является t -группой.

Если $Z \not\leq \Phi(G)$, то $G = Z \times G_1$ – группа типа 1.

Предположим, что $Z \leq \Phi(G)$, но $Z \not\leq G'$. В силу леммы 3.1 G/Z является группой из теоремы 3.3. В этом случае несложные рассуждения показывают, что G является группой типа 2 или 3.

Пусть теперь $Z \leq \Phi(G) \cap G'$. Рассмотрим сначала случай $v(G/Z) = 3$. Тогда G/Z — группа из теоремы 3.3. Исследуем каждый из девяти случаев этой теоремы.

1) Элемент z может расти только в подгруппу P . Но тогда $G = F\lambda K$ и $F = (\langle a_1 \rangle \times \langle z \rangle)\lambda\langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$. Так как подгруппы $\langle z \rangle$ и $\langle z \rangle \times \langle a_3 \rangle$ K -допустимы, то можно считать, что и $\langle a_3 \rangle$ тоже K -допустима. Но тогда фактор-группа $G/F = G/C(a_3)$ должна быть циклической, что не выполняется.

2) Пусть $G/Z = (\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle)\lambda(\langle \bar{b}_1 \rangle \times \langle \bar{b}_2 \rangle)$, $[\bar{a}_i, \bar{b}_j] = 1$ при $i \neq j$, $\langle \bar{a}_i \rangle\lambda\langle \bar{b}_i \rangle$ — группы Фробениуса порядков $p_i q_i$. Если z растет в $\langle \bar{a}_1 \rangle \times \langle \bar{a}_2 \rangle$, то

$$z = z^{b_1} = [a_1^{b_1}, a_2^{b_1}] = [a_1^{b_1}, a_2] = z^\alpha$$

для $\alpha \neq 1(p)$. Поэтому z растет в $\langle \bar{b}_1 \rangle \times \langle \bar{b}_2 \rangle$, и мы получаем группу типа 4.

3) В этом случае $p = q$ и z растет в $\langle \bar{a} \rangle \times \langle \bar{b} \rangle$. Но тогда $z = z^c = [a^c, b^c] = z^{\alpha\beta}$, т.е. $\alpha\beta = 1$, что противоречит тому, что $\wp(\alpha) = rs$, $\wp(\beta) = r$.

4) Если z растет в H , то $|\bar{c}| = |\bar{t}| = |z|$ и из равенства $z = [c, t]$ получим $z = z^\tau = [c^{-1}, t] = z^{-1}$, что невозможно. Если же z растет в P , то $F = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\lambda\langle b \rangle$, и так как τ действует на P не регулярно, то можно считать, что $a^\tau = a$, $b^\tau = b^\alpha$, $\alpha \neq 1$. Но тогда снова $z = [a, b^\alpha] = z^\alpha$, что невозможно.

5) Накрывающая для S_4 удовлетворяет условию $v(G) = 3$.

6) Элемент z растет в P . Так как $|F| = p^4$ и $F/(Z(F) \cap F')$ неабелева, то F может быть только одной из групп а)–в), перечисленных перед формулировкой теоремы. Случаи а) и в) невозможны, так как в этих случаях F содержит c -допустимую циклическую подгруппу $\langle a \rangle$ порядка p^2 и, следовательно, должно выполняться равенство $\langle a \rangle = Z \times [a, \langle c \rangle]$.

Пусть F — группа типа б). Тогда можно считать, что $z^c = z$, $a^c = a^\alpha$, $b^c \equiv a^\beta b^\gamma$ и $x^c \equiv a^\delta b^\varepsilon \pmod{Z}$. Действуя на равенства $[a, x] = z$ и $[b, x] = a$ элементом c , получим $\varepsilon = \alpha^{-1}$, $\gamma = \alpha^2$ и $\beta = \alpha(\alpha - 1)/2$, т.е. G — группа типа 7.

7) Так как мультипликатор Шура для группы кватернионов тривиален, то z растет в P и мы имеем группу типа 5.

8) Пусть z растет в P . Тогда $F = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\lambda\langle b \rangle$. Так как нецентральная инволюция τ из Q действует на P не регулярно, то можно считать, что $a^\tau = a$, $b^\tau = b^{-1}$. Но тогда $z = z^\tau = z^{-1}$, что невозможно. Таким образом, z растет в Q . Так как мультипликатор Шура диэдральной 2-группы имеет порядок 2, а накрывающая ее является кватернионной, диэдральной или квазидиэдральной группой, то G — группа типа 6.

9) В этом случае z растет в P и F снова одна из групп а)–в), перечисленных выше. В каждом из этих случаев несложно получить противоречие.

Пусть теперь $v(G/Z) = 4$. В этом случае если A/Z — централизатор из G/Z и $w(A/Z) = 4$, то $Z(A) = Z \leq A'$, и если $A/Z = C_{G/Z}(aZ)$, то $Z = \langle [a, b] \rangle$ для некоторого $b \in A$, т.е. z растет в силовскую $|z|$ -подгруппу из G/Z .

Предположим сначала, что F/Z абелева, т.е. G/Z удовлетворяет условию теоремы 2.1 из [3]. Рассмотрим все двенадцать случаев из заключения этой теоремы.

1) Так как z не может расти в Q_8 , то z растет в F и $w(K) \leq 3$. Поэтому либо $K = Q_8$, либо $K = \langle a \rangle\lambda\langle b \rangle$, $a^{p_1} = b^{q_1^2} = 1$. В силу $Z(F(G)) = Z$ $F(G)$ может быть только центральным склеиванием двух неабелевых подгрупп порядка p^3 , т.е. G — группа типа 8.

2) Пусть $G/Z = \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$. Так как $w(C_{G/Z}(\bar{a})) = 4$ для любого $\bar{a} \in \bar{G}_1 \setminus 1$, то $|Z|$ должен делиться как на p_1 так и на p_2 , что невозможно.

3) В группе $\langle c \rangle$ найдется элемент c_0 простого порядка со свойством $w(C(c_0)) = 4$. Поэтому z вырастает в силовскую $|c_0|$ -подгруппу. Но тогда можно считать, что $|c_0| = p$ и z вырастает в $\langle b_1 \rangle \times \langle c_0 \rangle$. Так как $b_1 \in C(c_0)$, то $\langle b_1 \rangle$ является c -допустимой, т.е. $b_1^c = b_1^\alpha$, $\alpha \neq 1(p)$. Но тогда в группе G будем иметь $z = z^c = [b_1^\alpha, c_0] = z^\alpha$, что невозможно.

4) Пусть b – элемент простого порядка из F , для которого $C(b) \cap \langle c \rangle = \langle c_0 \rangle \neq 1$. Тогда $|z| = |b|$. Если z вырастает в $\langle b \rangle \times \langle c_0 \rangle$, то повторяем рассуждения из предыдущего абзаца. А если z вырастает в $\langle b \rangle \times \langle b_1 \rangle$, то к противоречию приводит равенство $z = [b, b_1^{c_0}]$.

5) Так как в этом случае $w(C(a_2^r)) = 4$, то z вырастает в подгруппу $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$ и мы имеем группу типа 9.

6) В силу $w(C(a_2)) = 4$ можно считать, что $z = [a_1, a_2^r]$. Но тогда в группе G выполняется неравенство $w(C(a_2^q)) > 4$.

7) Случай $w(|a|) = 4$ невозможен. Если же $w(|a|) = 3$, то $|a| = 2n$, z вырастает в $\langle a^n \rangle \times \langle \tau \rangle$ и мы получаем группу типа 10.

8) Если τ – центральная инволюция из $SL(2, 3)$, то $|C(\tau)| = 24$. Поэтому z должен вырастать в силовскую 2-подгруппу из $SL(2, 3)$, что невозможно, так как $S_2(SL(2, 3)) \cong Q_8$.

9) Так как $w(C(x^q)) = w(C(b)) = 4$ для некоторого $b \in (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \setminus 1$, то $|z|$ должен быть равен и p и q , что противоречит тому, что $p \neq q$.

10) Из $w(C(c)) = 4$ следует, что $|z| = q$. Так как $p \neq q$, то должны выполняться равенства $r = q$ и $z = [c, x]$. Действуя на последнее равенство элементом $y_0 \in (C(x) \cap \langle y \rangle) \setminus 1$, снова получим противоречие.

11) Из $w(C(x)) = 4 = w(C(b_1 b_2))$ получим $p = |z| = q$.

12) Так как $w(C(b_1)) = 4$, то можно считать, что $z = [b_1, b_2]$. Действуя на это равенство элементом y , снова получим противоречие.

Предположим теперь, что группа F/Z неабелева. Тогда G/Z является группой из теоремы 2.2 из [3]. Рассмотрим эти группы.

1) Так как z может вырасти только в нециклическую группу, то $|F| = p^4$ и $w(|c|) \leq 3$. Из того, что $v(F) = 4$ и F не является ни m -группой, ни центральным склеиванием двух неабелевых групп порядка p^3 , следует, что G изоклинна одной из групп G_1, G_2, G_3 из теоремы 2.3. В случае группы G_1 подгруппа $Z_2 = \langle b_1^p \rangle \times \langle b_2^p \rangle$ c -допустима. Но тогда она содержит c -допустимую циклическую подгруппу $\langle b \rangle$ порядка p^2 , что невозможно, так как $b^p = z$, а $b^c \neq b$. Таким образом, в этом случае G – группа типа 11.

2) Здесь $p = q$ и из строения F/Z следует, что F может быть только группой типа G_2 из теоремы 2.3. Но тогда в обозначениях этой теоремы должны выполняться равенства $a_2^c = a_2^\beta$, $b_1^c = b_1$, откуда $z^c = z^\beta$, что невозможно.

В случае 3) тоже должно выполняться равенство $p = q$. Так как для групп 3) – 7) подгруппа F не изоморфна G_i/Z ни для какой группы G_i из теоремы 2.3, то эти случаи невозможны.

8) $F(G)$ может быть только группой типа G_3 из теоремы 2.3. Пусть $G = F\lambda\langle d \rangle$. Тогда в обозначениях теоремы 2.3 можно считать, что $a^d = a^\alpha$ и $b^d = b^\alpha$. Из $[a, b] = z$ получим $a^2 = 1$, что противоречит условию $w(|d|) = 2$.

9) В этом случае должны выполняться условия $|z| = p$ и $w(|c|) < 3$. Но тогда $F = F(G)$ группа порядка p^4 с $|Z(F)| = p$, т.е. F одна из групп, перечисленных перед теоремой. В случае а) мы имеем $b^c \equiv b^{\alpha\beta}$, $a^c \equiv a^\alpha$, $x^c \equiv x^\beta \pmod{Z}$. Так как $z = a^p$, то $\alpha = 1$. Но тогда из $[b, x] = z$ получим $z = [b^\beta, x^\beta] = z^{\beta^2}$, т.е. $\beta^2 = 1$, что противоречит тому, что $\wp(\beta) = |c|$ и $w(|c|) = 2$.

В случае б) имеем $a^c \equiv a^\alpha \beta$, $b^c \equiv b^\alpha$, $x^c \equiv x^\beta \pmod{Z}$. Отсюда $z = [a, x]^c = z^{\alpha\beta^2}$, т.е. $\alpha\beta^2 = 1$. Но тогда $\alpha\beta = \beta^{-1}$ и, следовательно, $\wp(\alpha\beta) = \wp(\beta)$. Но тогда с учетом того, что $w(|c|) < 3$, в пункте 9 теоремы 2.2 из [3] может выполняться только случай а). Из $\alpha = 1$ следует, что $\beta^2 = 1$, что невозможно.

Случай в) аналогично приводится к противоречию.

10) Группа F порядка p^4 с центром порядка p не может иметь такую фактор-группу по центру (см. выше).

11) Снова используем строение групп, перечисленных перед теоремой. В случаях а) и в) из $a^d = a^s$, $z = a^p$ и $z^d = z$ сразу получаем противоречие. А в случае б) противоречие следует из того, что $\langle c \rangle$ должна действовать на $F/Z_2(F)$ неприводимо, а подгруппа $\langle b \rangle Z_2(F) = C_F(Z_2(F))$ инвариантна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bianchi M., Manz O. Groups with small centralizers of non-central elements // Boll. Un. Mat. Ital. Ser. A. 1990. V. 4. № 7. P. 365–370.
- [2] Scarselli A. Gruppi con piccoli centralizzanti // Boll. Un. Mat. Ital. 1992. V. 6-B. № 7. P. 649–663.
- [3] Антонов В. А., Тюрина И. А., Ческидов А. П. Группы с малыми централизаторами // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 5. С. 643–655.
- [4] Schmidt R. Zentralisatorverbände endlicher Gruppen // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1970. № 44. P. 97–131.
- [5] Hall Ph. The classification of prime-power groups // J. Reine Angew. Math. 1940. V. 182. P. 130–141.
- [6] Roche D. M. p -groups with abelian centralizers // Proc. London Math. Soc. (3). 1975. V. 30. № 1. P. 55–75.
- [7] Антонов В. А. Конечные группы с модулярной решеткой централизаторов // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 6. С. 653–683.
- [8] Verardi L. On groups whose noncentral elements have the same finite number of conjugates // Boll. Un. Mat. Ital. Ser. A. 1988. V. 3. P. 391–400.
- [9] Huppert B. Endliche Gruppen, 1. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967.
- [10] Гаген Т. М. К теории конечных групп. М.: Мир, 1979.

(В. А. Антонов, И. А. Тюрина) Южно-уральский государственный университет
(А. П. Ческидов) Университет штата Индиана, США
E-mail: irina@chel.ru

Поступило
23.11.2000